HSM – Modèle de l'hypersphère maillée

Une construction géométrique et solitonique des champs, des particules et des constantes effectives Public Release 1.1

HSM Research

contact@HSM-research.org

juin 2026

Table des matières

Introduction générale **11**

I Théorie HSM : construction déductive **15**

1 Cadre général et hypothèses du modèle HSM **17**
1.1 Principe directeur : mécanique classique sur $\mathbb{S}^3$ 17
1.2 Géométrie de référence, métrique et opérateurs de base 18
1.3 Cinématique classique, vitesses et dérivée matérielle 18
1.4 Hypothèses d'échelle et de régularité 19
1.5 Description de la structure HSM 19
1.6 Constantes fondamentales : définition et rôle 24
1.7 Lagrangien linéaire et équations du mouvement 25

2 Équations du mouvement (continu sur $\mathbb{S}^3$) **27**
2.1 Champs continus, configuration de référence et décomposition radial/tangent . 27
2.2 Liaisons centrales et allongement géodésique 28
2.3 Renvoi discret–continu des coefficients radiaux 28
2.4 Secteur tangent : formulation intrinsèque de référence 30
2.5 Énergies effectives et Lagrangien 30
2.6 Équations d'Euler–Lagrange 31
2.7 Équations d'onde linéaires sur $\mathbb{S}^3$ (fond uniforme) 32

3 Réduction axisymétrique et repère comobile sur $\mathbb{S}^3$ **35**
3.1 Réduction axisymétrique : Laplacien 1D le long d'une géodésique 35
3.2 Repères mobiles : rotation uniforme et translation locale le long d'une géodésique 37
3.3 Solutions en translation : ansatz comobile local et branches mobiles 38
3.4 Ansatz 2DOF axisymétrique à polarisation circulaire 40
3.5 Lien géométrie–amplitude : $\kappa_{\mathrm{curv}}(s)$ en fonction de $r(s)$ 41
3.6 Équation radiale stationnaire et système 2DOF couplé 42

4 Réduction de l'équation d'amplitude 2DOF à une Klein–Gordon cubique **45**
4.1 Réduction effective locale dans le cœur 45
4.2 Variation de l'énergie radiale en axisymétrie : opérateur L_J et conditions de raccord 46
4.3 Variation de E_{cin} et $E_{\tan}$ en cœur quasi-plat 47
4.4 Variations locales dans le cœur : E_{cin} et $E_{\tan}$ 48
4.5 Périmètre de la réduction locale du cœur 51

5 Représentation énergétique non locale et fonction de Green pondérée 57
5.1 Cadre hypersphérique, opérateur et Green pondérée . . . 57
5.2 Identité énergétique tangentielle sur $\mathbb{S}^3$ . . . 58
5.3 Cohérence énergétique au premier ordre dans le régime de screening fort . . . 59
5.4 Indice géométrique de spin : définition, comptage et tests . . . 61

6 Solutions 2DOF unitaires sur $\mathbb{S}^3$: bump et NSL 63
6.1 Cadre commun et critères de validité (sans fermeture a priori) . . . 63
6.2 Forme canonique commune du secteur 2DOF et identification de h_{eff} . . . 64
6.3 Solution bump : profil, validité, spin . . . 65
6.4 Solution NSL 2DOF : construction, validité, spin . . . 68
6.5 Filtres spectro–géométriques pour les solutions 2DOF (cadre commun) . . . 72
6.6 Fermeture du coeur pour le bump . . . 78
6.7 Fermeture du coeur pour la NSL 2DOF . . . 105

7 Cinématique locale des solutions localisées massiques 115
7.1 Cadre général : cœur massique comobile . . . 115
7.2 Critère général de compatibilité radiale . . . 118
7.3 Application canonique : Bump 2DOF . . . 119
7.4 Application 2DOF transverse : NSL 2DOF . . . 119
7.5 Portée du critère pour les familles suivantes . . . 120

