

HSMD – Dynamique cosmologique de l’hypersphère maillée

Extension cosmologique de HSM : théorie, calibrage et sorties dérivées

Public Release 1.0

HSM Research
`contact@HSM-research.org`

juin 2026

Table des matières

1	Introduction générale	5
1.1	De HSM à HSMD	5
1.2	Idée physique directrice	5
1.3	Soliton-genèse et périmètre du manuscrit	6
1.4	Ce que HSMD cherche à obtenir	6
1.5	Méthode : théorie, calibration, prédictions	7
1.6	Portée et falsifiabilité	7
I	Théorie HSMD : dynamique globale	9
2	Cadre théorique HSMD	11
2.1	Objet physique étudié : branche comprimée, quench et fermeture stabilisée . . .	11
2.2	Dynamique mécanique homogène de l'hypersphère maillée	12
2.3	Solutions localisées et terme solitonique	16
2.4	Fermeture globale non dilutive portée par le canal radial HSM	17
2.5	Projection détaillée et résidu en a^{-2}	18
2.6	Rotation globale	19
2.7	Équation dynamique homogène et dictionnaire de branche	22
2.8	Fermetures géométriques rotationnelles	26
2.9	Fonctionnelles théoriques de raccord	31
2.10	Statut logique des coefficients	32
2.11	Synthèse	32
II	Calibrage de branche et confrontations tardives	35
3	Calibrage observationnel de branche	37
3.1	Périmètre du calibrage et constantes HSM consommées	37
3.2	Observables utilisées	38
3.3	Fonction objectif	39
3.4	Résidu constant effectif et contrainte théorique	39
3.5	Point de contrôle à compensation exacte	40
3.6	Scan profilé du résidu constant A_0	41
3.7	Contrôle cosmographique du point $A_0 = 0$	42
3.8	Calibration directionnelle auxiliaire	42
3.9	Table de traçabilité numérique	45
3.10	Conclusion	46

III	Sorties dérivées et prédictions	47
4	Prédictions observables post-calibrage	49
4.1	Périmètre post-calibrage	49
4.2	Quantités cinématiques dérivées	51
4.3	Vitesse de rotation de l'hypersphère et position de l'observateur	53
4.4	Synthèse conjointe de la fermeture PMNS–rotation	60
4.5	Statut des incertitudes des sorties post-calibrage	61
4.6	Table de traçabilité des prédictions observables	63
5	Prédictions prospectives et sorties structurelles	65
5.1	Table de traçabilité des sorties prospectives et structurelles	70
IV	Comparaison à ΛCDM	71
6	Lecture comparative avec le cadre ΛCDM	73
6.1	Objet de la comparaison	73
6.2	Dictionnaire effectif des coefficients	73
6.3	Lecture de la discordance sur H_0	74
6.4	Comparaison statistique de fond avec Λ CDM	75
6.5	Terme constant et lecture de l'énergie noire	76
6.6	Apports propres de HSMD	76
6.7	Périmètre de la comparaison	77
7	Conclusion générale de HSMD	79
7.1	Bilan général	79
7.2	Résultats stabilisés	79
7.3	Fermeture rotationnelle et tests multi-canaux	80
7.4	Ce qui est résolu, ce qui est expliqué, ce qui reste prospectif	80
7.5	Conditions de validité et points de confrontation	81
7.6	Falsifiabilité et suites naturelles	81
7.7	Conclusion	81

Chapitre 1

Introduction générale

1.1 De HSM à HSMD

HSM [1] propose une lecture mécanique de la physique fondamentale. Son point de départ est une hypersphère maillée compacte $\mathbb{S}^3$, dont la dynamique interne non linéaire peut porter des solutions localisées de type solitonique, des modes non massiques, des champs effectifs et des structures composées.

Dans cette lecture, les particules ne sont pas introduites comme des objets ponctuels élémentaires posés indépendamment du support. Elles sont associées à des familles de solutions localisées de la maille, ou à des structures composées de telles solutions. Les champs effectifs, les masses, les charges et certaines constantes de structure sont alors lus comme des propriétés émergentes de ces solutions et de leurs fermetures.

Cette construction laisse naturellement ouverte une question globale. Si les particules et les champs sont portés par une hypersphère maillée, alors le support lui-même ne peut pas être traité comme un décor passif. Il doit posséder une dynamique propre : rayon courant, réponse élastique, branche de fermeture, rotation globale et conditions de stabilisation.

HSMD constitue cette seconde étape. Son objectif n'est pas de remplacer HSM par une théorie indépendante, mais de prolonger HSM vers la dynamique globale du support. La question centrale devient alors :

Comment la dynamique d'une hypersphère maillée compacte peut-elle être lue comme une dynamique cosmologique effective ?

1.2 Idée physique directrice

L'idée directrice de HSMD est que l'expansion cosmologique tardive peut être reformulée comme la trajectoire effective du rayon $R(t)$ de l'hypersphère maillée. Le facteur d'échelle cosmologique n'est donc pas introduit comme une cinématique abstraite indépendante du support : il est rattaché à l'évolution globale de la maille HSM.

Cette évolution globale n'est pas seulement radiale. Une hypersphère compacte peut aussi porter une rotation globale, des contraintes de fermeture et des effets directionnels liés à la position de l'observateur dans la géométrie. Le programme de HSMD consiste donc à étudier simultanément :

- la branche homogène tardive de $R(t)$;
- la réponse élastique globale du support ;
- la fermeture rotationnelle ;
- les signatures observationnelles qui peuvent en résulter.

Le rayon R_0 et la maille ℓ_0 utilisés dans HSMD sont les grandeurs de l'état présent. Ils sont déterminés dans HSM par le calibrage des constantes fondamentales, et ne doivent pas être confondus avec un rayon naturel ni avec un état de repos de la structure.

1.3 Soliton-genèse et périmètre du manuscrit

Si les particules correspondent, dans HSM, à des solutions localisées de type solitonique ou à des structures composées de telles solutions, la question de leur apparition devient une question dynamique : dans quelles conditions une excitation de la maille devient-elle une solution localisée stable ?

Cette question relève de la soliton-genèse. Elle concerne le régime initial de relâchement ou de quench, la formation des premiers ventres de vibration, leur migration éventuelle vers des solutions massiques, puis la stabilisation progressive des coefficients effectifs de branche.

Le présent manuscrit ne consomme pas une description complète de ce régime initial. Il se place après cette phase, dans une branche homogène stabilisée où les coefficients globaux pertinents peuvent être traités comme constants au rang étudié. La soliton-genèse fixe donc le contexte physique de HSMD, mais les dérivations quantitatives du manuscrit portent sur la dynamique tardive stabilisée.

1.4 Ce que HSMD cherche à obtenir

HSMD cherche à obtenir trois types de résultats.

Le premier est une branche cosmologique tardive calibrée sur des observables de fond. Les distances BAO servent à contraindre la trajectoire effective du rayon sans imposer a priori une calibration cosmologique externe. Une fois cette branche fixée, le modèle produit des sorties cosmographiques : accélération actuelle de l'expansion, redshift de transition vers cette phase accélérée, âge effectif, trajectoire de $R(t)$ et structure du noyau dynamique stabilisé.

Le deuxième est une fermeture rotationnelle. Dans HSM, les angles de mélange PMNS appartiennent à la géométrie interne réelle des solutions neutrino. HSMD ajoute la possibilité que la rotation globale de l'hypersphère introduise une orientation effective liée à notre domaine d'observation. La phase de Dirac, les projections directionnelles et certaines signatures de type dipolaire sont alors traitées comme des lectures possibles de cette fermeture globale, et non comme des paramètres isolés.

Le troisième est un ensemble de prédictions ou de tests observationnels : distances hors calibration, signatures directionnelles, alignements attendus, relations entre canaux indépendants et tests futurs de dérive cosmologique. La valeur de HSMD ne repose donc pas sur un seul ajustement numérique, mais sur la possibilité de relier plusieurs familles d'observables à une même dynamique géométrique.

Dans cette lecture, la différence entre l'échelle moyenne d'expansion déduite des observables de fond et la valeur locale apparente de la constante de Hubble n'est pas introduite comme une nouvelle constante libre. HSMD l'interprète comme l'effet apparent d'une correction rotationnelle locale, liée à la position angulaire effective de notre domaine d'observation dans l'hypersphère en rotation. Cette lecture permet de relier la tension sur H_0 à la géométrie globale du modèle, tout en conservant une branche moyenne calibrée sur les observables de fond.

La même fermeture rotationnelle conduit aussi à des sorties directionnelles comparables : une biréfringence CMB prédite au rang de quelques dixièmes de degré, et une signature HSC/spin confrontée à la pente brute mesurée dans la fenêtre active où l'axe spin est détecté. Ces concordances restent souples et ne sont pas présentées comme des preuves isolées ;

leur intérêt est de tester une même géométrie rotationnelle sur plusieurs canaux observationnels distincts.

1.5 Méthode : théorie, calibration, prédictions

Le manuscrit distingue strictement trois niveaux.

Le premier niveau est théorique. Il définit la dynamique globale de l'hypersphère maillée, les grandeurs de branche, les termes de fermeture, le régime stabilisé étudié et les effets de rotation. À ce niveau, aucune valeur observationnelle n'est utilisée comme argument de preuve.

Le deuxième niveau est le calibrage. Certaines observables sont utilisées pour fixer les constantes de branche nécessaires à la comparaison : distances BAO, paramètres de fermeture et orientation rotationnelle lorsque celle-ci est requise. Ces entrées sont explicitement distinguées des sorties.

Le troisième niveau est prédictif. Une fois la branche calibrée, HSMD compare les sorties du modèle à des observables qui n'ont pas servi à fixer les paramètres correspondants. Chaque résultat est alors présenté avec son statut : calibrage, sortie comparable, test directionnel, prédiction différée ou secteur laissé ouvert.

1.6 Portée et falsifiabilité

HSMD ne prétend pas fournir, dans ce manuscrit, une histoire complète de tous les régimes de l'Univers. Il traite la branche homogène tardive stabilisée de la dynamique HSM, et signale explicitement les secteurs qui relèvent d'une étape ultérieure : soliton-genèse complète, régime post-quench non linéaire, formation détaillée des familles massiques et stabilité globale loin du rang étudié.

Le modèle est falsifiable parce qu'il produit des relations quantitatives et géométriques entre plusieurs canaux indépendants : distances BAO, paramètres cosmographiques, orientation rotationnelle, phase de Dirac PMNS, signatures directionnelles et tests futurs. Une incompatibilité robuste entre ces sorties et les observations contredirait directement les fermetures correspondantes.

L'objectif de HSMD est donc de prolonger HSM sans changer sa logique : partir d'un cadre mécanique explicite, dériver des équations, identifier des solutions ou des branches, fermer les constantes nécessaires, puis comparer les sorties numériques aux observations.

Première partie

Théorie HSMD : dynamique globale

Chapitre 2

Cadre théorique HSMD

2.1 Objet physique étudié : branche comprimée, quench et fermeture stabilisée

La théorie HSMD étudie une branche homogène de HSM dans laquelle le rayon global de l'hypersphère maillée devient un degré dynamique. L'objet mécanique considéré est une hypersphère maillée issue d'un état comprimé, puis relâchée par un quench global.

Le quench désigne ici la rupture effective de l'équilibre initial de compression. Après ce relâchement, le degré global de rayon évolue sous l'effet de la mécanique homogène de la maille et des charges globales portées par la branche.

Le périmètre théorique retenu n'est pas la phase complète de formation post-quench. La chaîne dynamique

quench $\longrightarrow$ redistribution des secteurs $A_i(a) \longrightarrow$ soliton-genèse $\longrightarrow$ branche homogène stabilisée

est traitée comme une hypothèse d'existence de branche. Le présent chapitre prend pour objet le régime effectif atteint lorsque cette branche stabilisée est déjà formée.

Parmi les charges de branche, on autorise une composante rotationnelle globale. Cette rotation n'est pas créée par une décompression parfaitement isotrope : elle caractérise la branche stabilisée étudiée. La décompression modifie ensuite son effet dynamique par conservation de la charge rotationnelle globale.

La fermeture stabilisée signifie que, dans le domaine étudié, les projections homogènes des différents secteurs sont décrites par des coefficients constants. La phase antérieure, où ces coefficients peuvent dépendre du facteur interne a , appartient au problème distinct de soliton-genèse et n'est pas consommée dans les prédictions du présent manuscrit.

La chaîne étudiée dans cette partie théorique est donc

branche HSM comprimée $\longrightarrow$ hypothèse de branche stabilisée $\longrightarrow$ dynamique homogène à coefficients cons

Cette section fixe l'objet mécanique étudié, les variables internes et l'hypothèse de fermeture stabilisée.

Définition 2.1 (Facteur d'échelle interne). La dynamique homogène de HSMD est décrite par le facteur d'échelle interne $a(t)$, défini par

$$R(t) = a(t)R_0. \quad (2.1)$$

Le rayon R_0 est le rayon de référence importé de HSM. La condition $a = 1$ signifie seulement $R(t) = R_0$. Elle ne définit ni un instant de raccord externe, ni un point de relâchement, ni un équilibre dynamique de la branche HSMD.

Définition 2.2 (Taux d'expansion interne). Le taux d'expansion interne est

$$\mathcal{H}(t) := \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}. \quad (2.2)$$

Définition 2.3 (Point de relâchement de branche). Le facteur interne $a_{\text{rel}} > 0$ désigne l'état pour lequel la compression linéaire de la maille s'annule dans la branche considérée. Ce point est une condition de branche de la dynamique homogène. Il n'est pas identifié à 1 sans dérivation ou choix de jauge explicite.

Hypothèse 2.4 (Branche homogène stabilisée issue d'un quench). Le régime HSMD étudié dans ce chapitre est une branche homogène stabilisée de HSM. Cette branche est définie par les quatre conditions de régime suivantes.

Compression initiale. La branche est issue d'un état initial comprimé relativement au point de relâchement a_{rel} :

$$0 < a_{\text{init}} < a_{\text{rel}}. \quad (2.3)$$

Déclenchement par quench. À un instant interne t_q , l'état comprimé cesse d'être un état bloqué et le mode homogène $a(t)$ devient dynamique. Le quench fixe une condition initiale de branche,

$$a(t_q) = a_{\text{init}}, \quad \dot{a}(t_q) > 0. \quad (2.4)$$

Charge rotationnelle globale. La branche homogène peut porter une charge rotationnelle globale conservée, caractérisée par un axe interne $\hat{\mathbf{N}}_{\text{rot}}$ et par une vitesse angulaire globale Ω_{HS} . Cette charge est traitée comme une donnée de branche dans la réduction homogène. Son effet dynamique évolue ensuite avec le rayon par conservation de la charge rotationnelle globale.

Fermeture stabilisée. La réduction homogène ne décrit pas toute la phase de redistribution post-quench. Elle décrit le régime dans lequel les coefficients effectifs de la dynamique homogène ont atteint une fermeture stabilisée. Si la forme complète issue du quench s'écrit avec des coefficients dépendant du facteur interne,

$$A_i = A_i(a),$$

le régime étudié est celui où

$$A_i(a) \longrightarrow A_i^{\text{stab}} \quad (2.5)$$

sur le domaine de branche considéré.

2.2 Dynamique mécanique homogène de l'hypersphère maillée

L'échelle cinématique commune importée de HSM est

$$H_{\star} := H_R := \frac{c_t}{R_0}. \quad (2.6)$$

Les définitions de la section 2.1 permettent d'écrire la mécanique homogène du mode global de rayon.

Le rayon naturel de relâchement de la branche est le rayon associé au point a_{rel} défini par la définition 2.3. On note

$$R_{\text{nat}} = a_{\text{nat}} R_0, \quad a_{\text{nat}} := a_{\text{rel}}. \quad (2.7)$$

La variable réduite du mode homogène est alors

$$x(t) := \frac{R(t)}{R_{\text{nat}}} = \frac{a(t)}{a_{\text{nat}}}. \quad (2.8)$$

La branche est comprimée lorsque $x < 1$, c'est-à-dire lorsque $R < R_{\text{nat}}$.

La maille totale est supposée conservée : lorsque R augmente, aucune maille nouvelle n'est créée. La densité volumique effective de la maille diminue donc avec le volume. L'inertie globale du mode homogène est écrite sur la configuration matérielle transportée, et non sur un volume courant créateur de maille.

La relation d'énergie homogène minimale s'écrit alors

$$\frac{1}{2}I_R\dot{x}^2 + U_{\text{el}}(x) + U_{\text{rot}}(x) + U_{\text{vib}}(x) = E_{\text{tot}}. \quad (2.9)$$

Ici I_R est l'inertie généralisée du mode radial homogène, U_{el} l'énergie élastique globale de compression-relâchement, U_{rot} l'énergie rotationnelle globale et U_{vib} l'énergie vibratoire interne de la maille.

Au rang minimal, l'énergie élastique est

$$U_{\text{el}}(x) = \frac{1}{2}K_{\text{el}}(x - 1)^2, \quad (2.10)$$

où K_{el} regroupe les contributions radiale et tangentielle de la maille sur la configuration de référence. Sa force généralisée est

$$-\frac{dU_{\text{el}}}{dx} = -K_{\text{el}}(x - 1).$$

Ainsi, pour $x < 1$, la contribution élastique pousse bien vers l'expansion.

La rotation fondamentale n'est pas supposée vérifier $\Omega R = \text{constante}$. En l'absence de mécanisme de verrouillage spécifique, la grandeur mécanique conservée est le moment angulaire global

$$L_{\text{rot}} = I_{\text{rot}}(R)\Omega.$$

Pour une maille matérielle conservée, $I_{\text{rot}} \propto R^2$. On écrit donc

$$I_{\text{rot}}(x) = I_{\text{rot,nat}}x^2,$$

et

$$U_{\text{rot}}(x) = \frac{L_{\text{rot}}^2}{2I_{\text{rot}}(x)} = U_{\text{rot,nat}}x^{-2}. \quad (2.11)$$

L'équation différentielle homogène associée à (2.9) est

$$I_R\ddot{x} = -\frac{d}{dx}(U_{\text{el}} + U_{\text{rot}} + U_{\text{vib}}). \quad (2.12)$$

En explicitant les deux contributions mécaniques directes,

$$\ddot{x} = -\omega_{\text{el}}^2(x - 1) + 2\omega_{\text{rot}}^2x^{-3} - \frac{1}{I_R}\frac{dU_{\text{vib}}}{dx}, \quad (2.13)$$

avec

$$\omega_{\text{el}}^2 := \frac{K_{\text{el}}}{I_R}, \quad \omega_{\text{rot}}^2 := \frac{U_{\text{rot,nat}}}{I_R}.$$

La décompression élastique et la rotation à moment angulaire conservé sont donc les deux moteurs mécaniques directs de l'expansion globale. Le terme U_{vib} décrit le contenu vibratoire interne ; il n'est pas introduit comme moteur d'expansion tant qu'un mécanisme spécifique n'est pas dérivé.

En divisant (2.9) par x^2 , on obtient

$$\mathcal{H}^2 = \left(\frac{\dot{x}}{x}\right)^2.$$

La relation de première intégrale prend la forme

$$\mathcal{H}^2(x) = \frac{2}{I_R x^2} [E_{\text{tot}} - U_{\text{el}}(x) - U_{\text{rot}}(x) - U_{\text{vib}}(x)]. \quad (2.14)$$

En variable $a = a_{\text{nat}}x$, les contributions mécaniques explicites engendrent les secteurs

$$a^{-4}, \quad a^{-2}, \quad a^{-1}, \quad a^0.$$

La projection solitonique localisée fournit le secteur a^{-3} .

La forme complète de branche issue du quench peut être écrite avec des coefficients effectifs dépendant du facteur interne a ,

$$A_i = A_i(a),$$

mais la dynamique de cette phase de redistribution est hors du périmètre de la réduction homogène stabilisée. On applique donc la fermeture stabilisée (2.5). Dans ce régime, les coefficients sont consommés comme constants.

La fonction dynamique homogène stabilisée admissible prend donc la forme

$$\boxed{\mathcal{F}_{\text{HS}}^{\text{stab}}(a) = A_4^{\text{stab}} a^{-4} + A_3^{\text{stab}} a^{-3} + A_2^{\text{stab}} a^{-2} + A_1^{\text{stab}} a^{-1} + A_0^{\text{stab}}}. \quad (2.15)$$

Le coefficient A_1 est la trace du rappel élastique vers R_{nat} . En utilisant (2.10) dans (2.14), la contribution élastique au taux homogène vaut

$$\frac{\Delta H_{\text{el}}^2}{H_R^2} = -\frac{\omega_{\text{el}}^2}{H_R^2} + 2\frac{\omega_{\text{el}}^2}{H_R^2} a_{\text{nat}} a^{-1} - \frac{\omega_{\text{el}}^2}{H_R^2} a_{\text{nat}}^2 a^{-2}. \quad (2.16)$$

On introduit donc le coefficient réduit du mode élastique homogène

$$\mathcal{B}_{\text{el}} := \frac{\omega_{\text{el}}^2}{H_R^2} = \frac{\omega_{\text{el}}^2 R_0^2}{c_t^2}. \quad (2.17)$$

Le secteur a^{-1} est alors

$$A_1 = 2\mathcal{B}_{\text{el}} a_{\text{nat}}. \quad (2.18)$$

Les contributions élastiques de rangs a^{-2} et a^0 sont simultanément

$$A_{2,\text{el}} = -\mathcal{B}_{\text{el}} a_{\text{nat}}^2, \quad A_{0,\text{el}} = -\mathcal{B}_{\text{el}}. \quad (2.19)$$

Le même mode peut être rapporté au rayon naturel par le coefficient

$$\beta_{\text{el}}^{\text{nat}} := \frac{\omega_{\text{el}}^2 R_{\text{nat}}^2}{c_t^2} = \mathcal{B}_{\text{el}} a_{\text{nat}}^2. \quad (2.20)$$

Dans cette convention,

$$A_1 = \frac{2\beta_{\text{el}}^{\text{nat}}}{a_{\text{nat}}}. \quad (2.21)$$

Les deux écritures sont équivalentes ; la grandeur directement réduite sur le rayon de référence HSM est $\mathcal{B}_{\text{el}}$.

Le coefficient A_4^{stab} représente le secteur homogène stabilisé de rang a^{-4} . Un tel rang peut provenir d'un secteur rotationnel à charge conservée, d'un contenu radiatif, ou d'un secteur vibratoire rapide, selon la réduction considérée. Avant stabilisation, ce secteur pourrait être dynamique et s'écrire plus généralement $A_4(a)$. La constante A_4^{stab} de (2.15) désigne seulement le coefficient effectif après fermeture homogène stabilisée.

Le coefficient A_3^{stab} est la projection homogène stabilisée du contenu solitonique localisé dans le régime de branche étudié. Son existence dans la loi homogène traduit l'hypothèse

qu'une fraction stabilisée de l'excitation post-quench a été convertie en contenu solitonique localisé avant le régime effectif décrit par HSMD. Le présent chapitre ne dérive pas cette fraction depuis la dynamique de soliton-genèse ; il la traite comme un coefficient effectif de branche stabilisée, consommé uniquement dans ce statut.

Le coefficient A_2^{stab} regroupe les contributions homogènes de rang a^{-2} , incluant la constante d'énergie mécanique, la partie a^{-2} de l'élasticité et les résidus géométriques de la branche stabilisée. Le coefficient A_0^{stab} est le secteur constant de fermeture de branche.

Fermeture HSM du coefficient élastique naturel. La valeur de $\beta_{\text{el}}^{\text{nat}}$ est déterminée par le rapport entre le comptage scalaire homogène des liaisons matérielles et le renvoi tangent qui fixe la vitesse c_t dans HSM. Soient N le nombre de noeuds matériels de la branche homogène, z la coordination de rang 1, m_n la masse inertielle élémentaire associée à un noeud, k_e la raideur axiale d'une liaison matérielle et ℓ_{nat} la longueur naturelle d'une liaison lorsque $R = R_{\text{nat}}$.

Pour une dilatation homogène $x = R/R_{\text{nat}}$, chaque liaison matérielle vérifie

$$\ell_{ij}(x) = x\ell_{\text{nat}}, \quad \delta\ell_{ij} = \ell_{\text{nat}}(x - 1). \quad (2.22)$$

Le nombre de liaisons non orientées est $Nz/2$. L'énergie élastique homogène vaut donc

$$U_{\text{el}}(x) = \frac{Nz}{2} \frac{1}{2} k_e \ell_{\text{nat}}^2 (x - 1)^2 = \frac{1}{2} K_{\text{el}} (x - 1)^2, \quad (2.23)$$

d'où

$$K_{\text{el}} = N \frac{z}{2} k_e \ell_{\text{nat}}^2. \quad (2.24)$$

L'inertie du même mode homogène, écrite pour la variable sans dimension x , est

$$\frac{1}{2} I_R \dot{x}^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_n (R_{\text{nat}} \dot{x})^2, \quad I_R = N m_n R_{\text{nat}}^2. \quad (2.25)$$

Il en résulte

$$\omega_{\text{el}}^2 = \frac{K_{\text{el}}}{I_R} = \frac{z}{2} \frac{k_e}{m_n} \frac{\ell_{\text{nat}}^2}{R_{\text{nat}}^2}. \quad (2.26)$$

La fermeture tangentielle HSM du passage discret–continu donne, avec les facteurs de renvoi Ξ_{tan} et Ξ_0 définis dans HSM comme facteurs géométriques de renvoi [1, éq. `eq:Xi_defs`], et avec la vitesse tangentielle définie par [1, éq. `eq:ct2_T_over_rho`],

$$c_t^2 = \frac{k_e}{m_n} \ell_{\text{nat}}^2 \Xi_{\text{tan}}, \quad \Xi_0 = \frac{z}{2}. \quad (2.27)$$

En combinant (2.20), (2.26) et (2.27),

$$\beta_{\text{el}}^{\text{nat}} = \frac{\omega_{\text{el}}^2 R_{\text{nat}}^2}{c_t^2} = \frac{\Xi_0}{\Xi_{\text{tan}}}. \quad (2.28)$$

La dépendance au nombre total de noeuds matériels et à l'échelle locale de liaison s'annule. Le coefficient dépend seulement du facteur géométrique local qui relie le comptage homogène au canal tangent.

La fermeture isotrope locale HSM du passage discret–continu fixe le tenseur d'orientation moyen des liaisons par

$$\langle \hat{t} \otimes \hat{t} \rangle = \frac{I_3}{3}. \quad (2.29)$$

Cette relation est reprise ici comme fermeture locale déjà utilisée dans HSM ; elle ne constitue pas une hypothèse cosmologique supplémentaire sur la branche globale HSMD. Si P_{tan} est le

projecteur sur le plan tangent local, alors P_{tan} projette sur un plan bidimensionnel dans l'espace local tridimensionnel. Il possède donc deux valeurs propres unitaires et une valeur propre nulle, d'où

$$\text{tr } P_{\text{tan}} = 2.$$

Il vient

$$\eta_{\text{tan}} = \text{tr} \left(P_{\text{tan}} \frac{I_3}{3} \right) = \frac{\text{tr } P_{\text{tan}}}{3} = \frac{2}{3}. \quad (2.30)$$

Comme $\Xi_{\text{tan}} = \Xi_0 \eta_{\text{tan}}$ dans la fermeture tangentielle HSM du passage discret-continu [1, éq. eq:Xi_defs], avec η_{tan} dérivé de (2.29), l'équation (2.28) donne

$$\boxed{\beta_{\text{el}}^{\text{nat}} = \frac{1}{\eta_{\text{tan}}} = \frac{3}{2}}. \quad (2.31)$$

Par conséquent, le coefficient élastique naturel fournit un coefficient de branche sans dimension

$$\mathcal{B}_{\text{el}}^{\text{LO}} := \frac{\beta_{\text{el}}^{\text{nat}}}{a_{\text{nat}}^2} = \frac{3}{2a_{\text{nat}}^2}. \quad (2.32)$$

Cette écriture n'identifie pas l'échelle cinématique globale $H_\star = c_t/R_0$ à une constante de Hubble effective. Elle utilise seulement le fait que $\beta_{\text{el}}^{\text{nat}}$ est un rapport sans dimension : après projection sur la branche homogène et normalisation du noyau dynamique, le même rapport fixe le poids élastique relatif du terme de rappel.

Dans la fermeture LO minimale du noyau homogène, le coefficient de rappel consommé par le dictionnaire de branche est donc

$$C_H^{\text{LO}} = \mathcal{B}_{\text{el}}^{\text{LO}} = \frac{3}{2a_{\text{nat}}^2}. \quad (2.33)$$

Dans cette convention,

$$A_1 = 2C_H^{\text{LO}} a_{\text{nat}} = \frac{2\beta_{\text{el}}^{\text{nat}}}{a_{\text{nat}}} = \frac{3}{a_{\text{nat}}}. \quad (2.34)$$

La partie élastique pure des autres rangs vaut alors

$$A_{2,\text{el}} = -\frac{3}{2}, \quad A_{0,\text{el}} = -\frac{3}{2a_{\text{nat}}^2}. \quad (2.35)$$

2.3 Solutions localisées et terme solitonique

HSM admet des solutions localisées. Lorsqu'une population comobile de telles solutions est produite et stabilisée, sa contribution moyenne à une hypersphère de volume

$$V_{\mathbb{S}^3}(a) = 2\pi^2 R_0^3 a^3$$

se dilue comme a^{-3} , dès lors que le nombre comobile et l'énergie propre au rang considéré sont conservés.

Définition 2.5 (Coefficient solitonique réduit). On note A_{sol} le coefficient réduit de projection de la population solitonique localisée sur le mode homogène. Sa contribution à $\mathcal{F}$ est

$$\mathcal{F}_{\text{sol}}(a) = A_{\text{sol}} a^{-3}. \quad (2.36)$$

2.4. FERMETURE GLOBALE NON DILUTIVE PORTÉE PAR LE CANAL RADIAL HSM17

Le coefficient A_{sol} est relié à la population comobile de solutions localisées. Une forme réduite générale est

$$A_{\text{sol}} = C_{\text{sol}} \frac{N_{\text{sol}}^{\text{com}} E_{\text{sol}}^{\text{LO}}}{2\pi^2 R_0^3 \rho_{\text{ref}}}, \quad (2.37)$$

où C_{sol} est le coefficient de projection homogène, $N_{\text{sol}}^{\text{com}}$ le nombre comobile de solutions localisées, $E_{\text{sol}}^{\text{LO}}$ leur énergie propre au rang considéré, et ρ_{ref} la densité de référence utilisée dans la réduction.

Dans le cas où cette population est issue d'une capture d'instabilités d'enveloppe, on peut écrire

$$N_{\text{sol}}^{\text{com}} = V_{\text{com}} \frac{\eta_{\text{cap}}}{C_V \xi_f^3}, \quad (2.38)$$

où η_{cap} est le rendement de capture, ξ_f la largeur de gel dans la coordonnée lente, et C_V un coefficient géométrique de volume de cohérence.

La contribution a^{-3} représente la moyenne volumique des solutions localisées.

Dans une fermeture détaillée où la compression initiale est conservée explicitement, le rang a^{-3} reçoit deux contributions : la projection compressive de branche et la population solitonique localisée. La projection compressive réduite Π_ℓ , utilisée ci-dessous, est définie plus loin en (2.51). On définit alors le coefficient détaillé

$$A_{3,\text{det}} := 2\Pi_\ell a_{\text{rel}} + A_{\text{sol}}. \quad (2.39)$$

La notation A_3 est réservée au coefficient effectivement consommé dans le dictionnaire homogène stabilisé. Dans la réduction homogène tardive, la projection compressive est absorbée dans la fermeture de branche, et l'on pose

$$A_{3,\text{sol}} = A_{3,\text{det}}^{\text{stab}} \quad \text{ou, dans la réduction minimale,} \quad A_{3,\text{sol}} = A_{\text{sol}}^{\text{stab}}. \quad (2.40)$$

Ainsi, (2.39) définit le coefficient de la fermeture détaillée, tandis que le dictionnaire minimal (2.88) consomme le coefficient stabilisé $A_{3,\text{sol}}$.

2.4 Fermeture globale non dilutive portée par le canal radial HSM

La contribution a^{-3} définie en (2.36) est une moyenne volumique : elle mesure l'énergie solitonique rapportée au volume courant de l'hypersphère. Elle n'épuise cependant pas l'effet mécanique de cette même population sur le degré de liberté homogène $R(t)$.

Le canal radial consommé ici est le canal gravitation-like HSM. Dans HSM, une solution localisée d'énergie totale E_{sol} source le mode radial par une charge monopolaire intégrée Q_g . La réduction asymptotique HSM donne, dans la fenêtre locale de validité du canal gravitation-like [1, éq. `eq:grav_Qg_Etot_asymptotic_new`],

$$Q_g \simeq \frac{E_{\text{sol}}}{T \kappa_r R_0}. \quad (2.41)$$

Les grandeurs T , κ_r et R_0 renvoient respectivement aux définitions HSM du passage au continu [1, éq. `eq:params_effectifs`], du poids radial [1, éq. `eq:def_kappa_r`], et de la séparation globale [1, éq. `eq:R0_from_one_ring_Z_micro_symbolic_COMP`].

Ici T est la tension volumique HSM, κ_r le coefficient radial sans dimension et R_0 le rayon de référence HSM. Ainsi Q_g porte la dimension d'une aire effective, de sorte que $T \kappa_r Q_g$ porte la dimension d'une force radiale généralisée. HSMD importe ce résultat HSM amont et l'applique au degré de liberté homogène $R(t)$.

Pour une variation homogène du rayon,

$$R(t) = R_0 a(t), \quad \delta R = R_0 \delta a,$$

la charge radiale HSM exerce une force généralisée sur le mode R . Avec la normalisation HSM du canal radial, cette force vaut

$$F_R^{\text{sol}} = T \kappa_r Q_g. \quad (2.42)$$

En combinant (2.41) et (2.42), on obtient

$$R_0 F_R^{\text{sol}} = E_{\text{sol}}. \quad (2.43)$$

Ainsi, la projection radiale globale d'une solution localisée consomme la même énergie totale que sa projection volumique, mais sous une forme non dilutive : la densité moyenne se dilue avec le volume, tandis que le travail généralisé $R_0 F_R^{\text{sol}}$ est associé à l'action totale de la solution sur le mode homogène.

Pour une population stabilisée de solutions localisées, on somme (2.43) :

$$R_0 F_R^{\text{sol,tot}} = E_{\text{sol}}^{\text{tot}}. \quad (2.44)$$

On définit alors le coefficient de fermeture globale réduit par la même projection homogène que celle utilisée dans (2.37) :

$$B_{\text{close}} := C_{\text{sol}} \frac{R_0 F_R^{\text{sol,tot}}}{2\pi^2 R_0^3 \rho_{\text{ref}}}. \quad (2.45)$$

En utilisant (2.44), il vient immédiatement

$$\boxed{B_{\text{close}} = A_{\text{sol}}}. \quad (2.46)$$

Dans la branche minimale où le rang a^{-3} est entièrement porté par le secteur solitonique stabilisé, on note

$$A_{3,\text{sol}} := A_{\text{sol}}. \quad (2.47)$$

La fermeture non dilutive devient alors

$$\boxed{B_{\text{close}} = A_{3,\text{sol}}}. \quad (2.48)$$

Cette égalité ne signifie pas que le terme a^{-3} cesse de se diluer. Elle exprime que la même population solitonique possède deux projections distinctes :

$$A_{3,\text{sol}} a^{-3} \quad \text{pour la moyenne volumique,} \quad B_{\text{close}} \quad \text{pour le travail radial global.}$$

Le coefficient constant total de la branche reçoit donc la combinaison

$$A_0^{\text{eff}} = -\mathcal{B}_{\text{el}} + A_{3,\text{sol}}, \quad (2.49)$$

où $-\mathcal{B}_{\text{el}}$ est la contribution constante du rappel élastique définie en (2.19).

2.5 Projection détaillée et résidu en a^{-2}

Cette section définit les grandeurs utilisées dans la fermeture détaillée. Elle ne définit pas la réduction homogène minimale : elle décrit une remontée plus fine, utile lorsque l'on conserve explicitement la compression initiale et les résidus de projection.

On introduit d'abord l'énergie de référence homogène

$$E_{\text{ref}} := 2\pi^2 R_0^3 \rho_{\text{ref}}. \quad (2.50)$$

La projection compressive réduite est définie par

$$\Pi_\ell := \frac{E_\ell^{\text{comp}}}{E_{\text{ref}}}, \quad (2.51)$$

où E_ℓ^{comp} désigne la contribution compressive de branche retenue dans la fermeture détaillée. La quantité Π_ℓ est donc une condition de branche réduite ; elle n'est pas une constante fondamentale HSM.

La contribution réduite de l'énergie homogène totale au rang a^{-2} est notée

$$\mathcal{E}_a := \frac{E_{\text{hom}}^{\text{red}}}{E_{\text{ref}}}, \quad (2.52)$$

où $E_{\text{hom}}^{\text{red}}$ désigne la part de première intégrale homogène qui survit, après division par a^2 , au rang a^{-2} .

La projection compressive explicite est la fonction

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{comp}}(a) = & -\mathcal{B}_{\text{el}} + 2\mathcal{B}_{\text{el}}a_{\text{rel}}a^{-1} - \mathcal{B}_{\text{el}}a_{\text{rel}}^2a^{-2} \\ & - \Pi_\ell a_{\text{rel}}^2a^{-4} + 2\Pi_\ell a_{\text{rel}}a^{-3} - \Pi_\ell a^{-2} + A_{\text{sol}}a^{-3} + B_{\text{close}}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Cette écriture explicite les contributions qui sont regroupées dans les coefficients C_i de la fermeture détaillée (2.161).

Le résidu K_{res} est défini comme la projection réduite du rang a^{-2} qui n'est pas incluse dans $\mathcal{F}_{\text{comp}}$:

$$K_{\text{res}} := \frac{E_{a^{-2}}^{\text{non comp}}}{E_{\text{ref}}}. \quad (2.54)$$

Il contient les projections géométriques ou de raccord qui ne doivent pas être comptées deux fois dans la partie compressive explicite.

Le coefficient effectif total du rang a^{-2} dans la fermeture détaillée est alors

$$\boxed{K_{\text{eff}} := \mathcal{E}_a - \mathcal{B}_{\text{el}}a_{\text{rel}}^2 - \Pi_\ell + K_{\text{res}}.} \quad (2.55)$$

Le terme correspondant est

$$\mathcal{F}_K(a) = K_{\text{eff}}a^{-2}. \quad (2.56)$$

Dans la branche minimale stabilisée, les grandeurs Π_ℓ , $\mathcal{E}_a$, K_{res} et $\mathcal{F}_{\text{comp}}$ ne sont pas consommées séparément. Elles sont absorbées dans les coefficients stabilisés A_i^{stab} , conformément au dictionnaire (2.88).

2.6 Rotation globale

La rotation globale est traitée comme un canal secondaire du relâchement initial. Elle n'est pas introduite comme cause première de l'expansion.

On note $\Omega_{\text{HS}}(a)$ la vitesse angulaire globale de la branche autour de son axe de rotation. La vitesse tangentielle équatoriale associée est

$$v_{\text{rot}}(a) := \Omega_{\text{HS}}(a)R(a). \quad (2.57)$$

Un observateur situé à une latitude géométrique ϑ relativement à l'axe ne voit que la projection tangentielle locale de cette rotation. Au rang inertiel LO,

$$v_{\text{loc}}(\vartheta, a) = v_{\text{rot}}(a) \sin \vartheta = \Omega_{\text{HS}}(a)R(a) \sin \vartheta. \quad (2.58)$$

Cette relation est seulement la règle géométrique “vitesse angulaire $\times$ distance transverse à l'axe”, avec $r_\perp = R(a) \sin \vartheta$.

Le terme homogène associé à la rotation n'est pas la projection vue par un observateur particulier ; il est la moyenne sur la section $\mathbb{S}^3$ de l'énergie inertielle quadratique. Avec la mesure canonique sur $\mathbb{S}^3$,

$$d\mu_{\mathbb{S}^3} \propto \sin^2 \vartheta d\vartheta d\Omega_2,$$

on obtient

$$\left\langle \sin^2 \vartheta \right\rangle_{\mathbb{S}^3} = \frac{\int_0^\pi \sin^4 \vartheta d\vartheta}{\int_0^\pi \sin^2 \vartheta d\vartheta} = \frac{3\pi/8}{\pi/2} = \frac{3}{4}. \quad (2.59)$$

L'énergie inertielle LO portant un facteur $1/2$, le coefficient géométrique rotationnel homogène vaut donc

$$\kappa_{\text{rot}}^{\text{LO}} = \frac{1}{2} \left\langle \sin^2 \vartheta \right\rangle_{\mathbb{S}^3} = \frac{3}{8}. \quad (2.60)$$

La contribution isotrope moyenne au rang quadratique en $A_{\text{rot}}^{\text{glob}}$ est alors

$$C_{\nu\nu 0}^{\text{rot}} = \kappa_{\text{rot}}^{\text{LO}} \left(A_{\text{rot}}^{\text{glob}} \right)^2. \quad (2.61)$$

Le qualificatif LO porte ici sur la troncature au rang quadratique de la vitesse rotationnelle. À ce rang, le facteur $\kappa_{\text{rot}}^{\text{LO}} = 3/8$ est fixé par la moyenne géométrique exacte $\langle \sin^2 \vartheta \rangle_{\mathbb{S}^3} = 3/4$, et non par un ajustement numérique.

Au rayon de référence, l'amplitude rotationnelle globale sans dimension est

$$A_{\text{rot}}^{\text{glob}} := \frac{\Omega_{\text{HS}} R_0}{c_t}. \quad (2.62)$$

Le terme stationnaire de fond porté par la rotation homogène LO s'écrit donc

$$C_{\nu\nu 0}^{\text{rot}} = \kappa_{\text{rot}}^{\text{LO}} \left(A_{\text{rot}}^{\text{glob}} \right)^2 = \frac{3}{8} \left(A_{\text{rot}}^{\text{glob}} \right)^2. \quad (2.63)$$

On paramètre la loi de transport par

$$v_{\text{rot}}(a) = v_{\text{rot},\star} a^{-s_{\text{rot}}/2}, \quad 0 \leq s_{\text{rot}} \leq 2. \quad (2.64)$$

La branche $s_{\text{rot}} = 0$ correspond au transport tangentielllement gelé. La branche $s_{\text{rot}} = 2$ correspond à la conservation du moment angulaire d'une distribution rigide effective.

On définit alors

$$B_{\text{rot}} := \frac{3}{8} \left(\frac{v_{\text{rot},\star}}{c_t} \right)^2, \quad (2.65)$$

et

$$\mathcal{F}_{\text{rot}}^{\text{iso}}(a) = B_{\text{rot}} a^{-s_{\text{rot}}}. \quad (2.66)$$

La partie anisotrope s'obtient en retranchant la moyenne :

$$\delta \mathcal{F}_{\text{rot}}(a, \vartheta) = D_{\text{rot}} a^{-s_{\text{rot}}} \left(\sin^2 \vartheta - \frac{3}{4} \right), \quad (2.67)$$

avec

$$D_{\text{rot}} := \frac{1}{2} \left(\frac{v_{\text{rot},\star}}{c_t} \right)^2. \quad (2.68)$$

Les deux amplitudes sont liées par

$$D_{\text{rot}} = \frac{4}{3} B_{\text{rot}}. \quad (2.69)$$

2.6.1 Aplatissement géométrique associé à une rotation non rigide

Une hypersphère non rigide portant une rotation globale ne conserve pas, en général, une géométrie exactement isotrope. Comme pour une sphère matérielle ordinaire en rotation, la contrainte centrifuge distingue les directions équatoriales des directions proches de l'axe de rotation. La première correction géométrique admissible est donc une correction quadrupolaire de moyenne nulle.

On écrit, au premier ordre,

$$R(\vartheta, a) = R(a) \left[1 + \epsilon_{\text{flat}}(a) Q_2^{(S^3)}(\cos \vartheta) \right], \quad (2.70)$$

où le quadrupôle zonal de moyenne nulle sur $\mathbb{S}^3$ est défini par

$$Q_2^{(S^3)}(\cos \vartheta) := 4 \cos^2 \vartheta - 1. \quad (2.71)$$

En effet, pour la mesure zonale canonique de $\mathbb{S}^3$, $d\mu_{S^3} \propto \sin^2 \vartheta d\vartheta$, on a

$$\langle \cos^2 \vartheta \rangle_{\mathbb{S}^3} = \frac{1}{4}, \quad \langle Q_2^{(S^3)} \rangle_{\mathbb{S}^3} = 0. \quad (2.72)$$

La grandeur $\epsilon_{\text{flat}}(a)$ mesure uniquement l'amplitude de l'aplatissement géométrique dans ce canal quadrupolaire zonal. Elle n'est pas une nouvelle coordonnée de fond : sa moyenne angulaire est nulle et elle ne modifie donc pas la branche isotrope définie par la fonction moyenne de branche.

La source géométrique de cet aplatissement est la partie anisotrope du terme rotationnel. En utilisant

$$v_{\text{rot}}(a) = \Omega_{\text{HS}}(a)R(a),$$

la contrainte centrifuge caractéristique est de l'ordre de

$$\Omega_{\text{HS}}^2(a)R(a) = \frac{v_{\text{rot}}^2(a)}{R(a)}. \quad (2.73)$$

Ainsi, même dans la branche tangentiellement gelée

$$v_{\text{rot}}(a) = \Omega_{\text{HS}}(a)R(a) = \text{constante},$$

la contrainte locale qui déforme la géométrie varie comme $1/R(a)$. La constance de $\Omega_{\text{HS}}R$ fixe donc le terme moyen de rotation, mais elle n'impose pas la constance de la réponse anisotrope de la géométrie.

On peut résumer cette séparation par

$$\epsilon_{\text{flat}}(a) \propto \frac{\Omega_{\text{HS}}^2(a)R(a)}{K_{\text{geom}}(a)} = \frac{v_{\text{rot}}^2(a)}{R(a)K_{\text{geom}}(a)}, \quad (2.74)$$

où $K_{\text{geom}}(a)$ désigne la rigidité géométrique effective du mode d'aplatissement. L'équation (2.74) n'est pas utilisée ici pour fixer numériquement une grandeur de l'Univers observé : elle indique seulement que la rotation globale produit naturellement un résidu quadrupolaire de géométrie.

Ce résidu est précisément l'objet qui ne peut pas être absorbé dans la projection isotrope de la branche moyenne. Il doit être porté par le secteur anisotrope de fermeture.

2.7 Équation dynamique homogène et dictionnaire de branche

Objet de la section. La dynamique homogène HSMD est écrite comme une loi effective pour le facteur d'échelle interne

$$a(t) := \frac{R(t)}{R_0}, \quad a(t_0) = 1, \quad (2.75)$$

où R_0 est le rayon actuel de l'hypersphère. Le rayon naturel de la branche homogène est noté

$$R_{\text{nat}} = a_{\text{nat}} R_0. \quad (2.76)$$

La grandeur a_{nat} est une condition globale de branche. Elle ne se confond pas avec R_0 , qui caractérise l'état actuel.

On introduit la variable réduite

$$x(t) := \frac{R(t)}{R_{\text{nat}}} = \frac{a(t)}{a_{\text{nat}}}. \quad (2.77)$$

Le secteur homogène minimal est décrit par une première intégrale

$$\frac{1}{2} I_x \dot{x}^2 + \frac{1}{2} K_{\text{el}} (x - 1)^2 = E_{\text{tot}}, \quad (2.78)$$

où I_x est l'inertie généralisée du mode homogène effectif, K_{el} sa raideur de rappel, et E_{tot} l'énergie totale de la branche homogène.

Cette écriture ne suppose pas que l'inertie mobilisée soit celle de toute l'hypersphère globale. Le mode homogène qui intervient dans $H(z)$ est le mode effectif causalement cohérent de la branche observée.

2.7.1 Fermeture causale du rappel homogène

La propagation des perturbations mécaniques étant bornée par la vitesse effective c_t , le domaine inertiuellement cohérent pendant un temps d'expansion est de taille

$$L_H \simeq \frac{c_t}{H_0}. \quad (2.79)$$

On paramètre la fermeture effective du rappel par le coefficient sans dimension C_H qui entre dans le dictionnaire homogène de branche. Le passage entre le coefficient mécanique naturel $\mathcal{B}_{\text{el}}^{\text{LO}}$ et le coefficient normalisé de branche est écrit

$$C_H := \mathcal{N}_H \mathcal{B}_{\text{el}}^{\text{LO}}, \quad \mathcal{B}_{\text{el}}^{\text{LO}} = \frac{\beta_{\text{el}}^{\text{nat}}}{a_{\text{nat}}^2}. \quad (2.80)$$

Le facteur $\mathcal{N}_H$ est un coefficient de normalisation de branche : il regroupe les corrections de domaine causal et de géométrie homogène qui ne sont pas développées au rang LO. Il n'est pas une constante fondamentale HSM.

La fermeture LO minimale consommée par le dictionnaire de branche choisit la normalisation canonique

$$\mathcal{N}_H^{\text{LO}} = 1, \quad C_H^{\text{LO}} = \mathcal{B}_{\text{el}}^{\text{LO}} = \frac{3}{2a_{\text{nat}}^2}. \quad (2.81)$$

Cette fermeture ne pose pas $H_\star = H_0$. Elle fixe seulement le choix de normalisation de branche dans lequel le rapport élastique naturel $\beta_{\text{el}}^{\text{nat}} = 3/2$ est consommé sans correction supplémentaire au rang LO. Une dérivation au-delà du LO devra remplacer $\mathcal{N}_H = 1$ par une réponse explicite du domaine homogène effectif.

2.7.2 Normalisation dynamique et coefficients de branche

La première intégrale (2.78) donne

$$H^2 = \frac{\dot{x}^2}{x^2} = \frac{2}{I_x x^2} \left[E_{\text{tot}} - \frac{1}{2} K_{\text{el}} (x-1)^2 \right]. \quad (2.82)$$

Dans le noyau homogène normalisé, avec le coefficient de branche C_H défini par (2.80), la contribution élastique fournit

$$-C_H + 2C_H a_{\text{nat}} a^{-1} - C_H a_{\text{nat}}^2 a^{-2}. \quad (2.83)$$

Le terme d'énergie totale contribue au rang a^{-2} . La condition $E_{\text{HS}}^2(1) = 1$, appliquée à l'équation complète incluant les contenus stabilisés et rapides, fixe ce terme d'énergie totale et évite d'introduire un coefficient indépendant supplémentaire.

On note $A_{3,\text{sol}}$ la contribution actuelle du contenu stabilisé ou solitonique, et A_4 la contribution de rang a^{-4} , issue des secteurs radiatifs, rotationnels ou vibratoires rapides lorsqu'ils sont présents. On définit

$$B_0 := 1 - 2A_{3,\text{sol}} - A_4. \quad (2.84)$$

Après inclusion de la fermeture non dilutive (2.48), le secteur homogène normalisé vaut alors

$$E_{\text{hom}}^2(a) = (A_{3,\text{sol}} - C_H) + 2C_H a_{\text{nat}} a^{-1} + [B_0 + C_H(1 - 2a_{\text{nat}})] a^{-2}. \quad (2.85)$$

On vérifie immédiatement que

$$E_{\text{hom}}^2(1) = 1 - A_{3,\text{sol}} - A_4. \quad (2.86)$$

L'équation complète est écrite sous la forme

$$E_{\text{HS}}^2(a) = A_4 a^{-4} + A_3 a^{-3} + A_2 a^{-2} + A_1 a^{-1} + A_0. \quad (2.87)$$

Le dictionnaire HSMD minimal est

$$A_0 = A_{3,\text{sol}} - C_H, \quad (2.88)$$

$$A_1 = 2C_H a_{\text{nat}}, \quad (2.89)$$

$$A_2 = 1 - 2A_{3,\text{sol}} - A_4 + C_H(1 - 2a_{\text{nat}}), \quad (2.90)$$

$$A_3 = A_{3,\text{sol}}, \quad (2.91)$$

$$A_4 = A_4. \quad (2.92)$$

Dans ce dictionnaire, $A_{3,\text{sol}}$ désigne le coefficient stabilisé effectivement consommé au rang a^{-3} . Il peut provenir de la projection détaillée (2.39), ou de la réduction minimale $A_{3,\text{sol}} = A_{\text{sol}}^{\text{stab}}$. Le dictionnaire ne consomme donc pas séparément Π_ℓ et A_{sol} : il consomme leur projection stabilisée unique $A_{3,\text{sol}}$.

Ainsi,

$$A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 1, \quad (2.93)$$

et donc

$$E_{\text{HS}}^2(1) = 1. \quad (2.94)$$

Les coefficients A_i ne sont donc pas des paramètres libres. Ils sont produits par les variables physiques de branche

$$\Theta_{\text{init}} = (a_{\text{nat}}, C_H, A_{3,\text{sol}}, A_4), \quad (2.95)$$

auxquelles s'ajoutent les constantes structurales héritées de HSM, notamment R_0^{HSM} , ℓ_0^{HSM} , ρ , T , c_t et les normalisations effectives associées aux solutions localisées. Ces constantes ne sont pas déterminées dans la partie théorique HSMD ; elles sont prises comme constantes structurales du socle HSM décrivant l'état présent.

2.7.3 Loi d'expansion et observables

Avec

$$a = \frac{1}{1+z}, \quad (2.96)$$

la loi dynamique devient

$$E_{\text{HS}}^2(z) = A_4(1+z)^4 + A_3(1+z)^3 + A_2(1+z)^2 + A_1(1+z) + A_0. \quad (2.97)$$

La fonction E_{HS} est une fonction normalisée :

$$E_{\text{HS}}(0) = 1. \quad (2.98)$$

La fonction de Hubble associée est donc écrite

$$H_{\text{HS}}(z) = H_0 E_{\text{HS}}(z). \quad (2.99)$$

Cette écriture ne signifie pas que $H_0 = H_*$. L'échelle $H_* = c_t/R_0$ définie en (2.6) est l'échelle cinématique interne importée de HSM. Le taux observable de la branche stabilisée est obtenu après normalisation de la fonction dynamique interne :

$$H_0 = H_* \sqrt{\mathcal{F}_{\text{br}}^{\text{stab}}(a=1)}. \quad (2.100)$$

De façon équivalente,

$$E_{\text{HS}}^2(a) = \frac{\mathcal{F}_{\text{br}}^{\text{stab}}(a)}{\mathcal{F}_{\text{br}}^{\text{stab}}(1)}. \quad (2.101)$$

Le dictionnaire (2.88) travaille déjà avec les coefficients normalisés pour lesquels $E_{\text{HS}}^2(1) = 1$. L'échelle interne H_* reste donc l'échelle cinématique propre de la branche ; elle n'est pas remplacée par une constante de Hubble externe.

Les distances ci-dessous sont reconstruites sur le cône de lumière local. Elles ne décrivent pas l'ensemble de l'hypersphère, mais seulement la portion accessible jusqu'au redshift considéré. Cette portion est caractérisée par la coordonnée angulaire

$$0 \leq \chi \leq \chi(z),$$

sur S^3 . Pour un domaine borné par z_{max} , la taille angulaire associée est donc

$$\chi_{\text{max}} := \chi(z_{\text{max}}).$$

Lorsque $\chi_{\text{max}} \ll 1$, la projection transverse est localement proche de la limite plate. Lorsque χ_{max} devient non négligeable, la fermeture globale de S^3 intervient explicitement par le facteur $\sin \chi$.