8 Solutions 2DOF quasi-c_t bosoniques sur $\mathbb{S}^3$ 121
8.1 Réduction multiple–échelles près de $v = c_t$ . . . 121
8.2 Soliton d'enveloppe et champ vectoriel . . . 123
8.3 Invariants : énergie, amplitude de spin et nombre de spin (quasi-c_t 2DOF) . . . 124
8.4 Raccord cœur–extérieur et sélection fréquentielle sur $\mathbb{S}^3$ . . . 126
8.5 Amplitude–largeur et normalisation . . . 127
8.6 Comparaison avec le bump : h_{eff} commun . . . 127
8.7 Interprétation . . . 128
8.8 Dictionnaire mécanique transverse de l'onde quasi-c_t . . . 128

9 Famille conique 3DOF sur $\mathbb{S}^3$ 131
9.1 Idée générale . . . 131
9.2 Énergie, action effective (3DOF conique) . . . 132
9.3 Procédure 3DOF (LO) . . . 138
9.4 Filtres spectraux 3DOF : fenêtre, coupure, sélection par bandes . . . 139

10 Fermeture du bump 3DOF 143
10.1 Hypothèses LO et périmètre . . . 143
10.2 Profil, EDO locale et conditions de bord . . . 143
10.3 Quantification conique (rappel universel) . . . 144
10.4 Loi d'action conique : héritage du module 3DOF . . . 144
10.5 Spin du bump 3DOF . . . 144
10.6 Quantification EBK et détermination de q . . . 146
10.7 Héritage LO de la fermeture transverse du bump 2DOF . . . 146
10.8 Échelle de base du bump 3DOF . . . 148
10.9 Budget énergétique complet (LO) — bump 3DOF . . . 148
10.10 Compatibilité cinématique en mouvement . . . 148
10.11 Bump 3DOF isolé : énergie interne et source interne `s` . . . 149

11 Solution NSL 3DOF **153**
11.1 Hypothèses LO et notations . . . 153
11.2 Ansatz conique NSL et EDO du cœur . . . 153
11.3 Gaine zonale, dispersion sur $\mathbb{S}^3$ et fenêtre MSE . . . 154
11.4 Filtre EBK et détermination de q (NSL 3DOF) . . . 155
11.5 Justification EBK et action universelle . . . 155
11.6 Fermeture LO du cœur NSL 3DOF mono-lobe . . . 156
11.7 Compatibilité cinématique en mouvement . . . 157
11.8 Spin géométrique (NSL 3DOF) . . . 157

12 Soliton quasi-c_t 3DOF **159**
12.1 Cinématique conique et phase unifiée sur $\mathbb{S}^3$ . . . 159
12.2 Bilans et universalité de h_{eff} . . . 160
12.3 Spin du quasi-c_t 3DOF . . . 160
12.4 Raccord sur $\mathbb{S}^3$ et sélection spectrale zonale . . . 161
12.5 EBK du quasi-c_t 3DOF et sélection du fondamental . . . 162
12.6 Coupure locale . . . 163
12.7 Quantification de l'angle conique . . . 163
12.8 Cas limites et lecture physique . . . 163

13 Excitation radiale statique : formulation sur $\mathbb{S}^3$ et conditions d'existence **165**
13.1 Portée et objectif . . . 165
13.2 Cadre et équation générale sur $\mathbb{S}^3$ . . . 165
13.3 Paramétrisation conditionnelle de la non-linéarité radiale . . . 166
13.4 Réduction cœur quasi–plan et première intégrale . . . 166
13.5 Extérieur sphérique (faible amplitude) et raccord . . . 167
13.6 Formulation variationnelle . . . 168
13.7 Synthèse des conditions nécessaires d'existence . . . 168
13.8 Conclusion . . . 169