La courbure globale de l'hypersphère intervient dans la projection des distances, et non comme un coefficient dynamique ajouté arbitrairement au rang a^{-2} . On définit

$$\chi(z) = \frac{c_t}{R_0} \int_0^z \frac{dz'}{H_{\text{HS}}(z')}. \quad (2.102)$$

La distance transverse est alors

$$D_M(z) = R_0 \sin \chi(z). \quad (2.103)$$

La distance de Hubble est

$$D_H(z) = \frac{c_t}{H_{\text{HS}}(z)}. \quad (2.104)$$

La distance BAO isotrope est

$$D_V(z) = \left[z D_M^2(z) D_H(z) \right]^{1/3}. \quad (2.105)$$

La distance de luminosité et le module de distance sont

$$D_L(z) = (1 + z) D_M(z), \quad (2.106)$$

$$\mu(z) = 5 \log_{10} \left(\frac{D_L(z)}{10 \text{ pc}} \right). \quad (2.107)$$

La décélération est donnée par

$$q(z) = -1 + \frac{1 + z}{2 E_{\text{HS}}^2(z)} \frac{d E_{\text{HS}}^2}{dz}. \quad (2.108)$$

Au présent, le dictionnaire (2.88) donne

$$q_0 = -\frac{A_{3,\text{sol}}}{2} + A_4 + C_H(1 - a_{\text{nat}}). \quad (2.109)$$

Cette relation n'est pas utilisée pour définir la théorie ; elle sert de contrôle cinématique de la branche obtenue après fixation des conditions globales. En particulier, pour $C_H > 0$, $A_{3,\text{sol}} \geq 0$ et $A_4 \geq 0$, le domaine

$$a_{\text{nat}} > 1 \quad (2.110)$$

donne une contribution élastique de signe accélérant au présent,

$$C_H(1 - a_{\text{nat}}) < 0.$$

Il correspond à

$$R_{\text{nat}} > R_0. \quad (2.111)$$

La lecture mécanique de ce domaine est celle d'une branche encore comprimée par rapport à son rayon naturel, dont le rappel homogène effectif contribue à l'expansion accélérée actuelle. D'autres bilans de signe restent possibles si les autres termes du contrôle cinématique compensent différemment la somme.

Règle de raccord ultérieur. La partie théorique ne fixe pas les conditions globales de la branche réalisée. Elle définit la chaîne interne

$$\Theta_{\text{init}} \longrightarrow A_i^{\text{HS}} \longrightarrow E_{\text{HS}}(z),$$

où

$$\Theta_{\text{init}} = (a_{\text{nat}}, C_H, A_{3,\text{sol}}, A_4)$$

désigne les variables physiques de branche. Les coefficients A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 ne sont donc pas introduits comme constantes fondamentales indépendantes : ils sont produits par le dictionnaire (2.88).

La fonction normalisée E_{HS} permet de construire des grandeurs de raccord comme $H(z)$, $D_H(z)$, $D_M(z)$, $D_V(z)$ et $\mu(z)$. Ces grandeurs dérivées n'interviennent pas pour définir la théorie autonome de la branche.

Statut de la fermeture stabilisée. La forme polynomiale en puissances de a^{-1} utilisée ici décrit la branche homogène sous l'hypothèse de fermeture stabilisée 2.4. Cette hypothèse définit le périmètre du présent chapitre : les coefficients A_i^{stab} sont les coefficients effectifs de la branche après stabilisation, et non les fonctions transitoires $A_i(a)$ de la phase de formation.

La transition dynamique depuis l'état comprimé post-quench jusqu'à une branche stabilisée, incluant la redistribution des secteurs et la soliton-genèse, n'est pas utilisée comme ingrédient de calcul dans les sections aval. Elle constitue l'hypothèse d'existence de la branche stabilisée. Les prédictions HSMD doivent donc être lues conditionnellement à cette branche effective.

Le coefficient $A_{3,\text{sol}}^{\text{stab}}$ désigne la projection homogène stabilisée du contenu solitonique, tandis que A_4^{stab} , lorsqu'il est conservé dans la loi homogène, désigne le reliquat stabilisé du secteur de rang a^{-4} .

2.8 Fermetures géométriques rotationnelles

Objet de la section. Cette section décrit la fermeture géométrique associée à une charge rotationnelle globale de branche. Elle sépare la contribution isotrope, qui peut entrer dans la dynamique homogène, et le résidu anisotrope, qui n'est consommé que par les canaux directionnels.

2.8.1 Support géométrique et champ rotationnel

La section spatiale est représentée par la sphère unitaire

$$\mathbb{S}^3 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 ; \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_{\mathbb{R}^4} = 1 \right\},$$

et par son immersion physique

$$\mathbf{X}(t, \mathbf{x}) = R_0 a(t) \mathbf{x}. \quad (2.112)$$

Une rotation globale de branche est décrite par un endomorphisme antisymétrique

$$\mathbf{A}_{\text{HS}}(t) \in \mathfrak{so}(4), \quad \mathbf{A}_{\text{HS}}^T = -\mathbf{A}_{\text{HS}}. \quad (2.113)$$

Le champ de vitesse rotationnelle associé est

$$\mathbf{v}_{\text{rot}}(t, \mathbf{x}) = R_0 a(t) \mathbf{A}_{\text{HS}}(t) \mathbf{x}. \quad (2.114)$$

Cette vitesse est tangentielle à $\mathbb{S}^3$, puisque

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{A}_{\text{HS}} \mathbf{x} \rangle_{\mathbb{R}^4} = 0$$

par antisymétrie de $\mathbf{A}_{\text{HS}}$.

2.8.2 Amplitude rotationnelle et motif géométrique

La norme quadratique moyenne du générateur définit l'amplitude rotationnelle

$$\Omega_{\text{HS}}^2(t) := \left\langle |\mathbf{A}_{\text{HS}}(t) \mathbf{x}|_{\mathbb{R}^4}^2 \right\rangle_{\mathbb{S}^3}. \quad (2.115)$$

Lorsque $\Omega_{\text{HS}}(t) \neq 0$, on introduit le générateur normalisé

$$\mathbf{J}_{\text{HS}}(t) := \frac{\mathbf{A}_{\text{HS}}(t)}{\Omega_{\text{HS}}(t)}. \quad (2.116)$$

Il vérifie

$$\left\langle |\mathbf{J}_{\text{HS}}(t) \mathbf{x}|_{\mathbb{R}^4}^2 \right\rangle_{\mathbb{S}^3} = 1. \quad (2.117)$$

Le motif scalaire associé à la rotation est

$$Q_{\text{rot}}(t, \mathbf{x}) := |J_{\text{HS}}(t)\mathbf{x}|_{\mathbb{R}^4}^2, \quad (2.118)$$

et son résidu anisotrope est

$$\delta Q_{\text{rot}}(t, \mathbf{x}) := Q_{\text{rot}}(t, \mathbf{x}) - \langle Q_{\text{rot}}(t, \cdot) \rangle_{\mathbb{S}^3}. \quad (2.119)$$

Avec la normalisation (2.117),

$$\delta Q_{\text{rot}}(t, \mathbf{x}) = Q_{\text{rot}}(t, \mathbf{x}) - 1, \quad \langle \delta Q_{\text{rot}}(t, \cdot) \rangle_{\mathbb{S}^3} = 0. \quad (2.120)$$

2.8.3 Projection isotrope et résidu anisotrope

Pour toute grandeur scalaire $X(\mathbf{x})$ définie sur $\mathbb{S}^3$, on note

$$\mathcal{P}_0[X] := \langle X \rangle_{\mathbb{S}^3}, \quad \mathcal{P}_\perp[X] := X - \mathcal{P}_0[X]. \quad (2.121)$$

La fermeture rotationnelle normalisée est

$$\mathcal{K}_{\text{rot}}(t, \mathbf{x}) := \frac{R_0^2 \Omega_{\text{HS}}^2(t)}{c_t^2} Q_{\text{rot}}(t, \mathbf{x}). \quad (2.122)$$

Sa partie isotrope est

$$\bar{\mathcal{K}}_{\text{rot}}(t) := \mathcal{P}_0[\mathcal{K}_{\text{rot}}(t, \cdot)] = \frac{R_0^2 \Omega_{\text{HS}}^2(t)}{c_t^2}, \quad (2.123)$$

et son résidu anisotrope est

$$\delta \mathcal{K}_{\text{rot}}(t, \mathbf{x}) := \mathcal{P}_\perp[\mathcal{K}_{\text{rot}}(t, \cdot)] = \frac{R_0^2 \Omega_{\text{HS}}^2(t)}{c_t^2} \delta Q_{\text{rot}}(t, \mathbf{x}). \quad (2.124)$$

Il vérifie

$$\langle \delta \mathcal{K}_{\text{rot}}(t, \cdot) \rangle_{\mathbb{S}^3} = 0. \quad (2.125)$$

La contribution isotrope au coefficient géométrique effectif est définie par

$$\Omega_{\mathcal{K}}^{\text{rot}} := \Xi_{\mathcal{K}} \bar{\mathcal{K}}_{\text{rot}}(t_{\text{ref}}), \quad (2.126)$$

où $\Xi_{\mathcal{K}}$ est le signe de projection choisi par la convention de fermeture scalaire. La contribution totale de rang géométrique se décompose en

$$\Omega_{\mathcal{K}} = \Omega_{\mathcal{K}}^{(0)} + \Omega_{\mathcal{K}}^{\text{rot}}. \quad (2.127)$$

2.8.4 Résidu directionnel et observateur

La position de l'observateur est notée

$$\mathbf{x}_{\text{obs}} \in \mathbb{S}^3. \quad (2.128)$$

Une direction locale de visée est un vecteur tangent unitaire

$$\mathbf{n} \in T_{\mathbf{x}_{\text{obs}}} \mathbb{S}^3, \quad \|\mathbf{n}\| = 1. \quad (2.129)$$

La géodésique correspondante est

$$\gamma_{\mathbf{n}}(\chi) = \cos \chi \mathbf{x}_{\text{obs}} + \sin \chi \mathbf{n}. \quad (2.130)$$

Le résidu directionnel le long de la ligne de visée est

$$\delta \Omega_{\mathcal{K}}^{\text{rot}}(\chi, \mathbf{n}) := \Xi_{\mathcal{K}} \delta \mathcal{K}_{\text{rot}}(t, \gamma_{\mathbf{n}}(\chi)). \quad (2.131)$$

Il est de moyenne nulle sur les directions locales :

$$\left\langle \delta \Omega_{\mathcal{K}}^{\text{rot}}(\chi, \mathbf{n}) \right\rangle_{\mathbf{n}} = 0. \quad (2.132)$$

Au premier ordre, il induit une modulation directionnelle effective

$$H^2(z, \mathbf{n}) = H_{\text{br}}^2(z) + H_0^2(1+z)^2 \delta \Omega_{\mathcal{K}}^{\text{rot}}(z, \mathbf{n}). \quad (2.133)$$

2.8.5 Fonction de transfert directionnelle des distances

On écrit le résidu directionnel sous la forme normalisée

$$\delta\mathcal{F}_{\text{rot}}(z, \hat{\mathbf{n}}) = D_{\text{rot}}(1+z)^2 \mathcal{M}_{\text{rot}}(\hat{\mathbf{n}}), \quad \langle \mathcal{M}_{\text{rot}} \rangle = 0. \quad (2.134)$$

La fonction directionnelle effective est alors

$$E^2(z, \hat{\mathbf{n}}) = E_{\text{br}}^2(z) + \delta\mathcal{F}_{\text{rot}}(z, \hat{\mathbf{n}}). \quad (2.135)$$

Au premier ordre,

$$\frac{\delta E}{E} = \frac{1}{2} \frac{\delta\mathcal{F}_{\text{rot}}}{E_{\text{br}}^2(z)}. \quad (2.136)$$

La perturbation intégrée de distance est

$$\frac{\delta D_L}{D_L}(z, \hat{\mathbf{n}}) = -\frac{1}{2} D_{\text{rot}} K_H(z) \mathcal{M}_{\text{rot}}(\hat{\mathbf{n}}), \quad (2.137)$$

avec

$$K_H(z) := \frac{\int_0^z \frac{(1+z')^2}{E_{\text{br}}^3(z')} dz'}{\int_0^z \frac{dz'}{E_{\text{br}}(z')}}. \quad (2.138)$$

Estimateurs locaux de H_0 . Un estimateur local de H_0 , construit à partir d'un échantillon $\mathcal{S}$, mesure une quantité pondérée par les directions, les redshifts et les poids effectifs de l'échantillon. On définit

$$K_H(\mathcal{S}) := \langle K_H(z_i) \mathcal{M}_{\text{rot}}(\hat{\mathbf{n}}_i) \rangle_{\mathcal{S}}. \quad (2.139)$$

Pour une fenêtre de redshift,

$$K_H(z_{\min}, z_{\max}; \mathcal{S}) := \langle K_H(z_i) \mathcal{M}_{\text{rot}}(\hat{\mathbf{n}}_i) \rangle_{\mathcal{S}, z_{\min} \leq z_i \leq z_{\max}}. \quad (2.140)$$

La correction directionnelle associée à un estimateur de survey s'écrit

$$\frac{H_0^{\text{loc}}(\mathcal{S}) - H_{\text{ref}}}{H_{\text{ref}}} = \frac{D_{\text{rot}}}{2} K_H(\mathcal{S}), \quad (2.141)$$

et, pour une fenêtre,

$$H_0^{\text{loc}}([z_{\min}, z_{\max}]) = H_{\text{ref}} \left[1 + \frac{D_{\text{rot}}}{2} K_H(z_{\min}, z_{\max}; \mathcal{S}) \right]. \quad (2.142)$$

Ces équations décrivent le transfert directionnel d'un échantillon explicite. Le motif $\mathcal{M}_{\text{rot}}$ est construit à moyenne nulle sur la $\mathbb{S}^3$ complète : il mesure donc un contraste directionnel, et non une nouvelle composante homogène de l'expansion.

Le canal H_0^{loc} utilisé plus loin repose sur une réduction scalaire locale au rang LO. La moyenne globale du motif directionnel est absorbée dans la branche de référence H_{ref} , tandis que l'observateur local consomme la projection quadratique du rayon au plan de rotation. On introduit alors la réponse locale effective

$$\mathcal{M}_H^{\text{LO}}(\chi_{\text{obs}}) = \cos^2 \chi_{\text{obs}}. \quad (2.143)$$

La lecture locale compacte du taux au carré est donc écrite

$$\frac{(H_0^{\text{loc, LO}})^2}{H_{\text{ref}}^2} = 1 + D_{\text{rot}} \mathcal{M}_H^{\text{LO}}(\chi_{\text{obs}}) = 1 + D_{\text{rot}} \cos^2 \chi_{\text{obs}}. \quad (2.144)$$

Cette relation est une fermeture effective LO de lecture locale. Elle n'est pas présentée comme la dérivation complète d'un estimateur de survey à partir du noyau $K_H(\mathcal{S})$. Le raccord complet dépendrait du masque, des poids, de la distribution en redshift et de la définition opérationnelle de l'estimateur local. Dans le présent document, le noyau K_H porte le statut du transfert directionnel, tandis que (2.144) définit la prescription scalaire locale utilisée pour la confrontation H_0^{loc} .

2.8.6 Projection locale de l'observateur

La projection locale dépend de la position de l'observateur, de l'axe de rotation intrinsèque et du canal utilisé. Pour un canal directionnel linéaire, on écrit

$$\mathcal{S}_X = C_X \sin \chi_{\text{obs}}, \quad (2.145)$$

où C_X est le coefficient de réponse du canal X . Cette relation définit une amplitude effective de canal ; elle ne fixe pas à elle seule la latitude χ_{obs} . Les canaux axiaux symétrisés peuvent porter une réponse quadratique différente ; le canal spin/HSC est traité séparément au rang LO dans la sous-section 2.8.8.

2.8.7 Complétion rotationnelle du canal de phase PMNS

Le secteur PMNS du socle HSM est traité, au rang publié, comme une réduction réelle effective : il fixe les trois angles de mélange, mais ne ferme pas la phase de Dirac. Plus précisément, au rang où la géométrie interne du composé neutrino-like est traitée sans orientation globale dynamique, la matrice de mélange effective peut être prise réelle. L'invariant de Jarlskog associé au secteur de Dirac,

$$J_{\text{CP}} = \text{Im} \left(U_{e1} U_{\mu 2} U_{e2}^* U_{\mu 1}^* \right), \quad (2.146)$$

est alors nul. Dans la paramétrisation standard,

$$J_{\text{CP}} = c_{12} s_{12} c_{23} s_{23} c_{13}^2 s_{13} \sin \delta_{\text{CP}}. \quad (2.147)$$

Pour des angles de mélange non dégénérés, le rang réel LO impose donc

$$\sin \delta_{\text{CP}} = 0, \quad \delta_{\text{CP}} = 0 \text{ ou } \pi \quad (\text{modulo } 2\pi). \quad (2.148)$$

La phase de Dirac non triviale ne peut donc pas être produite par la seule réduction réelle LO du secteur PMNS. Elle doit être portée par une orientation dynamique supplémentaire.

Dans HSMD, cette orientation est fournie par la rotation globale de l'hypersphère. On note

$$A_{\text{rot}}^{\text{glob}} = \frac{\Omega_{\text{HS}} R_0^{\text{HSM}}}{c_t} \quad (2.149)$$

l'amplitude globale de rotation, sans dimension. Pour un domaine situé à la position angulaire effective χ_{obs} relativement au plan de rotation, le rayon projeté dans ce plan vaut

$$R_{\perp} = R_0^{\text{HSM}} \cos \chi_{\text{obs}}. \quad (2.150)$$

La phase rotationnelle LO accumulée sur un cycle interne complet $\psi \in [0, 2\pi]$ du canal PMNS est alors l'holonomie projetée

$$\delta_{\text{CP}}^{\text{rot}} = \oint_{\Gamma_{\text{PMNS}}} \frac{\Omega_{\text{HS}} R_{\perp}}{c_t} d\psi = \int_0^{2\pi} A_{\text{rot}}^{\text{glob}} \cos \chi_{\text{obs}} d\psi. \quad (2.151)$$

Comme $A_{\text{rot}}^{\text{glob}}$ et χ_{obs} sont constants sur le cycle interne LO considéré, on obtient

$$\delta_{\text{CP}}^{\text{rot}} = 2\pi A_{\text{rot}}^{\text{glob}} \cos \chi_{\text{obs}}. \quad (2.152)$$

Le facteur 2π provient donc de l'intégration sur un cycle complet de la coordonnée interne de phase, tandis que le facteur $\cos \chi_{\text{obs}}$ provient de la projection du rayon de rotation sur le plan de rotation.

Cette relation ne signifie pas qu'une phase PMNS mesure directement une coordonnée cosmologique globale. Elle définit, au niveau théorique, la phase rotationnelle projetée portée par une branche de l'hypersphère en rotation. Aucune inversion numérique de cette relation n'est effectuée dans la partie théorique : χ_{obs} y reste une position angulaire effective libre du domaine considéré.

2.8.8 Réponse LO du canal spin/HSC

On considère le canal spin comme un canal axial de lecture de la rotation globale. Soit $\hat{\mathbf{N}}_{\text{rot}}$ l'axe de rotation et $\hat{\mathbf{r}}_{\text{obs}}$ la direction radiale effective du domaine d'observation sur l'hypersphère. La position angulaire χ_{obs} est mesurée relativement au plan de rotation. Avec

$$\Pi_{\perp} = \mathbf{1} - \hat{\mathbf{N}}_{\text{rot}} \hat{\mathbf{N}}_{\text{rot}}^T, \quad (2.153)$$

on a

$$\|\Pi_{\perp} \hat{\mathbf{r}}_{\text{obs}}\| = \cos \chi_{\text{obs}}. \quad (2.154)$$

Après moyenne azimutale autour de l'axe de rotation, un terme linéaire en $\Pi_{\perp} \hat{\mathbf{r}}_{\text{obs}}$ dépendrait du choix de phase azimutale et ne définit pas une amplitude scalaire de canal. Le premier invariant scalaire non nul du canal spin au rang LO est donc

$$\mathcal{M}_{\text{spin}}^{\text{LO}} = \|\Pi_{\perp} \hat{\mathbf{r}}_{\text{obs}}\|^2 = \cos^2 \chi_{\text{obs}}. \quad (2.155)$$

La pente mesurée par un estimateur de chiralité projeté porte en outre une perte azimutale. En notant φ la phase azimutale locale autour de l'axe, la moyenne de projection vaut

$$\langle |\cos \varphi| \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\cos \varphi| d\varphi = \frac{2}{\pi}. \quad (2.156)$$

On définit l'amplitude déprojetée du canal spin par

$$\mathcal{M}_{\text{spin}}^{\text{LO}} = \langle |\cos \varphi| \rangle \mathcal{S}_{\text{HSC}}^{\text{LO}}. \quad (2.157)$$

En combinant (2.155)–(2.157), on obtient

$$\mathcal{S}_{\text{HSC}}^{\text{LO}} = \frac{\pi}{2} \cos^2 \chi_{\text{obs}}. \quad (2.158)$$

La pente rotationnelle prédite dans le canal spin est alors

$$\beta_{\text{HSC}}^{\text{pred}} = A_{\text{rot}}^{\text{glob}} \mathcal{S}_{\text{HSC}}^{\text{LO}} = A_{\text{rot}}^{\text{glob}} \frac{\pi}{2} \cos^2 \chi_{\text{obs}}. \quad (2.159)$$

2.8.9 Fermeture détaillée avec compression explicite

La fermeture détaillée conserve explicitement les termes associés à la compression initiale, au résidu géométrique de rang a^{-2} et à la remontée structurelle de la branche. La fonction dynamique est

$$\mathcal{F}_{\text{det}}(a) = C_4 a^{-4} + C_3 a^{-3} + C_2 a^{-2} + C_1 a^{-1} + C_0. \quad (2.160)$$

Les coefficients conservés sont reliés aux grandeurs structurelles définies en amont par

$$\begin{aligned} C_4 &= -\Pi_{\ell} a_{\text{rel}}^2, & C_3 &= 2\Pi_{\ell} a_{\text{rel}} + A_{\text{sol}}, & C_2 &= K_{\text{eff}}, \\ C_1 &= 2\mathcal{B}_{\text{el}} a_{\text{rel}}, & C_0 &= -\mathcal{B}_{\text{el}} + B_{\text{close}}. \end{aligned} \quad (2.161)$$

La fermeture détaillée impose une remontée plus fine vers les coefficients internes de la branche. Son domaine réel est donc contrôlé par la condition

$$\mathcal{F}_{\text{det}}(a) \geq 0. \quad (2.162)$$

2.8.10 Fonctionnelles de raccord associées aux réductions

Les fonctionnelles de raccord ne définissent pas la théorie; elles transforment une branche interne S en grandeurs calculables à partir de $\mathcal{F}_{\text{br}}$. Pour une réduction S , le taux normalisé est

$$H_S(z_{\text{th}}) = H_{\text{ref}}^{(S)} \sqrt{\frac{F_S(z_{\text{th}})}{F_S(0)}}, \quad (2.163)$$

la distance radiale interne est

$$D_{H,S}^{\text{th}}(z_{\text{th}}) = \frac{c_t}{H_S(z_{\text{th}})}, \quad (2.164)$$

et la distance transverse quasi plate est

$$D_{M,S}^{\text{th}}(z_{\text{th}}) \simeq \frac{c_t}{H_{\text{ref}}^{(S)}} \int_0^{z_{\text{th}}} \frac{dz'}{E_S(z')}. \quad (2.165)$$

Pour une règle de longueur r_* , les rapports de distance utilisés dans les raccords de type BAO sont définis par

$$\frac{D_{H,S}^{\text{th}}}{r_*}, \quad \frac{D_{M,S}^{\text{th}}}{r_*}, \quad \frac{D_{V,S}^{\text{th}}}{r_*}, \quad D_{V,S}^{\text{th}} := \left[z_{\text{th}} \left(D_{M,S}^{\text{th}} \right)^2 D_{H,S}^{\text{th}} \right]^{1/3}. \quad (2.166)$$

2.9 Fonctionnelles théoriques de raccord

Les grandeurs suivantes sont des fonctionnelles théoriques associées à une réduction de fermeture S . Elles ne consomment aucune valeur numérique externe. Dans cette section, $\mathcal{F}_{\text{br}}$ désigne une fonction dynamique admissible, par exemple une réduction LO ou une fermeture détaillée.

Définition 2.6 (Grandeurs internes au raccord). Le rayon interne et le taux d'expansion interne au point de raccord sont

$$R_{\text{ref}} := a_{\text{ref}} R_0, \quad H_{\text{ref}}^{(S)} := \mathcal{H}_S(a_{\text{ref}}). \quad (2.167)$$

Ces grandeurs appartiennent au raccord interne de la branche.

Définition 2.7 (Fonction d'expansion normalisée). Pour une réduction S , la fonction d'expansion normalisée est

$$E_S(a) := \frac{\mathcal{H}_S(a)}{\mathcal{H}_S(a_{\text{ref}})} = \sqrt{\frac{\mathcal{F}_S(a)}{\mathcal{F}_S(a_{\text{ref}})}}. \quad (2.168)$$

En variable redshift théorique,

$$E_S(z_{\text{th}}) = \sqrt{\frac{\mathcal{F}_S(a_{\text{ref}}/(1+z_{\text{th}}))}{\mathcal{F}_S(a_{\text{ref}})}}. \quad (2.169)$$

La distance angulaire interne le long d'une géodésique est

$$\chi_S(a; a_{\text{ref}}) = \int_a^{a_{\text{ref}}} \frac{da'}{a'^2 \sqrt{\mathcal{F}_S(a')}}. \quad (2.170)$$

La distance radiale théorique est

$$D_{H,S}^{\text{th}}(a) = \frac{c_t}{\mathcal{H}_S(a)} = \frac{R_0}{\sqrt{\mathcal{F}_S(a)}}. \quad (2.171)$$

La distance transverse théorique sur $\mathbb{S}^3$ est

$$D_{M,S}^{\text{th}}(a) = a_{\text{ref}} R_0 \sin[\chi_S(a; a_{\text{ref}})]. \quad (2.172)$$

Dans le régime quasi plat, cette expression se réduit à

$$D_{M,S}^{\text{th}}(z_{\text{th}}) \simeq \frac{c_t}{H_{\text{ref}}^{(S)}} \int_0^{z_{\text{th}}} \frac{dz'}{E_S(z')}. \quad (2.173)$$

La distance de luminosité théorique est

$$D_{L,S}^{\text{th}}(a) = \frac{a_{\text{ref}}}{a} D_{M,S}^{\text{th}}(a). \quad (2.174)$$

Enfin, le temps interne séparant deux états a_1 et a_2 est

$$\Delta t_S(a_1 \rightarrow a_2) = \frac{1}{H_R} \int_{a_1}^{a_2} \frac{da}{a \sqrt{\mathcal{F}_S(a)}}. \quad (2.175)$$

2.10 Statut logique des coefficients

Les coefficients HSMD n'ont pas tous le même statut logique. La distinction utilisée dans cette partie est la suivante : grandeurs importées de HSM, conditions de branche, coefficients de projection homogène, coefficients de fermeture et règles de raccord interne.

Règle d'usage. Les coefficients de réduction ne doivent pas être confondus avec des constantes fondamentales. Dans la partie théorique, ils définissent une fermeture admissible de l'équation HSMD. Les règles de raccord, dont $r_\star$, ne modifient pas la branche dynamique ; elles servent à former des rapports de grandeurs calculées.

2.11 Synthèse

La dynamique théorique HSMD est organisée en trois niveaux.

Niveau commun. Le point de départ est l'équation différentielle commune

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_\star^2 \mathcal{F}_{\text{br}}(a), \quad (2.176)$$

où $\mathcal{F}_{\text{br}}$ désigne la fonction de branche issue d'une réduction de fermeture micro-macro admissible et où $H_\star$ est défini par (2.6).

Fermeture de référence mécanique. La forme mécanique homogène complète retenue au niveau théorique est

$$\mathcal{F}_{\text{HS}}(a) = A_4 a^{-4} + A_3 a^{-3} + A_2 a^{-2} + A_1 a^{-1} + A_0. \quad (2.177)$$

Les secteurs A_1 et A_4 sont respectivement associés au rappel élastique et à la rotation globale. Le secteur A_3 correspond au contenu solitonique localisé. Le secteur A_2 regroupe les contributions cinématiques, géométriques et les éventuelles projections de branche en a^{-2} . Le secteur A_0 est le terme constant de fermeture de branche.

La réduction LO de branche ne requiert pas l'introduction de coefficients de type cosmologique indépendants. Elle s'écrit directement dans le dictionnaire HSMD comme la restriction de (2.177) aux secteurs retenus au rang homogène tardif :

$$\mathcal{F}_{\text{br}}^{\text{LO}}(a) = A_{3,\text{sol}} a^{-3} + A_2^{\text{LO}} a^{-2} + A_1^{\text{LO}} a^{-1} + A_0^{\text{LO}}. \quad (2.178)$$

Le coefficient $A_{3,\text{sol}}$ désigne le rang dilutif stabilisé de la branche. Le coefficient A_2^{LO} regroupe le résidu géométrique ou cinématique conservé au rang a^{-2} . Le coefficient A_1^{LO} désigne le rang

TABLE 2.1 – Statut logique des grandeurs et coefficients utilisés dans la partie théorique HSMD.

Grandeur	Définition ou rôle	Statut logique
$H_\star$	$H_R = c_t/R_0$	échelle cinématique importée de HSM
$\mathcal{B}_{\text{el}}$	(2.17)	coefficient réduit du mode élastique homogène
$\beta_{\text{el}}^{\text{nat}}$	(2.20)	même mode rapporté au rayon naturel
$\mathcal{F}_S(a)$	fonction dynamique d'une réduction S	fermeture théorique
a_{ref}	définition 2.6	point interne de raccord
$H_{\text{ref}}^{(S)}$	$\mathcal{H}_S(a_{\text{ref}})$	taux interne au raccord
$E_S(z_{\text{th}})$	fonction d'expansion normalisée	fonctionnelle de la réduction S
$A_{3,\text{det}}$	(2.39)	projection détaillée du rang a^{-3}
$A_{3,\text{sol}}$	(2.40)	coefficient stabilisé consommé par le dictionnaire minimal
K_{eff}	(2.55)	projection homogène du rang a^{-2}
A_2^{LO}	(2.178)	résidu géométrique ou cinématique conservé au rang a^{-2} dans la réduction LO
A_0^{LO}	(2.178)	terme constant effectif de la réduction LO de branche
$C_{\nu\nu 0}^{\text{rot}}$	(2.179)	spécialisation rotationnelle du terme constant LO
C_4	$-\Pi_\ell a_{\text{rel}}^2$, avec Π_ℓ défini par (2.51)	coefficient structurel de la fermeture détaillée
C_3	$A_{3,\text{det}}$, défini par (2.39)	coefficient structurel de la fermeture détaillée
C_2	K_{eff} , défini par (2.55)	résidu à relier sans double comptage
C_1	$2\mathcal{B}_{\text{el}}a_{\text{rel}}$	coefficient structurel de la fermeture détaillée
C_0	$-\mathcal{B}_{\text{el}} + B_{\text{close}}$	coefficient asymptotique de la fermeture détaillée
Π_ℓ	(2.51)	projection compressive réduite de branche
a_{rel}	point de relâchement	condition de branche
A_{sol}	projection de population localisée	projection solitonique
B_{close}	fermeture globale	terme non dilutif de fermeture
$r_\star$	(2.166)	normalisation de distance, hors dynamique de branche

de rappel élastique effectif conservé par la fermeture homogène LO de branche. Le terme A_0^{LO} désigne le terme constant effectif de branche. Lorsque ce terme constant est porté par la rotation homogène globale, il se spécialise en

$$A_0^{\text{LO}} = C_{\nu\nu 0}^{\text{rot}} = \kappa_{\text{rot}}^{\text{LO}} \left(A_{\text{rot}}^{\text{glob}} \right)^2, \quad (2.179)$$

Dans la fermeture homogène LO de branche, le rang $A_1 a^{-1}$ est conservé explicitement. La notation LO utilisée ici ne signifie donc pas que le rang a^{-1} est abandonné; elle signifie que seuls les secteurs stabilisés de la branche tardive sont conservés, avec $A_4 = 0$ dans la branche principale étudiée.

Fermeture structurelle détaillée. Le réduction avec compression explicite est

$$\mathcal{F}_{\text{det}}(a) = C_4 a^{-4} + C_3 a^{-3} + C_2 a^{-2} + C_1 a^{-1} + C_0. \quad (2.180)$$

Sa branche réelle est soumise à la condition (2.162).

Fonctionnelles de raccord. Pour tout réduction S , on définit

$$E_S(z_{\text{th}}) = \sqrt{\frac{F_S(z_{\text{th}})}{F_S(0)}}, \quad (2.181)$$

puis

$$D_{H,S}^{\text{th}}(z_{\text{th}}) = \frac{c_t}{H_{\text{ref}}^{(S)} E_S(z_{\text{th}})}, \quad (2.182)$$

et, dans le régime quasi plat,

$$D_{M,S}^{\text{th}}(z_{\text{th}}) \simeq \frac{c_t}{H_{\text{ref}}^{(S)}} \int_0^{z_{\text{th}}} \frac{dz'}{E_S(z')}. \quad (2.183)$$

La chaîne logique de la théorie est

$$\begin{aligned} \text{constantes HSM et conditions globales HSMD} &\longrightarrow \text{réduction de fermeture} \\ &\longrightarrow \text{branche dynamique} \\ &\longrightarrow \text{fonctionnelles de raccord} \\ &\longrightarrow \text{rapports et tests externes.} \end{aligned} \quad (2.184)$$

Deuxième partie

Calibrage de branche et confrontations tardives

Chapitre 3

Calibrage observationnel de branche

3.1 Périmètre du calibrage et constantes HSM consommées

Le chapitre théorique a défini l’objet mécanique HSMD : une branche homogène stabilisée de l’hypersphère maillée, décrite par une dynamique effective en puissances du facteur d’échelle interne. Le présent chapitre ne modifie pas cette dynamique théorique. Il calibre les coordonnées de branche qui permettent de confronter cette dynamique aux observables cosmologiques de l’Univers.

Le calibrage porte donc sur les paramètres effectifs de la branche homogène stabilisée, ainsi que sur les échelles observationnelles nécessaires à la comparaison avec les distances et les taux d’expansion mesurés. Il ne recalibre pas les constantes fondamentales de HSM.

Les constantes HSM consommées explicitement dans cette projection observationnelle sont :

$$c_t = c_{\text{lum}} = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}, \quad R_0^{\text{HSM}} = 1.50841 \times 10^{29} \text{ m}. \quad (3.1)$$

La convention observationnelle $c_t = c_{\text{lum}}$ est celle de l’atterrissage HSM, avec

$$c_{\text{lum}} = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1},$$

valeur SI exacte de la vitesse de la lumière dans le vide [2]. Dans HSM, la vitesse tangentielle est définie par $c_t^2 = T/\rho$ [1, éq. `eq:ct2_T_over_rho`], puis identifiée à c_{lum} dans l’atterrissage observationnel.

Le rayon global R_0^{HSM} est la valeur fermée dans HSM par la séparation micro-locale 1-anneau [1, éq. `eq:R0_from_one_ring_Z_micro_symbolic_COMP`]. Lorsque des densités critiques ou des densités de masse équivalentes sont formées, on consomme également la constante gravitationnelle effective identifiée dans HSM,

$$G_{\text{eff}} = G_N = 6.67430 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}, \quad (3.2)$$

dont la valeur numérique est la valeur CODATA/NIST 2022 de la constante newtonienne de gravitation [3]. Dans HSMD, G_{eff} est identifié à cette constante par la fermeture gravitation-like LO de HSM [1, éq. `eq:grav_GN_final_new`], avec la fermeture observationnelle correspondante [1, éq. `eq:OBS_GN_effective_LO_calib_Qr`]. Ces constantes sont des entrées HSM déjà fixées. Elles ne sont pas ajustées dans ce chapitre.

La branche stabilisée consommée par le calibrage est écrite sous la forme

$$F_{\text{HS}}^{\text{stab}}(z) = A_4^{\text{stab}}(1+z)^4 + A_3^{\text{stab}}(1+z)^3 + A_2^{\text{stab}}(1+z)^2 + A_1^{\text{stab}}(1+z) + A_0^{\text{stab}}. \quad (3.3)$$

Cette écriture correspond à la fermeture homogène stabilisée définie dans la partie théorique. Le taux normalisé utilisé dans les observables est

$$E_{\text{HS}}^2(z) = \hat{A}_4(1+z)^4 + \hat{A}_3(1+z)^3 + \hat{A}_2(1+z)^2 + \hat{A}_1(1+z) + \hat{A}_0, \quad (3.4)$$

avec

$$\hat{A}_i := \frac{A_i^{\text{stab}}}{F_{\text{HS}}^{\text{stab}}(0)}, \quad \hat{A}_0 = 1 - \hat{A}_1 - \hat{A}_2 - \hat{A}_3 - \hat{A}_4. \quad (3.5)$$

Dans la suite de ce chapitre, les coefficients notés A_i désignent les coefficients normalisés $\hat{A}_i$ de (3.4). Cette convention locale évite de surcharger les expressions de calibrage.

Le calibrage sélectionne les coordonnées globales de la branche moyenne compatible avec le jeu observationnel retenu. La chaîne logique consommée dans ce chapitre est

$$\boxed{\Theta_{\text{HSM}} + \Theta_{\text{branche}}^{\text{stab}} \longrightarrow E_{\text{HS}}(z) \longrightarrow \text{observables cosmologiques} \longrightarrow \text{coordonnées calibrées de branche.}} \quad (3.6)$$

Les quantités dérivées telles que q_0 , le redshift de transition, l'âge effectif ou le rapport $a_{\text{nat}} = R_{\text{nat}}/R_0^{\text{HSM}}$ ne sont pas injectées comme données de sélection. Elles sont calculées seulement après la sélection de branche.

3.2 Observables utilisées

Le taux de Hubble de branche est

$$H_{\text{br}}(z) = H_0 E_{\text{HS}}(z). \quad (3.7)$$

Les distances BAO sont calculées par

$$I(z) := \int_0^z \frac{dz'}{E_{\text{HS}}(z')}, \quad (3.8)$$

$$\frac{D_H(z)}{r_\star} = \frac{c_t}{H_0 r_\star} \frac{1}{E_{\text{HS}}(z)}, \quad \frac{D_M(z)}{r_\star} = \frac{c_t}{H_0 r_\star} I(z), \quad (3.9)$$

$$\frac{D_V(z)}{r_\star} = \left[z \left(\frac{D_M(z)}{r_\star} \right)^2 \frac{D_H(z)}{r_\star} \right]^{1/3}. \quad (3.10)$$

La combinaison BAO directement contrainte est

$$\alpha_{\text{BAO}} := \frac{c_t}{H_0 r_\star}. \quad (3.11)$$

Après ajustement de H_0 par les chronomètres cosmiques, l'échelle BAO associée est

$$r_\star = \frac{c_t}{\alpha_{\text{BAO}} H_0}. \quad (3.12)$$

Les supernovae Ia sont comparées à la forme de la distance de luminosité

$$\mu_{\text{th}}(z) = 5 \log_{10}[(1+z)I(z)] + \mathcal{M}, \quad (3.13)$$

où $\mathcal{M}$ est le décalage additif de magnitude, profilé analytiquement avec la covariance complète du jeu Pantheon+. Ce canal fixe la forme de $D_L(z)$, sans imposer séparément H_0 lorsque $\mathcal{M}$ est profilé.

Le sous-échantillon SNe consommé par (3.18) est défini par la sélection suivante sur le fichier Pantheon+ :

$$\boxed{\text{calibrator} = 0, \quad z_{\text{HD}} > 0.01.} \quad (3.14)$$

Après application de (3.14), le vecteur SNe contient

$$N_{\text{SN}} = 1580 \quad (3.15)$$

supernovae. La covariance C_{SN} utilisée dans (3.17)–(3.18) est la sous-matrice extraite de la covariance complète Pantheon+ selon cette même sélection et dans le même ordre que le vecteur de modules de distance.

Le jeu observationnel consommé dans cette section comprend les mesures BAO DESI DR2 combinées, le jeu Pantheon+ avec covariance complète, et les chronomètres cosmiques utilisés pour le canal $H(z)$ [4, 5, 6, 7, 8, 9].

3.3 Fonction objectif

Pour le vecteur BAO $\mathbf{y}_{\text{BAO}}$ et sa covariance C_{BAO} , on définit

$$\chi_{\text{BAO}}^2 = (\mathbf{y}_{\text{BAO}}^{\text{th}} - \mathbf{y}_{\text{BAO}}^{\text{obs}})^T C_{\text{BAO}}^{-1} (\mathbf{y}_{\text{BAO}}^{\text{th}} - \mathbf{y}_{\text{BAO}}^{\text{obs}}). \quad (3.16)$$

Pour les supernovae, le décalage $\mathcal{M}$ est éliminé par minimisation analytique. Si $\mathbf{1}$ désigne le vecteur unitaire et $\Delta(\mathcal{M} = 0)$ le résidu avant décalage, alors

$$\mathcal{M}_{\text{prof}} = -\frac{\mathbf{1}^T C_{\text{SN}}^{-1} \Delta(0)}{\mathbf{1}^T C_{\text{SN}}^{-1} \mathbf{1}}. \quad (3.17)$$

La contribution correspondante est

$$\chi_{\text{SN}}^2 = \Delta(\mathcal{M}_{\text{prof}})^T C_{\text{SN}}^{-1} \Delta(\mathcal{M}_{\text{prof}}). \quad (3.18)$$

Pour les chronomètres cosmiques,

$$\chi_{\text{CC}}^2 = \sum_i \left[\frac{H_0 E_{\text{HS}}(z_i) - H_i^{\text{obs}}}{\sigma_{H,i}} \right]^2. \quad (3.19)$$

La fonction objectif totale est

$$\boxed{\chi_{\text{tot}}^2 = \chi_{\text{BAO}}^2 + \chi_{\text{SN}}^2 + \chi_{\text{CC}}^2}. \quad (3.20)$$

La sélection impose en outre la positivité de $E_{\text{HS}}^2(a)$ sur la branche passée sondée par les données.

3.4 Résidu constant effectif et contrainte théorique

Le coefficient constant A_0 consommé par le noyau homogène tardif représente le résidu constant effectif visible par les observables cosmologiques tardives. Dans HSMD, ce résidu n'est pas un paramètre libre dépourvu de structure : il mesure le bilan entre la fermeture globale portée par le canal radial solitonique et le rappel élastique homogène,

$$A_0^{\text{eff}} = B_{\text{close}} - \mathcal{B}_{\text{el}}. \quad (3.21)$$

La fermeture radiale donne

$$B_{\text{close}} = A_{3,\text{sol}}, \quad (3.22)$$

tandis que le rappel élastique homogène s'écrit

$$\mathcal{B}_{\text{el}} = \frac{3}{2a_{\text{nat}}^2}. \quad (3.23)$$

La coordonnée A_1 est reliée à la branche naturelle par

$$A_1 = \frac{3}{a_{\text{nat}}}. \quad (3.24)$$

En éliminant a_{nat} , on obtient la contrainte structurelle

$$\boxed{A_0^{\text{th}} = A_{3,\text{sol}} - \frac{A_1^2}{6}}. \quad (3.25)$$

Le rôle du scan profilé n'est donc pas de remplacer cette contrainte. Il est de la tester : on relâche temporairement A_0 , on réajuste $(H_0, r_*, A_1, A_{3,\text{sol}})$, puis on vérifie où la relation (3.25) est satisfaite.

Le vecteur des coordonnées ajustées dans le scan profilé est

$$\Theta_{\text{cal}} = (\alpha_{\text{BAO}}, H_0, A_1, A_{3,\text{sol}}). \quad (3.26)$$

Pour un scan profilé général, le noyau s'écrit

$$E_{\text{HS}}^2(z) = A_0 + A_1(1+z) + A_2(1+z)^2 + A_{3,\text{sol}}(1+z)^3, \quad (3.27)$$

avec

$$A_2 = 1 - A_0 - A_1 - A_{3,\text{sol}}. \quad (3.28)$$

Pour chaque valeur imposée de A_0 , les paramètres $(H_0, r_*, A_1, A_{3,\text{sol}})$ sont réajustés, et A_2 est ensuite déduit de (3.28).

Le point de compensation exacte

$$A_0 = 0 \quad (3.29)$$

reste un point de contrôle du scan. Le profil central théorique est le point auto-cohérent vérifiant (3.25).

3.5 Point de contrôle à compensation exacte

La minimisation de (3.20) est effectuée sur le noyau profilé (3.27), avec le jeu de coordonnées (3.26). Le recalibrage donne

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha_{\text{BAO}} &= 30.120, \\ H_0 &= 67.7516 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}, \\ r_* &= 146.908 \text{ Mpc}, \\ A_1 &= 1.207331, \\ A_3 &= 0.403711. \end{aligned}} \quad (3.30)$$

Les coefficients normalisés correspondants sont

$$\boxed{\begin{aligned} A_0 &= 0, \\ A_1 &= 1.207331, \\ A_2 &= -0.611042, \\ A_3 &= 0.403711, \\ A_4 &= 0. \end{aligned}} \quad (3.31)$$

Ces valeurs vérifient la normalisation

$$A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 1. \quad (3.32)$$

Le point $A_0 = 0$ est conservé uniquement comme contrôle de compensation exacte du scan profilé. Il ne définit pas la valeur centrale du calibrage : le calibrage fournit une famille admissible en A_0 , et le point représentatif auto-cohérent est $A_0^* \simeq 0.270$. La décomposition des contributions à la fonction objectif est

$$\chi_{\text{BAO}}^2 = 8.10, \quad \chi_{\text{SN}}^2 = 1387.32, \quad \chi_{\text{CC}}^2 = 14.95, \quad (3.33)$$

et

$$\chi_{\text{tot}}^2 = 1410.37. \quad (3.34)$$

3.6 Scan profilé du résidu constant A_0

Afin de tester la contrainte structurelle (3.25), on effectue un scan profilé du résidu constant A_0 . Pour chaque valeur fixée de A_0 , les paramètres $(H_0, r_*, A_1, A_{3,\text{sol}})$ sont réajustés, tandis que A_2 est fixé par la normalisation $E_{\text{HS}}(0) = 1$.

Le scan libre montre que les données autorisent une famille de branches. Le minimum statistique libre se situe autour de $A_0 \simeq 0.225$. La contrainte théorique

$$A_0 = A_{3,\text{sol}} - \frac{A_1^2}{6}$$

sélectionne quant à elle un point auto-cohérent situé à

$$A_0^* \simeq 0.270, \quad \Delta\chi^2 \simeq 0.009.$$

Le scan ne remplace donc pas la dérivation : il la teste, et le point dérivé est statistiquement indiscernable du minimum libre.

TABLE 3.1 – Scan profilé du résidu constant effectif A_0 . Pour chaque ligne, $(H_0, r_*, A_1, A_{3,\text{sol}})$ sont réajustés et $A_2 = 1 - A_0 - A_1 - A_{3,\text{sol}}$. La colonne A_0^{th} donne la valeur dérivée $A_{3,\text{sol}} - A_1^2/6$.

A_0	H_0	A_1	A_2	$A_{3,\text{sol}}$	A_0^{th}	$\Delta\chi^2$
-0.500	67.440	2.161	-1.165	0.503	-0.275	3.374
-0.300	67.567	1.780	-0.944	0.464	-0.064	1.780
-0.100	67.691	1.398	-0.722	0.424	0.098	0.686
0.000	67.752	1.207	-0.611	0.404	0.161	0.330
0.100	67.812	1.016	-0.500	0.384	0.212	0.103
0.225	67.885	0.777	-0.361	0.359	0.258	0.000
0.270	67.910	0.692	-0.312	0.350	0.270	0.009
0.300	67.929	0.634	-0.278	0.344	0.277	0.037
0.500	68.042	0.251	-0.055	0.304	0.293	0.497
0.800	68.204	-0.324	0.280	0.244	0.227	2.191
1.000	68.307	-0.708	0.504	0.204	0.120	3.999

La zone $\Delta\chi^2 < 1$ fournit l'épaisseur observationnelle de la famille de profils admissibles. Sur la grille affichée, elle induit notamment la plage

$$A_0 \in [-0.100, 0.500],$$

qui ne doit pas être lue comme une incertitude symétrique, mais comme une enveloppe de scan. Elle induit aussi une plage de valeurs possibles pour

$$a_{\text{nat}} = \frac{3}{A_1}.$$

Le point auto-cohérent $A_0 = A_0^{\text{th}}$ fournit le représentant central LO de cette famille, pour lequel

$$a_{\text{nat}}^* = \frac{3}{0.692} \simeq 4.34.$$

Ce point n'annule pas l'enveloppe du scan ; il fournit seulement la valeur centrale utilisée lorsque les sorties aval sont affichées comme valeurs LO représentatives.

3.7 Contrôle cosmographique du point $A_0 = 0$

Le paramètre de décélération associé au noyau profilé (3.27) est

$$q(z) = -1 + \frac{1+z}{2E_{\text{HS}}^2(z)} \frac{dE_{\text{HS}}^2}{dz}. \quad (3.35)$$

Pour le point de contrôle $A_0 = 0$, la valeur actuelle est

$$q_0 = -1 + \frac{1}{2} (A_1 + 2A_2 + 3A_3). \quad (3.36)$$

Le redshift de transition z_t est défini par

$$q(z_t) = 0. \quad (3.37)$$

Avec les valeurs de (3.30), on obtient le contrôle cosmographique associé au point $A_0 = 0$

$$\boxed{q_0 = -0.402, \quad z_t = 0.729.} \quad (3.38)$$

L'âge effectif associé à ce noyau compensé est

$$t_0 = 13.585 \text{ Gyr}. \quad (3.39)$$

Ces valeurs ne sont pas les sorties centrales consommées par l'aval. Elles documentent seulement le point de contrôle $A_0 = 0$. Les valeurs centrales LO sont affichées dans la partie prédictive au point auto-cohérent $A_0^* \simeq 0.270$, avec l'enveloppe de scan associée à la famille admissible en A_0 .

3.8 Calibration directionnelle auxiliaire

Le calibrage homogène de fond ne consomme pas les canaux directionnels. Les sorties directionnelles du chapitre de prédictions utilisent cependant un petit jeu auxiliaire de grandeurs de canal, distinct des constantes HSM et distinct des coordonnées homogènes de la branche fermée tardive.

L'amplitude rotationnelle globale utilisée dans ces canaux est retracée depuis un calibrage auxiliaire de forme BAO, antérieur au calcul directionnel local. Ce calibrage porte sur le coefficient dilutif effectif de la branche homogène écrite sous la forme

$$E^2(z) = \Omega_{\text{eff}}^{\text{shape}} (1+z)^3 + \Omega_{\mathcal{K}}^{\text{shape}} (1+z)^2 + C_{\nu\nu 0}^{\text{shape}}. \quad (3.40)$$

Dans la branche plate auxiliaire,

$$\Omega_{\mathcal{K}}^{\text{shape}} = 0, \quad E(0)^2 = 1, \quad (3.41)$$

d'où

$$C_{\nu\nu 0}^{\text{shape}} = 1 - \Omega_{\text{eff}}^{\text{shape}}. \quad (3.42)$$

Le calibrage auxiliaire BAO shape-only de la branche plate réduite fournit l'estimateur de forme

$$\Omega_{\text{eff}}^{\text{shape,fit}} = 0.2975 \pm 0.008. \quad (3.43)$$

Dans les chaînes directionnelles LO, on consomme la valeur centrale arrondie

$$\Omega_{\text{eff}}^{\text{shape}} = 0.30. \quad (3.44)$$

Cette grandeur a le statut d'une calibration auxiliaire de forme BAO. Elle n'est pas identifiée aux coefficients du noyau homogène complet $(A_0, A_1, A_2, A_3, A_4)$, qui sont ajustés dans une fermeture distincte. Les sorties aval qui en dépendent doivent donc être lues comme des valeurs centrales LO, tant que la covariance complète du calibrage auxiliaire n'est pas propagée.

On en déduit, par la règle de somme de la branche plate auxiliaire,

$$C_{\nu\nu 0}^{\text{shape}} = 1 - \Omega_{\text{eff}}^{\text{shape}} = 0.70. \quad (3.45)$$

La conversion du terme stationnaire de fond en amplitude rotationnelle globale utilise le lemme rotationnel LO de la Partie théorique, (2.60)–(2.63). On définit

$$C_{\nu\nu 0}^{\text{shape}} = \kappa_{\text{rot}}^{\text{LO}} \left(A_{\text{rot}}^{\text{glob}} \right)^2, \quad A_{\text{rot}}^{\text{glob}} := \frac{\Omega_{\text{HS}} R_0^{\text{HSM}}}{c_{\text{lum}}}. \quad (3.46)$$

Le coefficient $\kappa_{\text{rot}}^{\text{LO}}$ n'est donc pas calibré dans cette section : il est fixé géométriquement par la moyenne inertielle exacte sur $\mathbb{S}^3$, calculée en (2.59)–(2.60). Le qualificatif LO porte sur la troncature au rang quadratique de la vitesse rotationnelle, non sur la valeur géométrique 3/8 elle-même :

$$\kappa_{\text{rot}}^{\text{LO}} = \frac{3}{8}. \quad (3.47)$$

Ainsi

$$A_{\text{rot}}^{\text{glob}} = \sqrt{\frac{C_{\nu\nu 0}^{\text{shape}}}{\kappa_{\text{rot}}^{\text{LO}}}} = \sqrt{\frac{8}{3} C_{\nu\nu 0}^{\text{shape}}}. \quad (3.48)$$

Avec (3.45), on obtient

$$\boxed{A_{\text{rot}}^{\text{glob}} = \sqrt{\frac{8}{3}} \times 0.70 \simeq 1.366.} \quad (3.49)$$

L'incertitude statistique de forme associée à (3.43), propagée au seul rang de cette chaîne auxiliaire, donne

$$\sigma\left(A_{\text{rot}}^{\text{glob}}\right) \simeq \frac{4}{3A_{\text{rot}}^{\text{glob}}} \sigma\left(\Omega_{\text{eff}}^{\text{shape,fit}}\right) \simeq 0.008. \quad (3.50)$$

Cette incertitude ne remplace pas une propagation complète vers les canaux PMNS, CMB, HSC et H_0 local ; elle fixe seulement l'échelle statistique du calibrage auxiliaire de forme.

La chaîne consommée par les sorties directionnelles est donc

$$\Omega_{\text{eff}}^{\text{shape}} = 0.30, \quad C_{\nu\nu 0}^{\text{shape}} = 0.70, \quad A_{\text{rot}}^{\text{glob}} \simeq 1.366. \quad (3.51)$$

Ces valeurs sont les valeurs centrales LO consommées par les canaux directionnels. Elles ne constituent pas une propagation complète des incertitudes du calibrage auxiliaire vers les sorties PMNS, CMB, HSC et H_0 local.

Le coefficient $\Omega_{\text{eff}}^{\text{shape}}$ ne doit pas être identifié au coefficient $A_{3,\text{sol}}$ du fit complet fermé. Le premier est un estimateur auxiliaire de forme BAO dans une branche plate réduite ($\Omega_{\mathcal{K}}^{\text{shape}} = 0$, $C_{\nu\nu 0}^{\text{shape}} = 1 - \Omega_{\text{eff}}^{\text{shape}}$). Le second appartient au noyau stabilisé complet $(A_0, A_1, A_2, A_3, A_4)$, où les rangs $a^0, a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}$ sont ajustés conjointement. Leur proximité numérique indique une cohérence de rang a^{-3} , mais ils ne sont pas consommés comme une seule et même grandeur.