14 Solution Higgs-like oscillante (scalaire, $s = 0$) sur $\mathbb{S}^3$ **171**
14.1 Cadre et conventions . . . 171
14.2 Équation radiale linéaire sur $\mathbb{S}^3$ . . . 172
14.3 Mode harmonique radial localisé (cœur) . . . 172
14.4 Extérieur sphérique et raccord non rayonnant . . . 172
14.5 Énergie propre et action effective (EDP) . . . 173
14.6 Constante $h_{\text{eff}}^{(H)}$ et contrainte modale commune sur $\mathbb{S}^3$ . . . 173
14.7 Sélection spectrale et coupure d'amplitude sur $\mathbb{S}^3$ . . . 174
14.8 Construction scalaire LO de la brique $B(u)$ . . . 174
14.9 Universalité LO de la fermeture scalaire . . . 175
14.10 Projecteur scalaire $A_H(u)$ et cas monopole . . . 177
14.11 Dominance monopole en régime cœur quasi-plan . . . 177
14.12 Ancrage scalaire au raccord S^3 : brique $\zeta(u)$ et incrément corrigé . . . 178
14.13 Limite du cœur radial passif et cœur actif minimal . . . 179
14.14 Raffinement NLO minimal par compliance inverse de bord . . . 182
14.15 Cinématique interne du mode radial nu . . . 186
14.16 Fréquence observée vs. fréquence propre . . . 186
14.17 Spin et neutralité . . . 187
14.18 Statut logique du chapitre . . . 187
14.19 Résumé (Higgs-like, S^3) . . . 188

15 Champ gravitation–like sur $\mathbb{S}^3$ **191**
15.1 Positionnement, hypothèses et notations . . . 191
15.2 Green Yukawa sur $\mathbb{S}^3$ (LO) et moyenne canonique unique . . . 192
15.3 Existence du champ gravitation–like . . . 194
15.4 Régime fort gravitation–like : régularité des sources finies et statut des surfaces piégeantes . . . 196

16 Champ électromagnétique–like (solutions en mouvement) **201**
16.1 Deux normalisations du couplage EM–like et leur dictionnaire . . . 201
16.2 Maxwell–like sur $\mathbb{S}^3$ à partir du courant de Noether . . . 203
16.3 Solutions en mouvement : interaction et radiation . . . 204
16.4 Champs transverses internes (HSM pur) . . . 205

17 Champ de préclusion (exclusion mécanique locale) **207**
17.1 Positionnement et hypothèses (LO) . . . 207
17.2 Asymptotique de portée et forme LO . . . 208
17.3 Forme effective LO du canal (sans fermeture) . . . 208
17.4 Validité, séparation de canal et remarques . . . 208

18 Force forte–like (interaction attractive de portée finie) **209**
18.1 Positionnement et hypothèses (LO) . . . 209
18.2 Équation LO et Green de portée sur $\mathbb{S}^3$ . . . 209
18.3 Charge de canal forte–like (forme canonique, sans fermeture) . . . 210
18.4 Potentiel d'interaction LO (forme) . . . 210

19 Canal faible–like : existence et mise en évidence minimale à partir de la NSL 2DOF **213**
19.1 Positionnement et objectif . . . 213
19.2 Donnée primitive : la NSL 2DOF dans HSM . . . 213
19.3 Source minimale et charge effective candidate . . . 214
19.4 Champ de réponse effectif associé . . . 215
19.5 Interaction minimale entre deux sources NSL . . . 216
19.6 Traits structuraux du canal faible–like . . . 217
19.7 Forme effective "constante + charge" et perspective de fermeture . . . 217
19.8 Portée du résultat et développements ultérieurs . . . 218

20 Fermetures des champs sur les constantes fondamentales **219**
20.1 Schéma spectral commun hérité de la fermeture HSM . . . 219
20.2 Fermeture gravitation–like . . . 221
20.3 Fermeture électromagnétique–like (LO) . . . 225
20.4 Fermeture du champ Préclusion sur les constantes fondamentales . . . 232
20.5 Canal faible-like minimal : fermeture sur la branche NSL 2DOF . . . 234

21 Couplage champ–solution **243**
21.1 Critère général de sensibilité des solutions aux canaux de champ . . . 243
21.2 Couplage interne `s` et confinement 3DOF . . . 254

22 Composé Z^0–like 2DOF neutre **259**
22.1 Solution Z^0–like 2DOF neutre : composé de deux NSL 2DOF, structure et fermeture LO . . . 259
22.2 Constante de structure et angle conique (général puis canonique) . . . 276
22.3 Charge faible–like du Z^0–like . . . 277

23 Breather 2DOF neutre sur $\mathbb{S}^3$: solution *à un seul cœur* (EM-like attractif + répulsion de gradient), recouvrement fort 279
23.1 Hypothèses structurantes et cadre . . . 280
23.2 Constantes et notations (rappel minimal) . . . 280
23.3 Énergie interne du même cœur et condition stationnaire . . . 280