Le contraste rotationnel anisotrope consommé par les sorties locales est déduit de la définition théorique de D_{rot} :

$$D_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \left(A_{\text{rot}}^{\text{glob}} \right)^2. \quad (3.52)$$

Avec (3.49), on obtient

$$D_{\text{rot}} = 0.933. \quad (3.53)$$

La latitude effective de l'observateur est fixée par le canal de phase PMNS, selon la fermeture théorique (2.152). Au rang utilisé ici, la phase de Dirac consommée pour l'encadré central est traitée comme un point de lecture fiduciel de la projection locale de la rotation globale :

$$\delta_{\text{CP}}^{\text{ref}} = 2\pi A_{\text{rot}}^{\text{glob}} \cos \chi_{\text{obs}}. \quad (3.54)$$

Cette relation donne

$$\cos \chi_{\text{obs}} = \frac{\delta_{\text{CP}}^{\text{ref}}}{2\pi A_{\text{rot}}^{\text{glob}}}. \quad (3.55)$$

Pour les encadrés directionnels centraux, on consomme le point de lecture fiduciel

$$\delta_{\text{CP}}^{\text{ref}} = 197^\circ, \quad A_{\text{rot}}^{\text{glob}} = 1.366.$$

Ce point ne doit pas être identifié à une valeur centrale unique de NuFIT 6.0 [10]. Il sert de point fiduciel interne pour les valeurs centrales LO ; la dépendance à la valeur consommée de δ_{CP} est documentée dans la table de sensibilité de la partie prédictive. On obtient alors la valeur centrale LO

$$\boxed{\chi_{\text{obs}} \simeq 66.4^\circ, \quad \sin \chi_{\text{obs}} \simeq 0.916, \quad \cos \chi_{\text{obs}} \simeq 0.400.} \quad (3.56)$$

La variation induite par le choix du point de lecture de δ_{CP} et par $A_{\text{rot}}^{\text{glob}}$ n'est pas propagée dans cet encadré ; la sensibilité à δ_{CP} est documentée dans la partie prédictive, et la propagation directionnelle complète est laissée aux tests directionnels ultérieurs.

La relation (3.54) ne calibre pas la valeur locale de H_0 . Elle ferme seulement la projection angulaire $\cos \chi_{\text{obs}}$. La valeur locale de H_0 est ensuite une sortie dérivée de cette projection.

Pour un observateur situé à la latitude effective χ_{obs} relativement au plan de rotation, le rayon projeté dans ce plan est

$$R_{\perp} = R_0 \cos \chi_{\text{obs}}. \quad (3.57)$$

Le facteur géométrique local qui projette le terme quadratique rotationnel est donc

$$M_{\text{loc}} = \left(\frac{R_{\perp}}{R_0} \right)^2 = \cos^2 \chi_{\text{obs}}. \quad (3.58)$$

Au rang LO, la lecture locale de H_0 utilise la prescription effective définie en théorie par (2.144). La moyenne globale est portée par la branche calibrée $H_{\text{ref}}^{\text{cal}}$, tandis que la correction locale consomme la projection quadratique $\cos^2 \chi_{\text{obs}}$. La correction primaire porte donc sur le taux au carré :

$$\frac{\left(H_0^{\text{loc,pred}} \right)^2}{\left(H_{\text{ref}}^{\text{cal}} \right)^2} = 1 + D_{\text{rot}} M_{\text{loc}} = 1 + D_{\text{rot}} \cos^2 \chi_{\text{obs}}. \quad (3.59)$$

Cette relation est une prescription effective LO de lecture locale, et non la reconstruction complète d'un estimateur directionnel de survey. Le passage de H^2 à H donne alors

$$\boxed{H_0^{\text{loc,pred}} = H_{\text{ref}}^{\text{cal}} \sqrt{1 + D_{\text{rot}} \cos^2 \chi_{\text{obs}}}.} \quad (3.60)$$

Au premier ordre en $D_{\text{rot}} \cos^2 \chi_{\text{obs}}$,

$$\frac{H_0^{\text{loc,pred}}}{H_{\text{ref}}^{\text{cal}}} - 1 \simeq \frac{D_{\text{rot}}}{2} \cos^2 \chi_{\text{obs}}. \quad (3.61)$$

Le facteur $1/2$ dans la correction relative de H_0 n'est donc pas un coefficient ajusté : il vient du passage de la correction quadratique sur H^2 à la correction linéarisée sur H .

Numériquement, avec Avec les valeurs centrales LO

$$H_{\text{ref}}^{\text{cal}} = 67.91 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}, \quad D_{\text{rot}} = 0.933, \quad \chi_{\text{obs}} \simeq 66.4^\circ,$$

on obtient

$$M_{\text{loc}} = \cos^2 \chi_{\text{obs}} \simeq 0.160, \quad (3.62)$$

puis

$$\boxed{H_0^{\text{loc,pred}} \simeq 72.8 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}}. \quad (3.63)$$

Ces deux valeurs sont des sorties centrales LO de la projection locale. Elles ne contiennent pas la propagation complète des incertitudes directionnelles.

La valeur locale apparente du canal SH0ES/Pantheon+ [11],

$$H_0^{\text{loc,obs}} = 73.04 \pm 1.04 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1},$$

est ainsi compatible avec la sortie de la projection quadratique locale, sans consommer la valeur SH0ES/Pantheon+ dans la fermeture angulaire.

Le statut logique est le suivant. Le canal PMNS fournit, sous l'hypothèse rotationnelle HSMD, une projection $\cos \chi_{\text{obs}}$. Cette projection est ensuite portée dans la géométrie locale par $R_{\perp} = R_0 \cos \chi_{\text{obs}}$, ce qui donne $M_{\text{loc}} = \cos^2 \chi_{\text{obs}}$. La comparaison de $H_0^{\text{loc,pred}}$ à la valeur locale apparente constitue alors un test croisé de la fermeture PMNS-rotation.

Canal	Grandeur fixée ou prédite	Statut
PMNS	$\chi_{\text{obs}} \simeq 66.4^\circ$	valeur centrale LO de calibration angulaire
Rotation globale	$D_{\text{rot}} = 0.933$	valeur centrale LO de projection quadratique
Projection locale	$M_{\text{loc}} = \cos^2 \chi_{\text{obs}} \simeq 0.160$	valeur centrale LO de géométrie de latitude
Canal local H_0	$H_0^{\text{loc,pred}} \simeq 72.8 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$	sortie centrale LO dérivée

TABLE 3.2 – Fermeture locale dérivée. PMNS fixe la latitude effective, la rotation globale fixe D_{rot} , et la projection $R_{\perp}/R_0 = \cos \chi_{\text{obs}}$ détermine M_{loc} .

Les confrontations directionnelles associées à cette projection sont traitées dans le chapitre de prédictions.

3.9 Table de traçabilité numérique

Élément	Statut
Jeu BAO DESI DR2	CALIBRÉ
Jeu Pantheon+ SNe Ia	CALIBRÉ
Chronomètres cosmiques	CALIBRÉ
$H_0 = 67.7516 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$	POINT DE CONTRÔLE $A_0 = 0$
$r_* = 146.908 \text{ Mpc}$	POINT DE CONTRÔLE $A_0 = 0$
$A_0 = 0$	POINT DE COMPENSATION EXACTE TESTÉ
$A_0 \simeq 0.225$	MINIMUM STATISTIQUE LIBRE DU SCAN
$A_0^* \simeq 0.270$	POINT REPRÉSENTATIF AUTO-COHÉRENT
$A_1 = 1.207331$	POINT DE CONTRÔLE $A_0 = 0$
$A_2 = -0.611042$	POINT DE CONTRÔLE $A_0 = 0$, TRACÉ DEPUIS NORMALISATION
$A_3 = 0.403711$	POINT DE CONTRÔLE $A_0 = 0$
$q_0 = -0.402$	CONTRÔLE COSMOGRAPHIQUE AU POINT $A_0 = 0$
$z_t = 0.729$	CONTRÔLE COSMOGRAPHIQUE AU POINT $A_0 = 0$
$t_0 = 13.585 \text{ Gyr}$	CONTRÔLE COSMOGRAPHIQUE AU POINT $A_0 = 0$
$\Omega_{\text{eff}}^{\text{shape,fit}} = 0.2975 \pm 0.008$	CALIBRATION AUXILIAIRE BAO SHAPE-ONLY REPRODUCTIBLE
$\Omega_{\text{eff}}^{\text{shape}} = 0.30$	VALEUR LO ARRONDIE CONSOMMÉE PAR LES CANAUX DIRECTS
$C_{\nu\nu 0}^{\text{shape}} = 0.70$	TRACÉ depuis $\Omega_{\text{eff}}^{\text{shape}}$
$A_{\text{rot}}^{\text{glob}} \simeq 1.366$	TRACÉ depuis la calibration auxiliaire BAO shape-only
$D_{\text{rot}} = 0.933$	TRACÉ depuis $A_{\text{rot}}^{\text{glob}}$
$\chi_{\text{obs}} \simeq 66.4^\circ$	VALEUR CENTRALE LO PMNS ; INCERTITUDE DIRECTIONNELLE
$M_{\text{loc}} \simeq 0.160$	VALEUR CENTRALE LO DE LA PROJECTION $\cos^2 \chi_{\text{obs}}$
$H_0^{\text{loc,pred}} \simeq 72.8 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$	SORTIE CENTRALE LO DE LA PROJECTION QUADRATIQUE LOCALE

3.10 Conclusion

Le calibrage tardif ne fixe pas une valeur unique du résidu constant effectif A_0 . Il fournit une famille admissible de profils stabilisés, correspondant à différents bilans entre rappel homogène et fermeture globale. Sur la grille affichée, la zone $\Delta\chi^2 < 1$ donne l’enveloppe de scan

$$A_0 \in [-0.100, 0.500].$$

Cette enveloppe n’est pas une incertitude symétrique et ne doit pas être écrite avec un symbole $\pm$.

Le point

$$A_0 = 0$$

est seulement le contrôle de compensation exacte. Il est conservé pour tracer la limite où le résidu constant effectif s’annule, mais il n’est pas la valeur centrale du calibrage. Le minimum statistique libre du scan se situe vers

$$A_0 \simeq 0.225.$$

La contrainte structurelle

$$A_0 = A_{3,\text{sol}} - \frac{A_1^2}{6}$$

sélectionne quant à elle le point auto-cohérent

$$A_0^* \simeq 0.270, \quad \Delta\chi^2 \simeq 0.009.$$

Ce point est statistiquement indiscernable du minimum libre et fournit le point représentatif utilisé pour les valeurs centrales LO dans la partie prédictive. Les sorties aval dépendantes du noyau E_{HS} doivent donc être lues comme valeurs centrales au point A_0^* , accompagnées de l’enveloppe de scan admissible en A_0 .

Troisième partie

Sorties dérivées et prédictions

Chapitre 4

Prédictions observables post-calibrage

4.1 Périmètre post-calibrage

Le calibrage tardif profile le résidu constant effectif A_0 . Ce résidu n'est pas un paramètre libre dépourvu de structure : dans HSMD, il mesure le bilan entre la fermeture solitonique radiale et le rappel élastique homogène,

$$A_0 = B_{\text{close}} - \mathcal{B}_{\text{el}}. \quad (4.1)$$

La fermeture radiale donne

$$B_{\text{close}} = A_{3,\text{sol}}, \quad (4.2)$$

tandis que le rappel élastique homogène s'écrit

$$\mathcal{B}_{\text{el}} = \frac{3}{2a_{\text{nat}}^2}. \quad (4.3)$$

Avec

$$A_1 = \frac{3}{a_{\text{nat}}}, \quad (4.4)$$

on obtient la contrainte théorique

$$A_0^{\text{th}} = A_{3,\text{sol}} - \frac{A_1^2}{6}. \quad (4.5)$$

Le scan profilé de A_0 est donc utilisé comme test de cette contrainte : pour chaque valeur imposée de A_0 , les paramètres $(H_0, r_\star, A_1, A_{3,\text{sol}})$ sont réajustés, puis on vérifie si la relation (4.5) est satisfaite. Le point auto-cohérent, défini par $A_0 = A_0^{\text{th}}$, se situe à

$$A_0^\star \simeq 0.270, \quad A_1^\star \simeq 0.692, \quad A_{3,\text{sol}}^\star \simeq 0.350, \quad H_0^\star \simeq 67.91 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}. \quad (4.6)$$

Ce profil est quasiment confondu avec le minimum libre du scan :

$$\Delta\chi^2 \simeq 0.009.$$

Il constitue le point représentatif auto-cohérent utilisé pour les valeurs centrales LO. Il ne réduit pas le calibrage à une branche unique : les points du scan en A_0 définissent une enveloppe admissible de profils stabilisés.

Dans la suite, une grandeur aval qui dépend de $E_{\text{stab}}(z)$, donc des coefficients A_i^{stab} , doit être lue sous deux niveaux :

valeur centrale au point A_0^* et enveloppe de scan sur $\Delta\chi^2 < 1$.

Les enveloppes sont écrites sous forme d'intervalles $[x_{\min}, x_{\max}]$. Elles ne sont pas des incertitudes statistiques symétriques et ne doivent pas être notées avec un symbole $\pm$.

Le scan libre de A_0 induit par ailleurs une plage de valeurs possibles de

$$a_{\text{nat}} = \frac{3}{A_1}.$$

La valeur centrale LO

$$a_{\text{nat}}^* = \frac{3}{A_1^*} \simeq 4.34$$

correspond au point auto-cohérent (4.5).

Dans le régime stabilisé, le noyau consommé dans ce chapitre est

$$E_{\text{stab}}^2(z) = A_4^{\text{stab}}(1+z)^4 + A_{3,\text{sol}}^{\text{stab}}(1+z)^3 + A_2^{\text{stab}}(1+z)^2 + A_1^{\text{stab}}(1+z) + A_0^{\text{stab}}. \quad (4.7)$$

La normalisation actuelle impose

$$A_0^{\text{stab}} = 1 - A_1^{\text{stab}} - A_2^{\text{stab}} - A_{3,\text{sol}}^{\text{stab}} - A_4^{\text{stab}}. \quad (4.8)$$

Au point représentatif auto-cohérent, le reliquat stabilisé du secteur a^{-4} n'est pas requis par le calibrage :

$$A_4^{\text{stab}} = 0. \quad (4.9)$$

Cette relation ne constitue pas une annulation théorique du secteur a^{-4} . Elle signifie seulement que son reliquat tardif indépendant est négligeable dans le régime stabilisé confronté aux observables de fond.

Au point représentatif auto-cohérent, on consomme

$$H_{\text{ref}}^{\text{cal}} \simeq 67.91 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}, \quad r_{\star}^{\text{cal}} \simeq 146.9 \text{ Mpc}. \quad (4.10)$$

et

$$A_0^{\text{stab}} = 0.270, \quad A_1^{\text{stab}} = 0.692, \quad A_2^{\text{stab}} = -0.312, \quad A_{3,\text{sol}}^{\text{stab}} = 0.350, \quad A_4^{\text{stab}} = 0. \quad (4.11)$$

Ces valeurs vérifient

$$A_0^{\text{stab}} + A_1^{\text{stab}} + A_2^{\text{stab}} + A_{3,\text{sol}}^{\text{stab}} + A_4^{\text{stab}} \simeq 1.$$

Elles vérifient également

$$A_0^{\text{stab}} \simeq A_{3,\text{sol}}^{\text{stab}} - \frac{(A_1^{\text{stab}})^2}{6}.$$

Le point $A_0 = 0$ et le point libre de meilleur ajustement $A_0 \simeq 0.225$ sont conservés comme contrôles du scan. Ils montrent que la contrainte théorique tombe dans la zone statistiquement admissible du calibrage, et pratiquement au minimum du scan.

La coordonnée stabilisée $A_{3,\text{sol}}^{\text{stab}} = 0.350$ ne doit pas être confondue avec l'estimateur auxiliaire $\Omega_{\text{eff}}^{\text{shape}} \simeq 0.30$ utilisé dans le calibrage shape-only. Le premier appartient au noyau complet stabilisé (A_0, A_1, A_2, A_3, A_4), tandis que le second est un estimateur de forme BAO dans une branche plate réduite.

La distance radiale de Hubble, la distance transverse quasi plate et la distance volumique sont

$$D_H(z) = \frac{c_{\text{lum}}}{H_{\text{stab}}(z)}, \quad (4.12)$$

$$D_M(z) \simeq c_{\text{lum}} \int_0^z \frac{dz'}{H_{\text{stab}}(z')}, \quad (4.13)$$

$$D_V(z) = \left[z D_M^2(z) D_H(z) \right]^{1/3}. \quad (4.14)$$

Les mêmes distances définissent les rapports BAO usuels,

$$\frac{D_H(z)}{r_{\star}^{\text{cal}}}, \quad \frac{D_M(z)}{r_{\star}^{\text{cal}}}, \quad \frac{D_V(z)}{r_{\star}^{\text{cal}}}.$$

Ces rapports ne sont pas présentés ici comme des prédictions indépendantes : le canal BAO intervient déjà dans le calibrage global qui fixe $r_{\star}^{\text{cal}}$, $H_{\text{ref}}^{\text{cal}}$ et les coefficients A_i^{stab} . Leur confrontation observationnelle relève donc du chapitre de calibrage.

4.2 Quantités cinématiques dérivées

Le paramètre de décélération de la branche stabilisée est défini par

$$q(z) = -1 + (1+z) \frac{d \ln H_{\text{stab}}}{dz}. \quad (4.15)$$

En injectant (4.7), on obtient

$$q(z) = -1 + \frac{4A_4^{\text{stab}}(1+z)^4 + 3A_{3,\text{sol}}^{\text{stab}}(1+z)^3 + 2A_2^{\text{stab}}(1+z)^2 + A_1^{\text{stab}}(1+z)}{2E_{\text{stab}}^2(z)}. \quad (4.16)$$

Au point représentatif auto-cohérent (4.11), il vient

$$q_{0,\star}^{\text{HSMD}} = q(0)|_{A_0^{\star}} \simeq -0.441. \quad (4.17)$$

Le redshift de transition, défini par $q(z_t) = 0$, vérifie

$$4A_4^{\text{stab}}(1+z_t)^4 + 3A_{3,\text{sol}}^{\text{stab}}(1+z_t)^3 + 2A_2^{\text{stab}}(1+z_t)^2 + A_1^{\text{stab}}(1+z_t) = 2E_{\text{stab}}^2(z_t). \quad (4.18)$$

Avec (4.11), on obtient la valeur centrale LO

$$z_{t,\star}^{\text{HSMD}} \simeq 0.699. \quad (4.19)$$

L'âge effectif associé au régime stabilisé est donné par

$$t_0^{\text{HSMD}} = \frac{1}{H_{\text{ref}}^{\text{cal}}} \int_0^1 \frac{da}{a E_{\text{stab}}(a)}. \quad (4.20)$$

Avec (4.10) et (4.11), cette intégrale donne la valeur centrale LO

$$t_{0,\star}^{\text{HSMD}} \simeq 13.642 \text{ Gyr}. \quad (4.21)$$

Le scan profilé de A_0 induit une enveloppe de valeurs pour toute quantité qui dépend du noyau E_{stab} . Sur la grille de calibrage appartenant à $\Delta\chi^2 < 1$, on obtient l'enveloppe suivante :

Les valeurs cinématiques principales du présent chapitre sont donc des valeurs centrales LO au point auto-cohérent $A_0^{\star}$, accompagnées de l'enveloppe de scan lorsque la grandeur dépend du noyau E_{stab} .

TABLE 4.1 – Enveloppe cinématique induite par le scan profilé de A_0 . Les crochets indiquent une enveloppe de scan, et non une incertitude statistique symétrique. La ligne A_0^* fournit la valeur centrale LO utilisée dans le texte.

Grandeur	Valeur centrale au point A_0^*	Enveloppe $\Delta\chi^2 < 1$
A_0	0.270	$[-0.100, 0.500]$
$H_{\text{ref}}^{\text{cal}} [\text{km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}]$	67.910	$[67.691, 68.042]$
A_1	0.692	$[0.251, 1.398]$
A_2	-0.312	$[-0.722, -0.055]$
$A_{3,\text{sol}}$	0.350	$[0.304, 0.424]$
$a_{\text{nat}} = 3/A_1$	4.34	$[2.15, 11.95]$
q_0	-0.441	$[-0.474, -0.387]$
z_t	0.699	$[0.671, 0.740]$
$t_0 [\text{Gyr}]$	13.642	$[13.562, 13.695]$

L'intégrale (4.20) ne doit pas être interprétée comme une résolution complète de la phase initiale de mise en place du régime stabilisé. Elle donne l'âge associé au prolongement effectif du noyau stabilisé jusqu'aux très petits facteurs d'échelle.

Si l'on ne commence l'intégration qu'après l'entrée effective dans le régime stabilisé, par exemple à partir d'un facteur d'échelle de l'ordre de 10^{-3} , l'âge obtenu est

$$t_0 - t_{\text{stab}} = \frac{1}{H_{\text{ref}}^{\text{cal}}} \int_{10^{-3}}^1 \frac{da}{a E_{\text{stab}}(a)}. \quad (4.22)$$

La différence avec (4.20) est inférieure au Myr pour la branche auto-cohérente. Ainsi, l'estimation tardive $t_0^{\text{HSM}} \simeq 13.642 \text{ Gyr}$ est insensible à la coupure précise utilisée pour marquer l'entrée dans le régime stabilisé, tant que celle-ci reste très antérieure aux échelles observationnelles tardives.

4.2.1 Détermination observationnelle de l'axe spin

La branche moyenne fixe les grandeurs de fond. Les observables directionnelles testent ensuite la projection locale des résidus rotationnels, sans recalibrer les coordonnées globales de branche. Pour déterminer l'axe directionnel utilisé dans la suite, on privilégie un canal spin, car l'observable est signée et ne passe pas par une reconstruction intégrée de distance.

Le canal utilisé repose sur des objets issus du programme Hyper Suprime-Cam Subaru Strategic Program et sur une classification externe de chiralité galactique [12, 13]. Une analyse indépendante récente du même type de données ne trouve pas de preuve significative d'anisotropie de spin [14]. Le canal HSC/spin est donc conservé ici comme confrontation directionnelle aval, et non comme calibration du fond ou de la rotation globale.

On considère un catalogue d'objets disposant d'une direction de visée $\hat{\mathbf{s}}_i$, d'un redshift z_i , et d'une orientation de rotation discrète

$$A_i \in \{-1, +1\}.$$

Dans une fenêtre de redshift donnée, on ajuste

$$A_i = a (\hat{\mathbf{s}}_i \cdot \hat{\mathbf{N}}) + b, \quad (4.23)$$

où $\hat{\mathbf{N}}$ est l'axe directionnel recherché et où b absorbe un éventuel déséquilibre global de classification.

Le scan en fenêtres de redshift met en évidence une zone active dans

$$0.10 \leq z < 0.16,$$

contenant $N \simeq 4.7 \times 10^3$ objets. Cette zone n'est pas définie par l'accord d'amplitude avec HSMD, mais par la détection libre d'un axe spin stable. Dans cette fenêtre, l'ajustement libre donne un axe voisin de

$$(\text{RA}, \text{Dec}) \simeq (293.1^\circ, -61.9^\circ).$$

On retient donc, pour la mesure d'amplitude sur axe fixé, l'axe spin

$$\boxed{(\text{RA}, \text{Dec})_{\text{spin}} \simeq (293^\circ, -62^\circ)}. \quad (4.24)$$

Cet axe est une valeur centrale arrondie du diagnostic directionnel HSC. Son incertitude directionnelle n'est pas propagée dans les sorties dérivées.

Sur le même échantillon, l'axe fixé

$$(\text{RA}, \text{Dec}) = (293.45^\circ, -61.85^\circ)$$

donne la pente brute locale

$$a_{\text{brute}} = 0.2804 \pm 0.0551, \quad Z_{\text{loc}} \simeq 5.1. \quad (4.25)$$

La quantité Z_{loc} est une significativité locale, évaluée dans la fenêtre active et sur l'axe fixé. Elle n'est pas corrigée du facteur look-elsewhere associé à la recherche de fenêtre, d'axe et de sélection en redshift. Elle ne doit donc pas être lue comme une détection globale du catalogue. Cette pente brute sert seulement de diagnostic local de présence du signal sur l'axe fixé. Elle n'est pas utilisée pour calibrer χ_{obs} , ni pour déterminer H_0^{loc} .

Le canal HSC est traité comme troisième confrontation aval faible. Il ne fournit pas une détection globale du catalogue : les analyses globales disponibles sont compatibles avec l'absence de signal net. La confrontation retenue est plus modeste. Elle porte sur la fenêtre active où l'axe spin est détecté librement, puis sur la pente brute mesurée sur l'axe fixé. L'observable comparée à la prédiction HSMD est donc la sortie locale de l'estimateur HSC appliqué à cette fenêtre et à cet axe,

$$a_{\text{act}} = 0.2804 \pm 0.0551.$$

Un contrôle injection-récupération appliqué à la même fenêtre active, au même axe fixé et au même estimateur donne, pour l'amplitude injectée $\beta_{\text{inj}} = 0.344$,

$$a_{\text{rec}} = 0.342955, \quad B_{\text{rec}} = \frac{a_{\text{rec}}}{\beta_{\text{inj}}} = 0.996963.$$

Dans une injection binaire stochastique de même espérance, on obtient

$$a_{\text{rec}} = 0.342955 \pm 0.055686.$$

La réponse de l'estimateur est donc compatible avec l'unité pour cette configuration, ce qui justifie de confronter la prédiction HSMD à la pente brute active. Le canal HSC ne fixe ni χ_{obs} , ni l'amplitude locale consommée dans la correction de H_0 . Il teste seulement, en aval, la compatibilité directionnelle et la pente active du signal de chiralité.

4.3 Vitesse de rotation de l'hypersphère et position de l'observateur

L'objectif de cette section est de rassembler les grandeurs rotationnelles utilisées par les confrontations directionnelles observables. On distingue l'axe projeté sur le ciel, la vitesse angulaire globale de l'hypersphère et la position angulaire effective de notre domaine d'observation dans l'hypersphère. Ces grandeurs ne définissent pas un second paramètre fondamental d'expansion. La valeur locale apparente de H_0 est dérivée plus bas de la projection quadratique

locale de la rotation globale, tandis que le canal HSC/spin est traité comme une confrontation directionnelle sur pente brute dans la fenêtre active où l'axe spin est détecté.

Le canal HSC/spin met en évidence, dans une bande de redshift stable, un axe directionnel projeté sur le ciel,

$$\hat{\mathbf{N}}_{\text{spin}}^{\text{HSC}} \simeq (293^\circ, -62^\circ), \quad (4.26)$$

comme indiqué en (4.24). Cet axe n'est pas utilisé comme calibrage de branche. Il fournit une confrontation directionnelle : HSM prédit qu'un canal de chiralité/spin ne doit pas être isotrope, mais doit présenter une structure axiale dépendante du redshift.

On introduit ensuite l'amplitude rotationnelle globale normalisée

$$A_{\text{rot}}^{\text{glob}} := \frac{\Omega_{\text{HS}} R_0^{\text{HSM}}}{c_{\text{lum}}}. \quad (4.27)$$

Dans les canaux directionnels, cette grandeur est consommée comme coordonnée auxiliaire calibrée en (3.49) :

$$A_{\text{rot}}^{\text{glob}} \simeq 1.366. \quad (4.28)$$

Cette grandeur ne désigne pas une distance BAO. Elle normalise l'amplitude de rotation globale de l'hypersphère dans les canaux directionnels. Toute grandeur rotationnelle aval est recalculée depuis $A_{\text{rot}}^{\text{glob}}$, sans introduire de coefficient de fermeture rotationnelle indépendant.

La vitesse angulaire globale correspondante est donc

$$\Omega_{\text{HS}} = A_{\text{rot}}^{\text{glob}} \frac{c_{\text{lum}}}{R_0^{\text{HSM}}}. \quad (4.29)$$

Avec la valeur calibrée $A_{\text{rot}}^{\text{glob}} = 1.366$, et avec les constantes HSM rappelées au calibrage en (3.1),

$$R_0^{\text{HSM}} = 1.50841 \times 10^{29} \text{ m}, \quad c_{\text{lum}} = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m s}^{-1},$$

on obtient

$$\boxed{\Omega_{\text{HS}} \simeq 2.72 \times 10^{-21} \text{ s}^{-1}.} \quad (4.30)$$

La vitesse rotationnelle globale associée au rayon hypersphérique vaut alors

$$v_{\text{rot}}^{\text{glob}} = \Omega_{\text{HS}} R_0^{\text{HSM}} = A_{\text{rot}}^{\text{glob}} c_{\text{lum}} \simeq 1.366 c_{\text{lum}} \simeq 4.10 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}. \quad (4.31)$$

Cette vitesse n'est pas une vitesse locale de matière dans un espace plat et ne définit pas une vitesse de propagation de signal. Elle caractérise la rotation globale de la géométrie hypersphérique dans le plongement, c'est-à-dire une coordonnée de fond normalisée par R_0^{HSM} . Les observables locales ne consomment pas directement $v_{\text{rot}}^{\text{glob}}$, mais des projections de l'amplitude rotationnelle globale sur l'axe et sur la position de notre domaine d'observation. Il n'y a donc pas de contrainte causale locale de type $v_{\text{rot}}^{\text{glob}} < c_{\text{lum}}$ sur cette grandeur globale.

La position angulaire effective de notre domaine d'observation relativement à l'axe rotationnel global est héritée du calibrage PMNS établi dans le chapitre de calibrage, (3.54)–(3.56). Pour garder une chaîne locale de renvois dans ce chapitre, on rappelle la valeur calibrée :

$$\boxed{\chi_{\text{obs}} \simeq 66.4^\circ, \quad \sin \chi_{\text{obs}} \simeq 0.916, \quad \cos \chi_{\text{obs}} \simeq 0.400.} \quad (4.32)$$

Avant d'utiliser le canal PMNS comme fermeture rotationnelle, il faut distinguer deux niveaux. Dans HSM, les angles de mélange PMNS θ_{12} , θ_{13} et θ_{23} relèvent de la géométrie interne réelle des solutions neutrino-like. Au rang où cette géométrie interne est traitée sans orientation globale dynamique, la matrice de mélange effective peut être prise réelle. Dans ce cas, le secteur de Dirac est CP-conservant.

En effet, pour une matrice PMNS réelle, l'invariant de Jarlskog

$$J_{\text{CP}} = \text{Im}\left(U_{e1}U_{\mu 2}U_{e2}^*U_{\mu 1}^*\right)$$

est nul. Dans la paramétrisation standard,

$$J_{\text{CP}} = c_{12}s_{12}c_{23}s_{23}c_{13}^2s_{13}\sin\delta_{\text{CP}}.$$

Comme les trois angles de mélange sont non nuls, $J_{\text{CP}} = 0$ impose

$$\sin\delta_{\text{CP}} = 0, \quad \delta_{\text{CP}} = 0 \text{ ou } \pi \quad (\text{modulo } 2\pi).$$

Ainsi, la seule géométrie interne réelle du triplet PMNS ne génère pas une phase de Dirac non triviale. Les mesures actuelles de δ_{CP} restent toutefois insuffisantes pour isoler une valeur unique indépendante du choix d'ordre de masse et de paramétrisation expérimentale. La fermeture rotationnelle est donc traitée ici comme une conséquence dynamique testable du cadre HSMD, à confronter aux mesures futures de δ_{CP} .

Dans HSMD, cette orientation est fournie par la rotation globale de l'hypersphère. La relation générique de fermeture associe une phase de Dirac observée à une phase rotationnelle projetée sur la position angulaire effective de notre domaine d'observation :

$$\delta_{\text{CP}}^{\text{obs}} = 2\pi A_{\text{rot}}^{\text{glob}} \cos\chi_{\text{obs}}.$$

Pour les valeurs centrales LO affichées dans ce chapitre, on consomme le point de lecture fiduciel

$$\delta_{\text{CP}}^{\text{ref}} = 197^\circ.$$

Ce point fiduciel n'est pas une valeur centrale unique attribuée à NuFIT 6.0 ; la dépendance à la phase consommée est documentée par la table de sensibilité ci-dessous. La relation de fermeture fixe la projection $\cos\chi_{\text{obs}}$ via la fermeture rotationnelle HSMD. Elle n'est pas comptée ici comme une prédiction indépendante de δ_{CP} . En revanche, la projection ainsi obtenue est ensuite consommée par trois confrontations aval : H_0^{loc} , via $\cos^2\chi_{\text{obs}}$, la biréfringence CMB, via $\sin\chi_{\text{obs}}$, et le canal HSC/spin dans la fenêtre de redshift où l'axe spin est détecté librement. La fermeture PMNS-rotation est donc testée comme une surcontrainte multi-canaux, et non par le seul canal H_0 .

Le canal HSC/spin fournit une troisième confrontation aval de la fermeture PMNS-rotation. Il n'est pas utilisé pour fixer χ_{obs} , ni pour déterminer H_0^{loc} . La confrontation ne porte pas sur la moyenne globale du catalogue HSC, qui mélange des régimes de redshift distincts. Elle porte sur la fenêtre active où un axe spin est détecté librement et reste aligné avec l'axe de rotation attendu.

La fenêtre active retenue est

$$0.100 \leq z < 0.160. \tag{4.33}$$

Dans cette fenêtre, l'ajustement libre retrouve un axe proche de

$$(\text{RA}, \text{Dec})_{\text{libre}} \simeq (293.1^\circ, -61.9^\circ), \tag{4.34}$$

en accord avec l'axe fixé utilisé pour la mesure d'amplitude,

$$(\text{RA}, \text{Dec})_{\text{rot}} = (293.45^\circ, -61.85^\circ).$$

Cette étape définit la fenêtre active par stabilité directionnelle, et non par accord d'amplitude avec la prédiction HSMD.

Sur l'axe fixé, la pente mesurée dans la fenêtre active est

$$a_{\text{act}} = 0.2804 \pm 0.0551. \tag{4.35}$$

La pente brute a_{act} est la sortie directe de l'estimateur appliqué à la fenêtre active et à l'axe fixé. En parallèle, on construit des diagnostics par fenêtres de redshift afin de contrôler la stabilité de la réponse du canal spin. Dans une fenêtre w , on ajuste la chiralité cataloguée sur l'axe fixé $\hat{\mathbf{N}}_{\text{spin}}$:

$$s_i = b_w + a_w x_i + \varepsilon_i, \quad x_i = \hat{\mathbf{s}}_i \cdot \hat{\mathbf{N}}_{\text{spin}}, \quad i \in w. \quad (4.36)$$

Le coefficient b_w absorbe le déséquilibre monopolaire résiduel de la fenêtre, tandis que a_w est la pente directionnelle brute.

Le facteur de réponse effectif $B_{\text{eff},w}$ est obtenu, pour chaque fenêtre w , par la même procédure d'injection-récupération que celle définie en (4.41), appliquée avec le même axe fixé, le même masque de fenêtre et le même estimateur que (4.36). Il n'est pas une constante fondamentale de HSMD : il résume la réponse géométrique de l'estimateur dans la fenêtre considérée. L'amplitude corrigée diagnostique est définie par

$$\beta_{\text{HSC},w}^{\text{diag}} = \frac{a_w}{B_{\text{eff},w}}, \quad \sigma_{\beta,w}^{\text{diag}} = \frac{\sigma_{a,w}}{|B_{\text{eff},w}|}. \quad (4.37)$$

L'ensemble stable de fenêtres utilisé pour ce diagnostic contient $N_{\text{win}} = 26$ fenêtres. Il est défini par

$$\mathcal{W}_{\text{stab}} = \{[0.105745, 0.132580)\} \cup \bigcup_{\Delta z \in \{0.04, 0.05, 0.06, 0.07, 0.08\}} \{[z_0(\Delta z) + 0.01k, z_0(\Delta z) + 0.01k + \Delta z)\}_{k=0}^4, \quad (4.38)$$

avec

$$z_0(0.04) = 0.080, \quad z_0(0.05) = 0.075, \quad z_0(0.06) = 0.070, \quad z_0(0.07) = 0.065, \quad z_0(0.08) = 0.060. \quad (4.39)$$

La première fenêtre de (4.38) correspond au quatrième bin de la découpe quantile-6 ; les vingt-cinq autres fenêtres sont les fenêtres glissantes de largeur Δz et de pas 0.01.

La synthèse diagnostique est alors

$$(a_w, \sigma_{a,w}, B_{\text{eff},w})_{w \in \mathcal{W}_{\text{stab}}} \longrightarrow \beta_{\text{HSC},w}^{\text{diag}} = \frac{a_w}{B_{\text{eff},w}} \longrightarrow \beta_{\text{HSC}}^{\text{diag}} = 0.336004 \pm 0.016628, \quad N_{\text{win}} = 26. \quad (4.40)$$

La stabilité de cette synthèse est contrôlée par

$$\chi_{\text{stab}}^2 = 24.3255, \quad \text{dof} = 25, \quad \chi_{\text{stab}}^2 / \text{dof} = 0.973.$$

Ces diagnostics documentent la réponse effective du canal HSC, mais ils ne sont pas utilisés pour recalibrer la fermeture PMNS-rotation. Pour éviter de transformer $B_{\text{eff},w}$ en constante théorique cachée, la confrontation principale utilise la pente brute active, contrôlée par injection-récupération, plutôt qu'une amplitude corrigée par un facteur B_{eff} .

Un contrôle injection-récupération est effectué sur la même fenêtre active, le même axe fixé et le même estimateur. On injecte un signal synthétique de forme

$$\mathbb{E}[s_i] = \beta_{\text{inj}} x_i, \quad x_i = \hat{\mathbf{r}}_i \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\text{rot}},$$

puis on récupère la pente par le même ajustement

$$s_i = b + a x_i.$$

Le coefficient de réponse mesuré est

$$B_{\text{rec}} = \frac{a_{\text{rec}}}{\beta_{\text{inj}}}. \quad (4.41)$$

Pour l'amplitude injectée correspondant à la prédiction centrale, $\beta_{\text{inj}} = 0.344$, le test déterministe donne

$$a_{\text{rec}} = 0.344, \quad B_{\text{rec}} = 1.$$

Dans le test binaire stochastique de même espérance, la récupération donne

$$B_{\text{rec}} = \frac{0.342955}{0.344} \simeq 0.996963. \quad (4.42)$$

L'écart à l'unité est négligeable devant l'incertitude de pente de la fenêtre active. Ainsi, pour cet estimateur et cette fenêtre, la pente brute a_{act} peut être confrontée directement à l'amplitude prédite.

La prédiction HSMD ne consomme pas HSC. Elle utilise seulement $A_{\text{rot}}^{\text{glob}}$, fixé par la calibration globale, et χ_{obs} , fixé par le canal PMNS. Elle consomme la réponse LO du canal spin dérivée dans la partie théorique, (2.158)–(2.159). On obtient donc

$$\beta_{\text{HSC}}^{\text{pred}} = A_{\text{rot}}^{\text{glob}} \frac{\pi}{2} \cos^2 \chi_{\text{obs}}. \quad (4.43)$$

Le facteur $\pi/2$ n'est pas ajusté sur HSC : il provient de la déprojection azimutale LO du canal spin, tandis que le facteur $\cos^2 \chi_{\text{obs}}$ provient de l'invariant quadratique projeté du même canal. Avec les valeurs centrales LO

$$A_{\text{rot}}^{\text{glob}} = 1.366, \quad \chi_{\text{obs}} \simeq 66.4^\circ,$$

on obtient

$$\boxed{\beta_{\text{HSC}}^{\text{pred}} \simeq 0.344.} \quad (4.44)$$

Cette valeur est la sortie centrale LO du canal spin/HSC. Elle ne contient pas la propagation complète des incertitudes directionnelles. La confrontation pertinente est donc

$$\boxed{\beta_{\text{HSC}}^{\text{pred}} = 0.344 \quad \text{vs} \quad a_{\text{act}} = 0.2804 \pm 0.0551.} \quad (4.45)$$

Les chiffres affichés dans l'encadré conservent les valeurs centrales LO utilisées dans les calculs de ratios et de significativité. Les synthèses textuelles et les tableaux de sensibilité les arrondissent à 0.20° et 0.34. Ces arrondis ne sont pas des barres d'erreur : la propagation complète des incertitudes directionnelles n'est pas effectuée à ce stade. L'écart est d'environ 1.2σ . Le canal HSC ne fournit donc pas une concordance exacte, mais une compatibilité active-zone indépendante de la fermeture PMNS–rotation.

La chaîne logique publiée est unidirectionnelle : PMNS fixe χ_{obs} , puis HSMD prédit l'amplitude HSC attendue dans la fenêtre où l'axe spin est détecté. La moyenne globale du catalogue, plus faible, n'est pas l'observable prédite ici, car elle mélange la fenêtre active avec des tranches où l'axe n'est pas stable ou où le signal change de régime.

4.3.1 Valeur locale apparente de H_0

La valeur locale apparente de H_0 est dérivée de la projection quadratique locale de la rotation globale. À la latitude χ_{obs} , le rayon projeté dans le plan de rotation est

$$R_{\perp} = R_0 \cos \chi_{\text{obs}}, \quad (4.46)$$

d'où

$$M_{\text{loc}} = \left(\frac{R_{\perp}}{R_0} \right)^2 = \cos^2 \chi_{\text{obs}}. \quad (4.47)$$

Au rang LO, la prédiction locale utilise la prescription effective de lecture locale introduite dans THEO et calibrée dans CALI. La branche calibrée fixe la moyenne $H_{\text{ref}}^{\text{cal}}$, tandis que la correction rotationnelle locale consomme la projection quadratique $\cos^2 \chi_{\text{obs}}$. La correction primaire porte donc sur le taux au carré :

$$\frac{\left(H_0^{\text{loc,pred}} \right)^2}{\left(H_{\text{ref}}^{\text{cal}} \right)^2} = 1 + D_{\text{rot}} M_{\text{loc}} = 1 + D_{\text{rot}} \cos^2 \chi_{\text{obs}}. \quad (4.48)$$

Cette relation est utilisée comme prescription effective LO de lecture locale ; elle ne remplace pas le transfert directionnel complet d'un estimateur de survey fondé sur $K_H(\mathcal{S})$. Ainsi,

$$\boxed{H_0^{\text{loc,pred}} = H_{\text{ref}}^{\text{cal}} \sqrt{1 + D_{\text{rot}} \cos^2 \chi_{\text{obs}}}} \quad (4.49)$$

La forme linéarisée est

$$\frac{H_0^{\text{loc,pred}}}{H_{\text{ref}}^{\text{cal}}} - 1 \simeq \frac{D_{\text{rot}}}{2} \cos^2 \chi_{\text{obs}}. \quad (4.50)$$

Le facteur 1/2 vient du passage de H^2 à H , et non d'un coefficient de réponse ajusté.

Avec les valeurs centrales LO

$$H_{\text{ref}}^{\text{cal}} = 67.91 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}, \quad D_{\text{rot}} = 0.933, \quad \chi_{\text{obs}} \simeq 66.4^\circ,$$

on obtient

$$M_{\text{loc}} \simeq 0.160, \quad (4.51)$$

puis

$$\boxed{H_{0,\star}^{\text{loc,pred}} \simeq 72.8 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}} \quad (4.52)$$

Si D_{rot} et χ_{obs} sont maintenus à leurs valeurs LO centrales, l'enveloppe $\Delta\chi^2 < 1$ induite par le scan de A_0 via $H_{\text{ref}}^{\text{cal}}$ est

$$H_0^{\text{loc,pred}} \in [72.58, 72.95] \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}. \quad (4.53)$$

Cette enveloppe n'est pas une incertitude statistique complète : elle isole seulement la dépendance au profil A_0 dans le noyau de fond. Cette sortie est à comparer à la valeur locale publiée par SH0ES/Pantheon+ [11], utilisée ici comme repère observationnel externe :

$$H_0^{\text{loc,obs}} = 73.04 \pm 1.04 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}.$$

Le canal HSC/spin n'intervient pas dans cette fermeture. En particulier, aucune amplitude β_{HSC} n'est consommée pour déterminer $H_0^{\text{loc,pred}}$. Le masque angulaire Pantheon+SH0ES n'est pas consommé comme noyau de fermeture ; il peut seulement servir à des contrôles résiduels indépendants.

Le choix $M_{\text{loc}} = \cos^2 \chi_{\text{obs}}$ n'est pas un ajustement de la valeur locale de H_0 . Il suit de la convention géométrique selon laquelle χ_{obs} est une latitude mesurée relativement au plan de rotation : le rayon projeté est $R_{\perp} = R_0 \cos \chi_{\text{obs}}$, et la contribution rotationnelle au taux carré est proportionnelle à $R_{\perp}^2$.

La fermeture PMNS intervient en amont : elle identifie la phase de Dirac observée à la projection rotationnelle $\delta_{\text{CP}}^{\text{obs}} = 2\pi A_{\text{rot}}^{\text{glob}} \cos \chi_{\text{obs}}$. Cette relation fixe $\cos \chi_{\text{obs}}$, mais ne valide pas à elle seule la fermeture rotationnelle. Le premier test aval est la valeur locale apparente de H_0 , prédite sans consommer la valeur SH0ES/Pantheon+. Le deuxième test aval, indépendant de H_0^{loc} , est la biréfringence CMB. Le troisième test aval est le canal HSC/spin, non comme moyenne globale du catalogue, mais comme pente brute dans la fenêtre active où l'axe spin est détecté librement. Les trois sorties consomment la même projection χ_{obs} issue du canal PMNS.

4.3.2 Biréfringence cosmique : seconde sortie aval de la fermeture PMNS

Énigme. Certaines analyses CMB indiquent une rotation globale possible du plan de polarisation, avec une amplitude de l'ordre de quelques dixièmes de degré. Le statut observationnel dépend des combinaisons de données et des contrôles de calibration instrumentale. Dans HSMD, cette observable fournit un test géométrique indépendant de la projection rotationnelle extraite du canal PMNS.

Chaîne prédictive HSMD. La latitude effective de notre domaine d'observation est fixée par le canal PMNS, selon (3.54)–(3.56), puis rappelée en (4.32). La biréfringence CMB constitue alors une seconde sortie aval de la même fermeture PMNS–rotation : elle consomme le même χ_{obs} que H_0^{loc} , mais via $\sin \chi_{\text{obs}}$ au lieu de $\cos^2 \chi_{\text{obs}}$.

Au rang LO, HSMD associe une rotation géométrique de polarisation à la projection de la rotation globale sur la ligne de visée. Pour une source à redshift z , on écrit

$$\beta(\hat{n}) \simeq \mathcal{W}(z) A_{\text{rot}}^{\text{glob}} \sin \chi_{\text{obs}} \cos \Theta(\hat{n}, \hat{n}_{\text{rot}}),$$

où $A_{\text{rot}}^{\text{glob}}$ est défini en (4.27), où Θ est l'angle entre la direction observée et l'axe de rotation HSMD, et où $\mathcal{W}(z)$ est le facteur de transfert conforme.

Pour le CMB, on introduit le facteur de transfert stabilisé

$$\mathcal{W}_{\text{CMB}}^{\text{stab}} \equiv \frac{c_{\text{lum}}}{R_0^{\text{HSM}}} \int_0^{z_*} \frac{dz}{H_{\text{ref}}^{\text{cal}} E_{\text{stab}}(z)}. \quad (4.54)$$

Le redshift de recombinaison consommé dans (4.54) est

$$z_* = 1089, \quad (4.55)$$

valeur de référence usuelle du découplage CMB dans le cadre cosmologique standard [15]. Dans ce canal, z_* fixe seulement la borne du transfert conforme ; il n'est pas utilisé pour calibrer le noyau homogène HSMD.

La rotation moyenne attendue s'écrit alors

$$\beta_{\text{CMB}}^{\text{pred}} = \mathcal{W}_{\text{CMB}}^{\text{stab}} A_{\text{rot}}^{\text{glob}} \sin \chi_{\text{obs}}. \quad (4.56)$$

Avec le noyau stabilisé (4.7), on obtient

$$\mathcal{W}_{\text{CMB}}^{\text{stab}} \simeq 2.79 \times 10^{-3}. \quad (4.57)$$

En utilisant (4.28) et (4.32), il vient

$$\beta_{\text{CMB}}^{\text{pred}} \simeq (2.79 \times 10^{-3})(1.366)(0.916) = 3.49 \times 10^{-3} \text{ rad.}$$

Donc la valeur centrale LO est

$$\boxed{\beta_{\text{CMB}}^{\text{pred}} \simeq 0.200^\circ}. \quad (4.58)$$

Cette valeur ne contient pas la propagation complète des incertitudes directionnelles.

Comme $\sin \chi_{\text{obs}} \leq 1$, la même relation impose un plafond géométrique central LO :

$$\boxed{\beta_{\text{CMB}}^{\text{max}} = \mathcal{W}_{\text{CMB}}^{\text{stab}} A_{\text{rot}}^{\text{glob}} \simeq 0.218^\circ}. \quad (4.59)$$

Comme $\mathcal{W}_{\text{CMB}}^{\text{stab}}$ dépend du noyau E_{stab} , cette sortie est faiblement sensible au profil A_0 . Sur l'enveloppe $\Delta\chi^2 < 1$, en gardant $A_{\text{rot}}^{\text{glob}}$ et χ_{obs} à leurs valeurs centrales LO, on obtient

$$\beta_{\text{CMB}}^{\text{pred}} \in [0.194^\circ, 0.205^\circ]. \quad (4.60)$$

La demi-largeur de cette enveloppe, de l'ordre de 0.006° , est très inférieure à l'incertitude observationnelle actuellement disponible sur ce canal. Le plafond géométrique (4.59) doit donc être lu comme un plafond central LO, lui aussi faiblement dépendant du profil A_0 .

Ce plafond rend le canal CMB falsifiable : une mesure future stabilisée significativement au-dessus de (4.59) mettrait en difficulté cette fermeture rotationnelle.

Les extractions actuelles de la biréfringence cosmique donnent des valeurs centrales de l'ordre de quelques dixièmes de degré, par exemple

$$\beta_{\text{CMB}}^{\text{obs}} = 0.35^\circ \pm 0.14^\circ \quad [16],$$

et

$$\beta_{\text{CMB}}^{\text{obs}} = 0.30^\circ \pm 0.11^\circ \quad [17].$$

La prédiction (4.58) est donc compatible avec ces mesures au niveau actuel des incertitudes, mais elle se situe sous leurs valeurs centrales. Le canal CMB fournit ainsi une concordance indépendante mais encore souple : il renforce la fermeture PMNS–rotation si les mesures futures convergent vers $\simeq 0.2^\circ$, et la mettrait sous tension si elles se stabilisaient nettement au-dessus du plafond (4.59).

La chaîne est non circulaire vis-à-vis de la biréfringence CMB : $\beta_{\text{CMB}}^{\text{obs}}$ n’est pas utilisée pour déterminer χ_{obs} . La latitude effective est fixée par le canal PMNS, puis injectée dans la loi de transfert CMB (4.56). La même projection alimente donc deux observables aval indépendantes :

$$\chi_{\text{obs}} \longrightarrow H_0^{\text{loc,pred}} \quad \text{et} \quad \chi_{\text{obs}} \longrightarrow \beta_{\text{CMB}}^{\text{pred}}.$$

δ_{CP} consommé	χ_{obs}	$H_0^{\text{loc,pred}}$	$\beta_{\text{CMB}}^{\text{pred}}$	$\beta_{\text{HSC}}^{\text{pred}}$
150°	72.2°	70.8 km s ⁻¹ Mpc ⁻¹	0.21°	0.20
170°	69.8°	71.6 km s ⁻¹ Mpc ⁻¹	0.21°	0.26
197° fiduciel	66.4°	72.8 km s ⁻¹ Mpc ⁻¹	0.20°	0.34
220°	63.4°	74.0 km s ⁻¹ Mpc ⁻¹	0.20°	0.43
250°	59.4°	75.7 km s ⁻¹ Mpc ⁻¹	0.19°	0.56

TABLE 4.2 – Sensibilité conjointe des trois sorties aval à la phase PMNS consommée dans la fermeture $\delta_{\text{CP}}^{\text{obs}} = 2\pi A_{\text{rot}}^{\text{glob}} \cos \chi_{\text{obs}}$. Les valeurs utilisent les valeurs centrales LO $A_{\text{rot}}^{\text{glob}} = 1.366$, $D_{\text{rot}} = 0.933$, $H_{\text{ref}}^{\text{cal}} = 67.91 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, $\mathcal{W}_{\text{CMB}}^{\text{stab}} = 2.79 \times 10^{-3}$, et $\beta_{\text{HSC}}^{\text{pred}} = A_{\text{rot}}^{\text{glob}} (\pi/2) \cos^2 \chi_{\text{obs}}$. Elles ne constituent pas une propagation statistique de l’incertitude NuFIT sur δ_{CP} , mais un tableau de sensibilité centrale. Le point 197° est le point fiduciel retenu pour les encadrés centraux LO, non une valeur centrale unique attribuée à NuFIT 6.0. La comparaison HSC pertinente se fait avec la pente brute active $a_{\text{act}} = 0.2804 \pm 0.0551$, mesurée sur l’axe fixé dans la fenêtre où l’axe est détecté librement, et non avec la moyenne globale du catalogue.

4.4 Synthèse conjointe de la fermeture PMNS–rotation

La fermeture PMNS–rotation introduit une unique position angulaire effective de notre domaine d’observation, χ_{obs} , relativement à l’axe de rotation global. La projection consommée par la phase de Dirac est $\cos \chi_{\text{obs}}$, fixée par

$$\delta_{\text{CP}}^{\text{obs}} = 2\pi A_{\text{rot}}^{\text{glob}} \cos \chi_{\text{obs}}.$$

Les trois confrontations aval ne réajustent pas cette projection. Elles consomment la même valeur de χ_{obs} , mais ne fournissent pas trois leviers angulaires indépendants. Deux dépendances géométriques interviennent : une branche en $\cos^2 \chi_{\text{obs}}$, commune à la valeur locale apparente de H_0 et au canal HSC/spin,

$$H_0^{\text{loc}} \propto \sqrt{1 + D_{\text{rot}} \cos^2 \chi_{\text{obs}}}, \quad \beta_{\text{HSC}}^{\text{pred}} \propto A_{\text{rot}}^{\text{glob}} \cos^2 \chi_{\text{obs}},$$

et une branche en $\sin \chi_{\text{obs}}$, portée par la biréfringence CMB,

$$\beta_{\text{CMB}} \propto A_{\text{rot}}^{\text{glob}} \sin \chi_{\text{obs}}.$$

La fermeture est donc testée par trois jeux de données aval, mais seulement deux dépendances angulaires distinctes. Le canal HSC ne fournit pas un nouveau levier sur χ_{obs} par rapport à

H_0^{loc} ; il fournit une confrontation observationnelle indépendante de la même branche $\cos^2 \chi_{\text{obs}}$, dans un canal directionnel différent.

Au point fiduciel $\delta_{\text{CP}}^{\text{ref}} \simeq 197^\circ$, les sorties centrales LO associées sont

$$H_0^{\text{loc,pred}} \simeq 72.8 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}, \quad \beta_{\text{CMB}}^{\text{pred}} \simeq 0.20^\circ, \quad \beta_{\text{HSC}}^{\text{pred}} \simeq 0.34.$$

Ces valeurs ne doivent pas être lues comme une propagation complète de l'incertitude NuFIT sur δ_{CP} , ni comme une propagation complète de l'incertitude d'axe ou de latitude. Le point 197° est un point de lecture fiduciel ; les autres valeurs plausibles de δ_{CP} sont documentées dans la table de sensibilité. Ces sorties sont l'évaluation centrale LO de la fermeture PMNS–rotation. Elles sont confrontées respectivement à

$$H_0^{\text{loc,obs}} \simeq 73.04 \pm 1.04 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1},$$

$$\beta_{\text{CMB}}^{\text{obs}} \simeq 0.30^\circ \pm 0.11^\circ,$$

et, pour le canal HSC/spin, à la pente brute active

$$a_{\text{act}} = 0.2804 \pm 0.0551$$

mesurée sur l'axe fixé dans la fenêtre où l'axe spin est détecté librement.

À titre indicatif, en négligeant les corrélations entre canaux et en utilisant les incertitudes observationnelles affichées, les écarts normalisés sont

$$\Delta_{H_0} \simeq 0.2\sigma, \quad \Delta_{\text{CMB}} \simeq 1.0\sigma, \quad \Delta_{\text{HSC}} \simeq 1.2\sigma.$$

On peut donc résumer la compatibilité conjointe par

$$\chi_{\text{joint}}^2 \simeq (0.2)^2 + (1.0)^2 + (1.2)^2 \simeq 2.5, \quad (4.61)$$

pour trois confrontations aval. Cette quantité n'est pas présentée comme un ajustement statistique complet : elle sert seulement à rendre explicite le fait que les trois canaux restent simultanément compatibles avec la même projection χ_{obs} . Elle ne constitue pas non plus une mesure de préférence par rapport à des modèles concurrents : elle établit une compatibilité interne multi-canaux de la fermeture PMNS–rotation, non une détection statistique de cette fermeture.

Le statut de cette fermeture est donc le suivant. Elle ne constitue pas une preuve dure de l'identification $\delta_{\text{CP}}^{\text{obs}} = 2\pi A_{\text{rot}}^{\text{glob}} \cos \chi_{\text{obs}}$, car les trois canaux restent observationnellement souples et parce que la compatibilité conjointe ne discrimine pas encore cette fermeture face à des modèles concurrents. En revanche, elle n'est plus une simple coïncidence sur H_0^{loc} : la même projection extraite du canal PMNS alimente deux branches angulaires, $\cos^2 \chi_{\text{obs}}$ et $\sin \chi_{\text{obs}}$, testées par trois jeux de données distincts. La fermeture PMNS–rotation est ainsi une conséquence multi-canaux, cohérente et falsifiable par l'amélioration future de l'une de ces trois confrontations.

4.5 Statut des incertitudes des sorties post-calibrage

Les valeurs numériques présentées dans ce chapitre sont des sorties post-calibrage. Le coefficient A_0 est le résidu constant de fermeture, défini structurellement comme le bilan entre la fermeture radiale et le rappel élastique homogène. Le calibrage ne fixe pas une valeur unique de A_0 : il fournit une famille admissible de profils. Les valeurs centrales sont affichées au point auto-cohérent A_0^* . Lorsqu'une observable dépend sensiblement de A_0 , on fournit en plus une enveloppe issue du scan profilé, écrite sous forme d'intervalle $[x_{\text{min}}, x_{\text{max}}]$.

Ces intervalles de scan ne sont pas des incertitudes statistiques symétriques. Ils ne doivent pas être notés avec le symbole $\pm$. Le symbole $\pm$ est réservé aux incertitudes observationnelles explicitement citées, par exemple une mesure externe ou une pente mesurée avec son erreur standard.

Une propagation statistique complète nécessiterait de propager la covariance du calibrage global sur les paramètres

$$H_{\text{ref}}^{\text{cal}}, \quad r_{\star}^{\text{cal}}, \quad A_i^{\text{stab}},$$

puis de réévaluer chaque observable dérivée. Cette propagation complète n'est pas incluse dans le périmètre numérique présenté ici. En revanche, pour les sorties sensibles à A_0 , on propage explicitement l'enveloppe du scan profilé.

On distingue donc quatre statuts :

- les valeurs centrales LO, calculées au point représentatif $A_0^{\star}$;
- les sorties sensibles à A_0 , données avec une enveloppe de scan $[x_{\min}, x_{\max}]$;
- les sorties directionnelles, qui dépendent en plus de l'axe, de l'amplitude rotationnelle et de la position de l'observateur ;
- les sorties prospectives ou structurelles, pour lesquelles la valeur centrale indique une cible théorique ou une échelle de modèle, sans confrontation statistique complète.

Ainsi, lorsqu'une comparaison observationnelle est mentionnée, elle doit être comprise comme une confrontation post-calibrage de branche ou d'enveloppe, non comme un nouvel ajustement statistique complet.

4.6 Table de traçabilité des prédictions observables

Grandeur	Statut	Chaîne de calcul
$q_{0,\star}^{\text{HSMD}} \simeq -0.441$, enveloppe $q_0 \in [-0.474, -0.387]$	Valeur centrale LO au point A_0^* , avec enveloppe de scan $\Delta\chi^2 < 1$	(4.15)–(4.17), 4.1
$z_{t,\star}^{\text{HSMD}} \simeq 0.699$, enveloppe $z_t \in [0.671, 0.740]$	Valeur centrale LO au point A_0^* , avec enveloppe de scan $\Delta\chi^2 < 1$	(4.18)–(4.19), 4.1
$t_{0,\star}^{\text{HSMD}} \simeq 13.642$ Gyr, enveloppe $t_0 \in [13.562, 13.695]$ Gyr	Valeur centrale LO au point A_0^* , avec enveloppe de scan $\Delta\chi^2 < 1$	(4.20)–(4.21), 4.1
$\hat{\mathbf{N}}_{\text{spin}}^{\text{HSC}} \simeq (293^\circ, -62^\circ)$	Axe directionnel observé ; valeur centrale arrondie, incertitude d'axe non propagée dans les sorties dérivées	(4.23)–(4.24)
$\Omega_{\text{HS}} \simeq 2.72 \times 10^{-21} \text{ s}^{-1}$	Sortie dérivée de la calibration directionnelle	(3.49), (4.29)–(4.30)
$v_{\text{rot}}^{\text{glob}} \simeq 1.366 c_{\text{lum}} \simeq 4.10 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$	Valeur centrale de plongement ; non interprétée comme vitesse de signal	(4.29)–(4.31)
$\chi_{\text{obs}} \simeq 66.4^\circ$, depuis $\delta_{\text{CP}}^{\text{ref}} \simeq 197^\circ$	Point fiduciel de lecture PMNS de χ_{obs} ; les autres valeurs plausibles de δ_{CP} sont couvertes par la table de sensibilité	(3.54)–(4.32)
Canal HSC/spin : $\beta_{\text{HSC}}^{\text{pred}} \simeq 0.344$ vs $a_{\text{act}} = 0.2804 \pm 0.0551$	Troisième confrontation aval en fenêtre active ; $\beta_{\text{HSC}}^{\text{pred}}$ est une valeur centrale LO, tandis que $a_{\text{act}} = 0.2804 \pm 0.0551$ est la pente brute mesurée avec son erreur standard ; axe libre retrouvé et pente brute sur axe fixé, sans correction par B_{eff} dans la confrontation principale	(2.155)–(2.159), (4.23)–(4.25), (4.33)–(4.42), (4.43)–(4.45)
$H_{0,\star}^{\text{loc,pred}} \simeq 72.8 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, enveloppe conditionnelle $H_0^{\text{loc,pred}} \in [72.58, 72.95] \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$	Sortie locale dérivée de la projection quadratique ; enveloppe affichée en maintenant D_{rot} et χ_{obs} aux valeurs LO centrales	(4.48)–(4.53)
$\beta_{\text{CMB}}^{\text{pred}} \simeq 0.200^\circ$, enveloppe A_0 : $[0.194^\circ, 0.205^\circ]$	Seconde sortie aval centrale LO de la fermeture PMNS–rotation ; plafond central LO $\beta_{\text{CMB}}^{\text{max}} \simeq 0.218^\circ$; incertitude directionnelle non propagée	(4.54)–(4.60)

Les grandeurs de ce tableau sont des sorties post-calibrage pouvant être reliées à des observables actuelles ou à des contrôles directionnels explicites. Les rapports BAO associés aux distances D_H , D_M et D_V ne sont pas présentés ici comme des prédictions indépendantes : leur confrontation observationnelle relève du chapitre de calibrage.

Le canal SNe Ia bas-redshift n'est pas listé comme prédiction indépendante dans cette table, car aucun résidu de module de distance n'est évalué ici sur un catalogue spécifié. Il fournit seulement un protocole de contrôle secondaire de la projection locale.

Chapitre 5

Prédictions prospectives et sorties structurelles

Ce chapitre regroupe les sorties calculables après calibrage qui ne constituent pas, dans l'état actuel des observations, une confrontation directe du même statut que les canaux précédents. Certaines sont prospectives, car elles visent des mesures futures ; d'autres sont structurelles, car elles expriment une échelle ou une traduction dimensionnelle imposée par le noyau stabilisé.

5.0.1 Trajectoire effective du rayon hypersphérique dans le régime stabilisé

Le rayon hypersphérique est relié au facteur d'échelle par

$$R(t) = R_0^{\text{HSM}} a(t). \quad (5.1)$$

Dans le régime stabilisé, la trajectoire $R(t)$ est donc déterminée par la solution $a(t)$ associée au noyau (4.7).

Par définition, le taux d'expansion stabilisé est

$$H_{\text{stab}}(a) = H_{\text{ref}}^{\text{cal}} E_{\text{stab}}(a) = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (5.2)$$

Avec (5.2), on obtient

$$\dot{a} = a H_{\text{ref}}^{\text{cal}} E_{\text{stab}}(a). \quad (5.3)$$

La trajectoire est donnée implicitement par

$$t - t_{\text{stab}} = \frac{1}{H_{\text{ref}}^{\text{cal}}} \int_{a_{\text{stab}}}^{a(t)} \frac{da'}{a' E_{\text{stab}}(a')}. \quad (5.4)$$

Le rayon suit alors

$$R(t) = R_0^{\text{HSM}} a(t), \quad (5.5)$$

où $a(t)$ est défini par (5.4).

Le coefficient A_0^{stab} représente le résidu constant effectif du noyau tardif :

$$A_0^{\text{stab}} = B_{\text{close}} - \mathcal{B}_{\text{el}}.$$

Dans la branche stabilisée, la fermeture radiale solitonique est portée par

$$B_{\text{close}} = A_{3,\text{sol}}^{\text{stab}},$$

et le rappel élastique homogène par

$$\mathcal{B}_{\text{el}} = \frac{3}{2a_{\text{nat}}^2} = \frac{(A_1^{\text{stab}})^2}{6}.$$

On obtient donc

$$A_0^{\text{stab}} = A_{3,\text{sol}}^{\text{stab}} - \frac{(A_1^{\text{stab}})^2}{6}. \quad (5.6)$$

Avec la branche auto-cohérente (4.11),

$$A_{3,\text{sol}}^{\text{stab}} - \frac{(A_1^{\text{stab}})^2}{6} = 0.350 - \frac{0.692^2}{6} \simeq 0.270,$$

ce qui reproduit le résidu constant calibré. Le scan profilé de A_0 ne remplace donc pas cette relation : il la teste en relâchant temporairement A_0 . Le fait que le point auto-cohérent soit situé à $\Delta\chi^2 \simeq 0.009$ du minimum libre indique que cette contrainte structurelle est compatible avec les données de calibrage.

En fonction du facteur d'échelle, le noyau stabilisé s'écrit

$$E_{\text{stab}}^2(a) = A_0^{\text{stab}} + A_1^{\text{stab}} a^{-1} + A_2^{\text{stab}} a^{-2} + A_{3,\text{sol}}^{\text{stab}} a^{-3} + A_4^{\text{stab}} a^{-4}. \quad (5.7)$$

Dans la branche minimale tardive où $A_4^{\text{stab}} = 0$, un éventuel retournement futur est défini par le premier zéro positif supérieur à $a = 1$:

$$E_{\text{stab}}^2(a_{\text{max}}) = 0, \quad a_{\text{max}} > 1. \quad (5.8)$$

Si $A_0^{\text{stab}} < 0$, le noyau devient négatif à suffisamment grand facteur d'échelle et un tel zéro existe dans le périmètre du noyau stabilisé, sous réserve que la branche reste dans son domaine de validité. Si $A_0^{\text{stab}} = 0$, le terme constant ne force pas de retournement à ce rang. Si $A_0^{\text{stab}} > 0$, aucun retournement asymptotique n'est produit par le terme constant.

Ainsi, dans cette section, un éventuel a_{max} n'est pas une entrée indépendante. Il est une sortie éventuelle du noyau stabilisé après sélection d'une branche admissible

$$(H_{\text{ref}}^{\text{cal}}, r_{\star}^{\text{cal}}, A_0^{\text{stab}}, A_1^{\text{stab}}, A_2^{\text{stab}}, A_{3,\text{sol}}^{\text{stab}}).$$

Au point $A_0^{\text{stab}} = 0$ du scan, aucun retournement futur n'est forcé par un terme constant négatif au rang minimal. Pour un profil excédentaire $A_0^{\text{stab}} > 0$, le terme constant contribue au contraire à maintenir l'expansion asymptotique dans le domaine de validité du noyau stabilisé. Les prédictions prospectives doivent donc être lues comme des tests de discrimination entre profils admissibles du scan profilé.

5.0.2 Densité de masse équivalente actuelle du secteur stabilisé en a^{-3}

Dans HSMD, le contenu non géométrique organisé est porté, dans le régime stabilisé, par le terme de type matière du noyau. En utilisant (4.7), ce terme est

$$E_{\text{stab}}^2(a) \supset A_{3,\text{sol}}^{\text{stab}} a^{-3}.$$

Le coefficient $A_{3,\text{sol}}^{\text{stab}}$ est une coordonnée calibrée par les observables de fond. La densité déduite ci-dessous est donc une sortie du noyau calibré.

La densité critique actuelle associée à l'échelle de branche est

$$\rho_{\text{crit},0}^{\text{HSMD}} = \frac{3(H_{\text{ref}}^{\text{cal}})^2}{8\pi G}. \quad (5.9)$$

Avec $H_{\text{ref}}^{\text{cal}}$ donné par (4.10), on obtient

$$\rho_{\text{crit},0}^{\text{HSMD}} \simeq 8.66 \times 10^{-27} \text{ kg m}^{-3}. \quad (5.10)$$

La densité effective du contenu non géométrique organisé est donc

$$\rho_{\text{cont},0}^{\text{HSMD}} = A_{3,\text{sol}}^{\text{stab}} \rho_{\text{crit},0}^{\text{HSMD}}. \quad (5.11)$$

Le coefficient $A_{3,\text{sol}}^{\text{stab}}$ ne désigne pas l'ensemble des solutions solitoniques HSM. Il désigne la partie stabilisée du contenu solitonique dont la densité d'énergie se dilue comme a^{-3} , c'est-à-dire comme un contenu de type matière. Le critère de classement n'est donc pas la nature solitonique de l'objet, mais sa loi de dilution cosmologique. Les excitations radiatives, même lorsqu'elles sont décrites par des solutions HSM, appartiennent au secteur de dilution a^{-4} lorsque leur énergie est redshiftée par l'expansion.

Avec $A_{3,\text{sol}}^{\text{stab}}$ donné par (4.11), il vient la valeur centrale LO

$$\boxed{\rho_{a^{-3},0,\star}^{\text{HSMD}} \simeq 3.03 \times 10^{-27} \text{ kg m}^{-3}}. \quad (5.12)$$

Sur l'enveloppe $\Delta\chi^2 < 1$ du scan profilé en A_0 , la même traduction donne

$$\rho_{a^{-3},0}^{\text{HSMD}} \in [2.64, 3.65] \times 10^{-27} \text{ kg m}^{-3}. \quad (5.13)$$

En densité d'énergie, la valeur centrale LO est

$$\boxed{u_{\text{cont},0,\star}^{\text{HSMD}} = u_{a^{-3},0,\star}^{\text{HSMD}} \simeq 2.72 \times 10^{-10} \text{ J m}^{-3}}. \quad (5.14)$$

L'enveloppe de scan correspondante est

$$u_{a^{-3},0}^{\text{HSMD}} \in [2.38, 3.28] \times 10^{-10} \text{ J m}^{-3}. \quad (5.15)$$

Cette densité est la densité effective actuelle associée à la partie stabilisée du contenu non géométrique portée par le secteur a^{-3} . Elle est obtenue par traduction dimensionnelle du coefficient calibré $A_{3,\text{sol}}^{\text{stab}}$, via

$$\rho_{\text{cont},0}^{\text{HSMD}} = A_{3,\text{sol}}^{\text{stab}} \rho_{\text{crit},0}^{\text{HSMD}}.$$

Elle ne constitue pas, dans ce chapitre, une dérivation de genèse du contenu solitonique depuis une phase de quench. En particulier, la chaîne amont

$$\text{quench} \longrightarrow \text{capture solitonique} \longrightarrow A_{3,\text{sol}}^{\text{stab}}$$

n'est pas utilisée comme fermeture dans le présent chapitre. La valeur $\rho_{\text{cont},0}^{\text{HSMD}}$ doit donc être lue comme une sortie tardive du noyau stabilisé calibré, et non comme une densité de matière dérivée directement depuis la dynamique de quench.

Cette quantité n'identifie pas non plus le secteur a^{-3} à l'énergie totale injectée durant une éventuelle phase pré-stabilisée. Elle n'introduit pas de fluide d'énergie sombre : dans HSMD, le terme constant de la branche relève de la fermeture géométrique et dynamique, non d'un réservoir matériel indépendant.

Comparaison externe. À titre de comparaison, l'analyse Planck 2018 dans le cadre Λ CDM de base donne approximativement [15]

$$H_0^{\text{Pl18}} \simeq 67.4 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}, \quad \Omega_m^{\text{Pl18}} \simeq 0.315.$$

La densité critique correspondante est

$$\rho_{\text{crit},0}^{\text{Pl18}} = \frac{3(H_0^{\text{Pl18}})^2}{8\pi G} \simeq 8.53 \times 10^{-27} \text{ kg m}^{-3},$$

d'où

$$\rho_{m,0}^{\text{Pl18}} = \Omega_m^{\text{Pl18}} \rho_{\text{crit},0}^{\text{Pl18}} \simeq 2.69 \times 10^{-27} \text{ kg m}^{-3}.$$

La densité effective HSMD du secteur a^{-3} est donc plus élevée que cette valeur de référence, ce qui reflète le fait que $A_{3,\text{sol}}^{\text{stab}}$ n'est pas identifié terme à terme au paramètre Ω_m d'un modèle Λ CDM.

5.0.3 Dérive spectroscopique du redshift

Le noyau stabilisé (4.7) donne la dérive temporelle du redshift cosmologique. Pour une source comobile et un observateur comobile, la relation $1 + z = a(t_0)/a(t_e)$, combinée à la propagation radiale nulle, donne la relation de Sandage–Loeb [18, 19]

$$\dot{z} \equiv \frac{dz}{dt_0} = (1 + z)H_{\text{ref}}^{\text{cal}} - H_{\text{stab}}(z). \quad (5.16)$$

La dérive spectroscopique exprimée comme vitesse apparente par unité de temps observateur est alors

$$\frac{\Delta v(z)}{\Delta t_0} = \frac{c_{\text{lum}} \dot{z}}{1 + z} = c_{\text{lum}} H_{\text{ref}}^{\text{cal}} \left[1 - \frac{E_{\text{stab}}(z)}{1 + z} \right], \quad (5.17)$$

où $E_{\text{stab}}(z)$ est défini par (4.7). Cette observable ne dépend pas de $r_{\star}^{\text{cal}}$ et ne consomme aucune observable directionnelle. Elle n'intervient pas dans le calibrage global de la branche stabilisée. Elle constitue donc une prédiction cinématique post-calibrage : sa confrontation observationnelle relève de futures mesures de dérive spectroscopique du redshift, de type Sandage–Loeb.

En unités $\text{cm s}^{-1} \text{yr}^{-1}$, on affiche d'abord la valeur centrale LO au point auto-cohérent A_0^* de (4.11) :

z	$E_{\text{stab}}(z)$	$E_{\text{stab}}(z)/(1 + z)$	$\Delta v [\text{cm s}^{-1} \text{yr}^{-1}]$
1.0	1.791	0.895	+0.218
2.0	2.998	0.999	+0.001
3.0	4.522	1.130	−0.272
4.0	6.299	1.260	−0.541
5.0	8.294	1.382	−0.796

Comme cette observable dépend directement de la forme de $E_{\text{stab}}(z)$, elle doit aussi être lue avec l'enveloppe issue du scan profilé de A_0 . Sur les points du scan appartenant à $\Delta\chi^2 < 1$, on obtient :

TABLE 5.1 – Valeur centrale LO et enveloppe de scan en A_0 pour la dérive Sandage–Loeb. Les crochets indiquent une enveloppe de scan, non une incertitude statistique symétrique.

z	Valeur centrale au point A_0^*	Enveloppe $\Delta\chi^2 < 1$
1.0	+0.218	[+0.216, +0.219]
2.0	+0.001	[−0.005, +0.004]
3.0	−0.272	[−0.307, −0.251]
4.0	−0.541	[−0.610, −0.499]
5.0	−0.796	[−0.898, −0.732]

Cette enveloppe ne réduit pas la plage admissible de A_0 . Elle montre au contraire que la dérive Sandage–Loeb constitue une cible prospective capable de discriminer ultérieurement les profils admissibles du scan en A_0 , lorsque des mesures directes de redshift drift seront disponibles.

Le changement de signe non trivial est obtenu en résolvant

$$E_{\text{stab}}(z_{\times}) = 1 + z_{\times}. \quad (5.18)$$

Avec $x = 1 + z_{\times}$, cette condition devient

$$A_4^{\text{stab}} x^4 + A_{3,\text{sol}}^{\text{stab}} x^3 + A_2^{\text{stab}} x^2 + A_1^{\text{stab}} x + A_0^{\text{stab}} = x^2. \quad (5.19)$$

Avec les coefficients du point représentatif auto-cohérent (4.11), la racine non triviale de cette équation donne

$$z_{\times} \simeq 2.005. \quad (5.20)$$

Ainsi, au point auto-cohérent A_0^* , le noyau HSMD prédit une dérive positive sous $z \simeq 2.005$, puis négative dans le domaine haut redshift. L'enveloppe de scan en A_0 déplace légèrement les amplitudes et le voisinage du changement de signe. La table 5.1 fournit donc une cible observationnelle centrale LO accompagnée de son enveloppe de scan, à comparer à de futures mesures de redshift drift exprimées en $\text{cm s}^{-1} \text{ yr}^{-1}$.

5.0.4 Courbure géométrique globale de l'hypersphère

Le coefficient A_2^{stab} du noyau stabilisé (4.7) est une coordonnée effective du secteur $(1+z)^2$. Il appartient à la fermeture homogène tardive sélectionnée par le calibrage et ne doit pas être confondu avec la courbure géométrique globale associée au rayon fini R_0^{HSM} de l'hypersphère.

La grandeur sans dimension qui mesure la courbure géométrique globale en unités de Hubble est définie par

$$\varepsilon_{\text{curv}}^{\text{HS}} := \left(\frac{c_{\text{lum}}}{R_0^{\text{HSM}} H_{\text{ref}}^{\text{cal}}} \right)^2. \quad (5.21)$$

Cette expression compare l'échelle de Hubble actuelle $c_{\text{lum}}/H_{\text{ref}}^{\text{cal}}$ au rayon géométrique global R_0^{HSM} . La forme du rapport est la mesure usuelle d'une échelle de courbure exprimée en unités de Hubble ; son contenu prédictif vient ici du fait que R_0^{HSM} n'est pas un paramètre de courbure FLRW libre, mais une échelle géométrique héritée de la construction HSM/HSMD.

Cette grandeur est structurelle : elle est non nulle dès que R_0^{HSM} est fini. Elle ne remplace pas le coefficient effectif A_2^{stab} du secteur $(1+z)^2$, qui appartient au noyau homogène stabilisé calibré. Elle peut être comparée à une courbure apparente exprimée en unités de Hubble, mais elle n'est pas introduite comme un paramètre libre Ω_k d'un modèle FLRW.

La substitution numérique donne

$$H_{\text{ref}}^{\text{cal}} \simeq 67.91 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} = \frac{67.91 \times 10^3}{3.085677581 \times 10^{22}} \text{ s}^{-1} \simeq 2.20081 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1}. \quad (5.22)$$

Avec

$$R_0^{\text{HSM}} = 1.50841 \times 10^{29} \text{ m}, \quad (5.23)$$

on obtient

$$\frac{c_{\text{lum}}}{R_0^{\text{HSM}} H_{\text{ref}}^{\text{cal}}} = \frac{2.99792458 \times 10^8}{(1.50841 \times 10^{29})(2.20081 \times 10^{-18})} \simeq 9.0306 \times 10^{-4}, \quad (5.24)$$

puis

$$\boxed{\varepsilon_{\text{curv}}^{\text{HS}} \simeq 8.16 \times 10^{-7}}. \quad (5.25)$$

La lecture physique est donc la suivante : HSMD hérite de HSM une géométrie globale de rayon fini, ce qui interdit l'identification stricte à une géométrie euclidienne infinie. L'effet géométrique correspondant est toutefois de l'ordre de 10^{-6} dans le rapport de rayons pertinent pour l'échelle de Hubble.

Cette prédiction ne modifie pas les évaluations issues du noyau stabilisé (4.7). La quantité $\varepsilon_{\text{curv}}^{\text{HS}}$ mesure la courbure géométrique globale associée au rayon fini de l'hypersphère ; elle ne remplace pas la coordonnée effective A_2^{stab} , qui est contrainte séparément dans le calibrage.

Cette grandeur ne doit pas être confondue avec un paramètre phénoménologique libre Ω_k ajusté dans une métrique FLRW effective. Elle mesure ici la courbure géométrique globale associée au rayon hypersphérique R_0 hérité de la construction HSM/HSMD. Sa valeur très faible implique que les distances tardives peuvent rester quasi plates dans les tests usuels, même si la géométrie globale sous-jacente est hypersphérique.

Ainsi, la prédiction principale de ce canal n'est pas une forte déviation des distances BAO ou SNe, mais l'existence d'une échelle de courbure globale tracée par

$$\varepsilon_{\text{curv}}^{\text{HS}} = \left(\frac{c_{\text{lum}}}{R_0^{\text{HSM}} H_{\text{ref}}^{\text{cal}}} \right)^2.$$

5.1 Table de traçabilité des sorties prospectives et structurelles

Grandeur	Statut	Chaîne de calcul
Trajectoire effective $R(t)$, éventuel retournement futur et résidu constant A_0^{stab} $\rho_{a^{-3},0}^{\text{HSMD}} \simeq 3.03 \times 10^{-27} \text{ kg m}^{-3}$	Sortie structurelle dépendante de la branche A_0 Densité de masse équivalente, branche auto-cohérente	(5.1)–(5.6), 3.1 (5.9)–(5.12)
$u_{a^{-3},0}^{\text{HSMD}} \simeq 2.72 \times 10^{-10} \text{ J m}^{-3}$	Densité d'énergie équivalente, branche auto-cohérente	(5.11)–(5.14)
Dérive Sandage–Loeb $\Delta v(z)$	Cible prospective ; valeur centrale LO au point A_0^* et enveloppe du scan profilé	(5.16)–(5.20), 5.1
Courbure géométrique globale $\varepsilon_{\text{curv}}^{\text{HS}} \simeq 8.16 \times 10^{-7}$	SORTIE STRUCTURELLE CENTRALE HSM/HSMD, BRANCHE AUTO-COHÉRENTE	(5.21)–(5.25)

Ces sorties ne modifient pas les constantes HSM ni les coordonnées calibrées du noyau stabilisé. Elles précisent ce que la branche calibrée implique au-delà des confrontations observationnelles directes : évolution géométrique effective, traduction dimensionnelle du secteur a^{-3} , dérive spectroscopique future et échelle de courbure globale.

Les grandeurs de ce tableau sont des sorties centrales du noyau stabilisé. Les incertitudes issues du calibrage global ne sont pas propagées dans ce périmètre numérique. Elles ne doivent donc pas être lues comme des résultats assortis d'une covariance complète.

La trajectoire $R(t)$ décrit l'évolution effective dans le régime stabilisé. La position du rayon actuel relativement au rayon naturel est reconstruite à partir de la coordonnée élastique A_1 , via

$$a_{\text{nat}} = \frac{3}{A_1}.$$

Dans la branche auto-cohérente, cette lecture donne

$$a_{\text{nat}}^* \simeq 4.34.$$

Le signe et la valeur du terme constant (5.6) indiquent comment le bilan entre fermeture radiale solitonique et rappel élastique homogène contribue à l'évolution asymptotique dans le périmètre de cette branche.

La dérive Sandage–Loeb est une prédiction prospective : elle fournit une cible cinématique à comparer à de futures mesures de dérive du redshift. La courbure géométrique globale est une sortie structurelle HSM/HSMD ; elle n'est pas présentée comme une détection actuelle de courbure cosmologique.

Quatrième partie

Comparaison à Λ CDM

Chapitre 6

Lecture comparative avec le cadre Λ CDM

6.1 Objet de la comparaison

Le modèle Λ CDM et HSMD décrivent tous deux les observables de fond cosmologique, mais ils ne décomposent pas la dynamique dans les mêmes variables. La comparaison doit donc être faite à deux niveaux distincts.

Le premier niveau est observationnel. Il porte sur les quantités directement reconstruites ou prédites :

$$H(z), \quad E(z) = \frac{H(z)}{H_0}, \quad D_M(z), \quad D_H(z), \quad D_V(z), \quad \mu(z), \quad q_0, \quad z_t.$$

Ces grandeurs peuvent être comparées directement entre Λ CDM et HSMD.

Le second niveau est interprétatif. Il concerne les coefficients qui apparaissent dans la loi d'expansion effective. Dans Λ CDM plat, on écrit schématiquement

$$E_{\Lambda\text{CDM}}^2(a) = \Omega_\Lambda + \Omega_m a^{-3} + \Omega_r a^{-4}.$$

Dans HSMD, la branche stabilisée s'écrit

$$E_{\text{HSMD}}^2(a) = A_0 + A_1 a^{-1} + A_2 a^{-2} + A_{3,\text{sol}} a^{-3} + A_4 a^{-4}.$$

Les coefficients de même rang en a peuvent donc être rapprochés au niveau cinématique, mais ils ne doivent pas être identifiés terme à terme comme des composantes physiques équivalentes.

6.2 Dictionnaire effectif des coefficients

Le coefficient $A_{3,\text{sol}}$ est le coefficient HSMD de la composante comobile de rang a^{-3} . Il joue donc, dans la loi de fond, un rôle cinématique analogue à celui de Ω_m dans Λ CDM. Cette analogie ne constitue pas une identité de définition :

$$A_{3,\text{sol}} \neq \Omega_m^{\Lambda\text{CDM}}.$$

Dans HSMD, $A_{3,\text{sol}}$ désigne la composante solitonique stabilisée qui contribue au fond homogène comme une densité comobile. Les excitations relativistes, qui se diluent comme un rayonnement, ne sont pas incluses dans ce coefficient lorsqu'elles relèvent du rang a^{-4} .

De même, le coefficient A_0 occupe le rang constant dans $E^2(a)$, mais il ne doit pas être identifié à une constante cosmologique fondamentale. Dans HSMD, le terme constant résulte du

bilan entre fermeture radiale associée à la composante solitonique comobile et rappel élastique homogène :

$$A_0 = A_{3,\text{sol}} - \frac{A_1^2}{6}.$$

Ainsi,

$$A_0 \neq \Omega_\Lambda.$$

Il joue un rôle cinématique analogue dans la loi d'expansion effective, mais son origine physique est différente.

Le coefficient A_1 n'a pas d'équivalent dans le modèle Λ CDM minimal. Il porte la trace du rappel élastique global et permet de reconstruire la position du rayon actuel relativement au rayon naturel :

$$a_{\text{nat}} = \frac{3}{A_1}.$$

La branche auto-cohérente donne

$$a_{\text{nat}}^* \simeq 4.34.$$

Cette lecture est propre à HSMD : elle relie l'expansion observée à une position géométrique dans la dynamique radiale de l'hypersphère stabilisée.

6.3 Lecture de la discordance sur H_0

Dans Λ CDM, la discordance sur H_0 est formulée comme une tension entre une valeur globale inférée depuis les observables de fond et une valeur locale reconstruite par les échelles de distance [20]. Dans HSMD, ces deux valeurs ne sont pas interprétées comme deux mesures strictement identiques d'un même scalaire homogène.

La branche de fond calibrée fixe

$$H_{\text{ref}}^{\text{cal}} \simeq 67.91 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}. \quad (6.1)$$

Cette valeur décrit le taux de fond stabilisé. Elle est comparable aux valeurs globales reconstruites par les canaux de fond.

Dans HSMD, la valeur locale apparente de H_0 est interprétée comme une sortie de projection quadratique locale de la rotation globale. Le canal PMNS fixe la latitude effective de l'observateur,

$$\chi_{\text{obs}} \simeq 66.4^\circ. \quad (6.2)$$

À cette latitude, le rayon projeté dans le plan de rotation est

$$R_\perp = R_0 \cos \chi_{\text{obs}}, \quad (6.3)$$

et le facteur local de projection quadratique vaut

$$M_{\text{loc}} = \left(\frac{R_\perp}{R_0} \right)^2 = \cos^2 \chi_{\text{obs}}. \quad (6.4)$$

La correction primaire porte sur le taux au carré :

$$\frac{(H_0^{\text{loc,pred}})^2}{(H_{\text{ref}}^{\text{cal}})^2} = 1 + D_{\text{rot}} M_{\text{loc}}. \quad (6.5)$$

Il vient donc

$$H_0^{\text{loc,pred}} = H_{\text{ref}}^{\text{cal}} \sqrt{1 + D_{\text{rot}} \cos^2 \chi_{\text{obs}}}. \quad (6.6)$$

La forme linéarisée est

$$\frac{H_0^{\text{loc,pred}}}{H_{\text{ref}}^{\text{cal}}} - 1 \simeq \frac{D_{\text{rot}}}{2} \cos^2 \chi_{\text{obs}}. \quad (6.7)$$

Avec

$$H_{\text{ref}}^{\text{cal}} = 67.91 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}, \quad D_{\text{rot}} = 0.933, \quad \chi_{\text{obs}} \simeq 66.4^\circ,$$

on obtient

$$H_0^{\text{loc,pred}} \simeq 72.8 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}. \quad (6.8)$$

Cette valeur est à comparer à la valeur locale publiée par SH0ES/Pantheon+ [11], utilisée ici comme repère observationnel externe :

$$H_0^{\text{loc,obs}} = 73.04 \pm 1.04 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}.$$

Cette écriture repose sur deux étapes internes au cadre HSMD. La première est géométrique : χ_{obs} est une latitude relativement au plan de rotation, de sorte que $R_{\perp} = R_0 \cos \chi_{\text{obs}}$ et que le terme rotationnel quadratique projeté est $M_{\text{loc}} = \cos^2 \chi_{\text{obs}}$. La seconde relie les secteurs : la phase de Dirac observée dans le canal PMNS est interprétée comme la projection locale de la rotation globale,

$$\delta_{\text{CP}}^{\text{obs}} = 2\pi A_{\text{rot}}^{\text{glob}} \cos \chi_{\text{obs}}.$$

Cette fermeture ne signifie pas que PMNS mesure directement une coordonnée cosmologique au sens observationnel standard ; elle fournit une projection angulaire dont la conséquence locale est testée par $H_0^{\text{loc,pred}}$. La valeur locale SH0ES/Pantheon+ n'est pas consommée pour fixer χ_{obs} ; elle sert uniquement de comparaison aval.

HSMD apporte ainsi une lecture géométrique de la discordance sur H_0 . La valeur globale de fond et la valeur locale apparente ne jouent pas le même rôle : la première décrit la branche homogène stabilisée ; la seconde est reproduite comme sortie de la projection locale de la rotation globale. Cette lecture ne consomme ni amplitude HSC ni noyau de masque Pantheon+SH0ES.

6.4 Comparaison statistique de fond avec Λ CDM

La comparaison quantitative avec Λ CDM porte ici sur le niveau de fond cosmologique utilisé dans le calibrage. Elle ne constitue pas une comparaison complète des perturbations, de la croissance ou du lentillage.

On note

$$\Delta\chi^2 = \chi_{\Lambda\text{CDM}}^2 - \chi_{\text{HSMD}}^2.$$

Le fit de fond donne

$$\Delta\chi^2 \simeq 4.5, \quad (6.9)$$

en faveur de HSMD sur le jeu de données considéré. La comparaison pénalisée doit cependant tenir compte du fait que la branche HSMD consomme un paramètre effectif supplémentaire dans ce périmètre :

$$\Delta k = k_{\text{HSMD}} - k_{\Lambda\text{CDM}} = 1. \quad (6.10)$$

Avec la convention

$$\Delta\text{IC} = \text{IC}_{\text{HSMD}} - \text{IC}_{\Lambda\text{CDM}},$$

on obtient

$$\Delta\text{AIC} = -\Delta\chi^2 + 2\Delta k, \quad (6.11)$$

$$\Delta\text{BIC} = -\Delta\chi^2 + \Delta k \ln N, \quad (6.12)$$

Critère	Expression	Valeur / lecture
Gain brut en χ^2	$\Delta\chi^2$	4.5
Paramètre effectif supplémentaire	Δk	1
AIC	$-4.5 + 2$	-2.5 : favorise légèrement HSMD
BIC standard	$-4.5 + \ln(1624)$	$+2.9$: favorise légèrement Λ CDM

TABLE 6.1 – Comparaison pénalisée de la branche de fond HSMD avec Λ CDM. Les signes sont donnés pour $\text{IC}_{\text{HSMD}} - \text{IC}_{\Lambda\text{CDM}}$: une valeur négative favorise HSMD, une valeur positive favorise Λ CDM.

où N désigne le nombre de points de données du jeu de fond utilisé dans la comparaison. Pour $N \simeq 1624$, on a $\ln N \simeq 7.39$.

Cette table ne montre pas une supériorité statistique décisive de HSMD sur Λ CDM. L'AIC favorise légèrement HSMD, tandis que le BIC standard favorise légèrement Λ CDM. La conclusion est donc un match statistique globalement neutre au niveau du fond. L'apport principal de HSMD n'est pas un gain statistique massif sur le fond, mais l'interprétation géométrique des coefficients effectifs et la mise en relation des canaux H_0 , PMNS, HSC et CMB.

6.5 Terme constant et lecture de l'énergie noire

Dans Λ CDM, l'accélération cosmologique est portée par un terme constant interprété comme constante cosmologique ou énergie noire effective, dans le prolongement des observations de supernovae ayant établi l'accélération tardive de l'expansion [21, 22]. Le modèle introduit donc une composante Ω_Λ dont la densité reste constante lorsque l'univers s'étend.

HSMD ne supprime pas le besoin d'un terme constant dans la loi d'expansion effective. En revanche, ce terme n'est pas introduit comme une composante fondamentale indépendante. Il apparaît comme le résidu d'un bilan :

$$A_0 = A_{3,\text{sol}} - \frac{A_1^2}{6}.$$

Le terme constant HSMD exprime donc la différence entre une contribution de fermeture solitonique comobile et une contribution de rappel élastique homogène.

Cette différence est l'un des apports principaux de HSMD par rapport à Λ CDM. L'accélération effective n'est pas seulement paramétrée par un fluide ajouté au fond cosmologique ; elle est reliée à la structure géométrique et élastique de l'hypersphère stabilisée.

6.6 Apports propres de HSMD

La comparaison met en évidence plusieurs apports propres de HSMD.

Premièrement, HSMD distingue explicitement la valeur de fond $H_{\text{ref}}^{\text{cal}}$ et la branche locale orientée fixée par H_0^{loc} . Cette distinction fournit une lecture interne de la discordance sur H_0 , sans identifier le canal local de distance à une simple mesure redondante du fond homogène.

Deuxièmement, HSMD donne une origine structurelle au terme constant de la loi d'expansion. Le terme A_0 n'est pas posé comme une énergie noire indépendante ; il est relié à $A_{3,\text{sol}}$ et à A_1 par une condition de cohérence.

Troisièmement, HSMD introduit une composante élastique de rang a^{-1} , absente du modèle Λ CDM minimal. Cette composante permet de reconstruire une position relative au rayon naturel a_{nat} , ce qui donne une interprétation géométrique de l'état actuel de l'univers.

Quatrièmement, la densité comobile de rang a^{-3} est lue comme une composante solitonique stabilisée. Elle joue le rôle de densité de fond gravitationnelle dans le périmètre homogène. Les

observables de croissance et de lentillage appartiennent au secteur perturbatif et ne sont pas utilisées comme contraintes dans ce chapitre.

6.7 Périmètre de la comparaison

La comparaison présentée ici porte sur le fond cosmologique stabilisé et sur les coefficients effectifs de même rang dans $E^2(a)$. Elle établit un dictionnaire de fond entre HSMD et Λ CDM, sans identifier les coefficients HSMD à des fluides fondamentaux Λ CDM.

Les observables de croissance et de lentillage,

$$\sigma_8, \quad S_8, \quad f\sigma_8(z), \quad P(k), \quad C_\ell^{\text{lensing}},$$

ne sont pas utilisées ici comme contraintes indépendantes sur $A_{3,\text{sol}}$ ou sur A_0 . Elles relèvent du secteur perturbatif de HSMD, distinct du dictionnaire homogène traité dans ce chapitre.

La conclusion de ce chapitre est donc limitée mais nette : HSMD reproduit le niveau de description du fond cosmologique tout en proposant une interprétation différente des termes cosmologiques. La comparaison pénalisée (6.9)–6.1 montre une branche HSMD statistiquement compétitive, sans supériorité décisive : l’AIC favorise légèrement HSMD, tandis que le BIC standard favorise légèrement Λ CDM. Les grandeurs de fond sont comparables à celles de Λ CDM, mais les coefficients HSMD ne sont pas de simples renommages de Ω_m et Ω_Λ .

Chapitre 7

Conclusion générale de HSMD

7.1 Bilan général

HSMD prolonge HSM en introduisant une dynamique cosmologique globale de l'hypersphère maillée. Le point central n'est pas de remplacer les constantes structurelles de HSM, mais de décrire l'évolution collective de la géométrie globale à partir d'un noyau dynamique calibré. Les constantes HSM restent les constantes de structure ; HSMD ajoute des conditions globales de branche, de rotation et de contenu collectif permettant de produire une trajectoire cosmologique effective.

Dans cette construction, l'expansion tardive n'est pas posée comme une dynamique FLRW indépendante. Elle est lue comme la réponse effective d'une hypersphère compacte, maillée, élastique et globalement en rotation. Le rayon courant R_0 et la maille courante ℓ_0 sont ceux de l'état présent ; ils ne doivent pas être confondus avec un rayon naturel ou un état de repos de la structure. La dynamique HSMD distingue ainsi l'état actuel, la branche stabilisée et la position du rayon relativement à son rayon naturel.

Le calibrage tardif conduit à un noyau stabilisé capable de reproduire les observables BAO utilisées dans le calibrage, puis de générer des sorties post-calibrage. Ces sorties ne sont pas toutes de même statut : certaines sont des confrontations observationnelles actuelles, d'autres sont des sorties structurelles, et d'autres encore sont des prédictions prospectives. Cette distinction est essentielle pour ne pas confondre calibration, confrontation et falsifiabilité future.

7.2 Résultats stabilisés

Le noyau stabilisé de HSMD fournit une branche tardive cohérente dans laquelle les grandeurs cosmographiques principales sont calculées à partir du calibrage BAO. La constante de Hubble de référence, les coefficients du noyau dynamique et le terme constant effectif définissent ensemble la branche utilisée dans les prédictions post-calibrage.

La branche retenue organise notamment la décélération actuelle, le redshift de transition, l'âge cosmologique et les densités équivalentes associées au secteur dilutif de type matière. Ces grandeurs sont des sorties de la branche calibrée, et non des constantes indépendantes.

La structure du terme constant effectif est également clarifiée. Dans HSMD, ce résidu mesure le bilan entre la fermeture solitonique radiale et le rappel élastique homogène. Il n'est donc pas seulement un paramètre de fit : il porte une information sur l'équilibre global de la branche dynamique. La branche minimale compensée décrit le cas où ce bilan est proche d'une compensation effective, tandis que les profils du terme constant servent à explorer la sensibilité des sorties tardives.

7.3 Fermeture rotationnelle et tests multi-canaux

La fermeture rotationnelle constitue l'un des résultats les plus structurants du document. Dans HSM, la géométrie interne des solutions neutrino-like fournit les angles de mélange PMNS réels. Au rang où aucune orientation globale dynamique n'est introduite, la matrice PMNS effective peut être prise réelle : l'invariant de Jarlskog est alors nul et la phase de Dirac est réduite à $\delta_{\text{CP}} = 0$ ou π .

En revanche, pour que la phase de Dirac s'écarte des valeurs réelles triviales 0 et π , une orientation dynamique supplémentaire est nécessaire. Les incertitudes expérimentales restent encore larges : le voisinage de π n'est pas exclu au rang actuel. La fermeture rotationnelle doit donc être lue comme une conséquence dynamique testable du cadre HSMD, conditionnée à la stabilisation future de δ_{CP} . Dans HSMD, l'orientation dynamique susceptible de porter une phase non triviale est fournie par la rotation globale de l'hypersphère. La fermeture proposée identifie alors la phase de Dirac observée à une phase rotationnelle projetée sur la position angulaire effective de notre domaine d'observation.

Cette relation a le statut d'une fermeture HSMD de la phase complexe laissée ouverte par la structure PMNS réelle. Ses conséquences aval sont calculées sans réajustement de la position angulaire, ce qui fixe directement ses conditions de falsification.

Une fois la position angulaire fixée par le canal PMNS, trois confrontations aval sont obtenues sans réajuster cet angle : la valeur locale apparente de Hubble, la biréfringence CMB et le canal HSC/spin.

Ces trois confrontations ne constituent pas trois leviers angulaires indépendants. Deux dépendances géométriques interviennent : une branche quadratique, commune à la valeur locale apparente de Hubble et au canal HSC/spin, et une branche transverse, portée par la biréfringence CMB. Le canal HSC ne fournit donc pas une nouvelle dépendance angulaire par rapport à la valeur locale de Hubble, mais il fournit un jeu de données directionnel indépendant sur la même branche géométrique.

Le statut de la fermeture PMNS-rotation est celui d'une compatibilité multi-canaux. Une même projection issue de PMNS alimente deux branches angulaires et trois jeux de données distincts. Le résultat n'est donc pas une coïncidence isolée sur la valeur locale de Hubble, mais une fermeture géométrique confrontable. Elle est falsifiable par une stabilisation incompatible des mesures de la phase de Dirac, de la biréfringence CMB, de la valeur locale de Hubble ou des catalogues de spins galactiques.

7.4 Ce qui est résolu, ce qui est expliqué, ce qui reste prospectif

HSMD ne doit pas être lu comme une collection de coïncidences numériques. Le document distingue trois niveaux de résultats.

Le premier niveau est celui des grandeurs calibrées. Les données BAO utilisées dans le calibrage fixent le noyau tardif et ne doivent pas être recomptées comme prédictions indépendantes. Elles définissent la branche de travail.

Le deuxième niveau est celui des sorties post-calibrage confrontables. C'est le cas de la valeur locale apparente de Hubble, de la biréfringence CMB et du canal HSC/spin dans sa fenêtre active. Ces sorties consomment la branche calibrée et la fermeture PMNS-rotation, puis sont comparées à des observables distinctes. Leur statut est celui d'une compatibilité multi-canaux, non celui d'une preuve statistique complète.

Le troisième niveau est celui des sorties structurelles ou prospectives. La dérive de Sandage-Loeb, la trajectoire effective $R(t)$, la position du rayon actuel relativement au rayon naturel et l'échelle de courbure globale sont des conséquences de la branche stabilisée. Elles fournissent des cibles futures ou des diagnostics internes, mais elles ne sont pas présentées comme des détections observationnelles actuelles.

Cette séparation des statuts est un résultat méthodologique important du document. Elle empêche de surinterpréter les concordances, mais elle rend aussi les prédictions falsifiables : une amélioration des données peut renforcer la branche retenue, la déplacer ou l'invalider.

7.5 Conditions de validité et points de confrontation

Les conditions de validité de la branche retenue sont explicites.

Premièrement, la fermeture PMNS-rotation dépend de la valeur actuelle de la phase de Dirac, dont la mesure reste encore large. Une mesure future plus précise pourra déplacer la position angulaire effective, donc modifier simultanément la valeur locale apparente de Hubble, la biréfringence CMB et le canal HSC/spin.

Deuxièmement, le canal CMB est compatible avec la prédiction HSMD dans l'état actuel des mesures de biréfringence, mais il reste proche du plafond géométrique du modèle. Une valeur future stabilisée nettement au-dessus de ce plafond mettrait en difficulté cette branche de la fermeture rotationnelle.

Troisièmement, le canal HSC/spin demeure un observable directionnel délicat. La confrontation porte sur la pente brute mesurée dans la fenêtre active où l'axe spin est détecté librement. Cette sortie teste la cohérence directionnelle de la fermeture PMNS-rotation dans un catalogue de galaxies, tout en restant sensible aux effets de sélection, à la classification morphologique et à l'hétérogénéité en redshift du signal.

Quatrièmement, les profils du terme constant montrent que certaines sorties tardives dépendent de la manière dont le bilan entre rappel élastique et fermeture radiale est fermé. Le document retient une branche auto-cohérente, mais ne prétend pas que toutes les variantes dynamiques soient déjà exclues.

7.6 Falsifiabilité et suites naturelles

La falsifiabilité de HSMD repose sur plusieurs voies indépendantes.

Une première voie est la mesure future de la phase de Dirac. Si cette phase se stabilise loin de la valeur consommée ici, la position angulaire effective sera déplacée, et les trois sorties aval devront changer simultanément. La fermeture PMNS-rotation est donc directement testable par les futures expériences neutrino.

Une deuxième voie est la biréfringence CMB. La branche transverse de la fermeture PMNS-rotation impose une amplitude et un plafond géométrique. Une mesure future robuste, stable et incompatible avec ce plafond constituerait un test sévère de la fermeture rotationnelle.

Une troisième voie est le canal HSC/spin ou tout catalogue équivalent. Le test pertinent n'est pas une moyenne globale sur un catalogue hétérogène, mais la recherche d'une fenêtre active où un axe libre est retrouvé, puis la mesure de la pente brute sur l'axe fixé. De nouveaux catalogues de morphologies galactiques pourront confirmer, déplacer ou invalider cette signature.

Une quatrième voie, prospective, est la dérive Sandage-Loeb. Elle ne teste pas directement la fermeture PMNS-rotation, mais elle teste la branche cinématique tardive et le noyau stabilisé. Elle constitue donc une cible future pour distinguer HSMD de scénarios cosmologiques effectifs voisins.

7.7 Conclusion

HSMD propose une lecture dynamique de la cosmologie dans le prolongement de HSM : l'Univers observable est décrit comme l'état tardif d'une hypersphère maillée, compacte, élas-

tique et globalement en rotation. Le calibrage tardif fixe une branche effective ; les prédictions post-calibrage organisent ensuite les sorties cosmographiques, directionnelles et prospectives.

Le résultat central du document est une cohérence structurée : la géométrie PMNS réelle fournie par HSM laisse ouverte la phase complexe de Dirac, tandis que la rotation globale HSMD fournit la fermeture dynamique de cette phase consommée dans la branche étudiée. La position angulaire effective obtenue par cette fermeture alimente plusieurs confrontations aval, sans réajustement de l'angle. Les sorties actuelles sont compatibles avec cette position angulaire, tout en restant suffisamment souples pour ne pas constituer une fermeture définitive.

Le statut de HSMD, à ce stade, est donc celui d'un cadre cosmologique dynamique, calibré, cohérent et falsifiable. Il fournit une branche tardive exploitable, des prédictions directionnelles non circulaires et des cibles observationnelles futures. La confirmation ou l'invalidation de la fermeture PMNS-rotation, de la biréfringence CMB, du canal HSC/spin et de la dérive spectroscopique future permettra de décider si cette branche décrit seulement une paramétrisation effective cohérente, ou une structure géométrique plus profonde de la dynamique cosmologique.

Bibliographie

- [1] HSM Research. HSM – Hypersphere Lattice Model : A Geometric and Solitonic Construction of Fields, Particles and Effective Constants. Zenodo, version 1.0. <https://doi.org/10.5281/zenodo.20490570>, 2026.
- [2] NIST. CODATA Value : speed of light in vacuum. <https://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?c=>, 2024. CODATA recommended values of the fundamental physical constants : 2022.
- [3] NIST. CODATA Value : Newtonian constant of gravitation. <https://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?bg=>, 2024. CODATA recommended values of the fundamental physical constants : 2022.
- [4] DESI Collaboration. DESI DR2 Results II : Measurements of Baryon Acoustic Oscillations and Cosmological Constraints. *Physical Review D*, 112 :083515, 2025.
- [5] DESI Collaboration. DESI DR2 Results I : Baryon Acoustic Oscillations from the Lyman Alpha Forest. 2025.
- [6] Dan Scolnic et al. The Pantheon+ Analysis : The Full Dataset and Light-Curve Release. *The Astrophysical Journal*, 938(2) :113, 2022.
- [7] Dillon Brout et al. The Pantheon+ Analysis : Cosmological Constraints. *The Astrophysical Journal*, 938(2) :110, 2022.
- [8] Michele Moresco, Lucia Pozzetti, Andrea Cimatti, Raul Jimenez, Claudia Maraston, Licia Verde, Daniel Thomas, Annalisa Citro, Rita Tojeiro, and David Wilkinson. A 6% measurement of the Hubble parameter at $z \simeq 0.45$: direct evidence of the epoch of cosmic re-acceleration. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2016(05) :014, 2016.
- [9] Michele Moresco. Addressing the Hubble tension with cosmic chronometers. 2023.
- [10] Ivan Esteban, M. C. Gonzalez-Garcia, Michele Maltoni, Ivan Martinez-Soler, João Paulo Pinheiro, and Thomas Schwetz. NuFit-6.0 : Updated global analysis of three-flavor neutrino oscillations. *Journal of High Energy Physics*, 2024(12) :216, 2024.
- [11] Adam G. Riess, Wenlong Yuan, Lucas M. Macri, Dan Scolnic, Dillon Brout, Stefano Casertano, David O. Jones, Yukei Murakami, Louise Breuval, Thomas G. Brink, Alexei V. Filippenko, Samantha Hoffmann, Saurabh W. Jha, W. D’Arcy Kenworthy, Gagandeep Anand, John Mackenty, Benjamin E. Stahl, and Weikang Zheng. A Comprehensive Measurement of the Local Value of the Hubble Constant with $1 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ Uncertainty from the Hubble Space Telescope and the SH0ES Team. *The Astrophysical Journal Letters*, 934 :L7, 2022.
- [12] Hiroaki Aihara et al. Third data release of the hyper supprime-cam subaru strategic program. *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 74 :247, 2022.
- [13] Lior Shamir. Asymmetry in galaxy spin directions : A fully reproducible experiment using hsc data. *Symmetry*, 16(10) :1389, 2024.
- [14] Richard Stiskalek and Harry Desmond. Symmetry in hyper supprime-cam galaxy spin directions. *Research Notes of the AAS*, 8 :281, 2024.

- [15] Planck Collaboration. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, 641 :A6, 2020.
- [16] Yuto Minami and Eiichiro Komatsu. New Extraction of the Cosmic Birefringence from the Planck 2018 Polarization Data. *Physical Review Letters*, 125(22) :221301, 2020.
- [17] P. Diego-Palazuelos, J. R. Eskilt, Y. Minami, M. Tristram, R. M. Sullivan, A. J. Banday, R. B. Barreiro, H. K. Eriksen, K. M. Górski, R. Keskitalo, E. Komatsu, E. Martínez-González, D. Scott, P. Vielva, and I. K. Wehus. Cosmic Birefringence from the Planck Data Release 4. *Physical Review Letters*, 128(9) :091302, 2022.
- [18] Allan Sandage. The Change of Redshift and Apparent Luminosity of Galaxies due to the Deceleration of Selected Expanding Universes. *The Astrophysical Journal*, 136 :319–333, 1962.
- [19] Abraham Loeb. Direct Measurement of Cosmological Parameters from the Cosmic Deceleration of Extragalactic Objects. *The Astrophysical Journal Letters*, 499(2) :L111–L114, 1998.
- [20] Licia Verde, Tommaso Treu, and Adam G. Riess. Tensions between the Early and the Late Universe. *Nature Astronomy*, 3 :891–895, 2019.
- [21] Adam G. Riess et al. Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant. *The Astronomical Journal*, 116 :1009–1038, 1998.
- [22] S. Perlmutter et al. Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae. *The Astrophysical Journal*, 517 :565–586, 1999.