24 Composé six-bump 2DOF en fort recouvrement : réduction 3×2 effective 297
24.1 Existence réduite LO du composé . . . 298
24.2 Branche spinorielle minimale du composé . . . 299
24.3 Fermeture projective six-sous-lobes du composé . . . 299
24.4 Fenêtres EBK et centres spectraux . . . 303
24.5 Médiateurs inter–bandes cohérents . . . 303
24.6 Orientation interne du composé . . . 304
24.7 Opérateur réduit d'équilibre interne du composé . . . 305
24.8 Modes propres internes . . . 308

25 Bi–soliton du quasi-c_t 2DOF : prototype de la branche quasi-c_t 309
25.1 Ansatz bi–solitonique et liaison . . . 309
25.2 Solution mécanique complète à deux centres . . . 309
25.3 Lien spectral global : structure dipolaire $\ell = 1$ sur $\mathbb{S}^3$ . . . 310
25.4 Résultat de structure : support quasi-c_t à deux centres . . . 310
25.5 Expérience théorique CHSH sur le bi–soliton du quasi-c_t 2DOF : préparation . 311
25.6 Expérience théorique CHSH sur le bi–soliton du quasi-c_t 2DOF : corrélation et inégalité . . . 314

26 Bi–bump 2DOF à onde commune : prototype de la branche bump composée 319
26.1 Préambule spectral : contrainte de parité pour l'onde commune sur $\mathbb{S}^3$ . . . 319
26.2 Définition du bi–bump à onde commune . . . 320
26.3 Note de doctrine : cœur local radial et onde globale commune . . . 320
26.4 Ansatz à deux centres et onde commune . . . 323
26.5 Formulation du problème d'existence . . . 323
26.6 Rôle de la géométrie de $\mathbb{S}^3$ . . . 323
26.7 Critère directeur . . . 324
26.8 Programme de dérivation . . . 324
26.9 Critère-cadre de la branche bump composée . . . 324
26.10 Ansatz spectral du bi–bump 2DOF à onde commune . . . 326
26.11 Projection réduite sur la branche antisymétrique . . . 326
26.12 Couplage effectif de la branche antisymétrique au mode Y_{100} . . . 327
26.13 Bloc local bump et coefficient effectif . . . 327
26.14 Lemme local de non–dégénérescence du bump 2DOF . . . 328
26.15 Bifurcation locale supercritique au niveau du système réduit . . . 330
26.16 Relèvement complet de la branche antisymétrique . . . 330

27 Solutions composées 3DOF : socle, fermetures LO et contrôles 335
27.1 Prérequis et notations (rang meneur, 3DOF) . . . 335
27.2 Constantes dérivées (familles 3DOF) . . . 335
27.3 Module externe sur $\mathbb{S}^3$ et portance de couche . . . 336
27.4 Coupure de coeur, EBK et normalisations . . . 340
27.5 Cœurs multi-lobes 3DOF avec poids : cadre général (LO) . . . 340

28 Composés de bump 3DOF (canal interne s) : branches CB3 résolue et breather 347
28.1 Objet, hypothèses LO, blancheur et filtres . . . 347
28.2 Énergie géométrique de stationnarité des branches résolues . . . 348
28.3 Géométries CB2 et CB3 : réduction à une variable . . . 349
28.4 Branche CB3 résolue : optimum en δ et masse . . . 350
28.5 Branche breather (recouvrement fort) : champ composé, recouvrements et fermeture . . . 358
28.6 Z-like 3DOF multi-lobes (court-portée, neutre couleur) — forme poids . . . 372

II Ancrage de HSM sur les grandeurs observées et prédictions physiques et structure de la maille 385

29 Calibrages actifs et produits fermés 387
29.1 Introduction . . . 387
29.2 Portée, hypothèses et correspondances HSM $\leftrightarrow$ SM . . . 388
29.3 Entrées observationnelles et constantes exactes utilisées dans les calibrages LO 390
29.4 Calibrage du résidu isotrope effectif du seuil q_2 . . . 392
29.5 Calibrage de κ_μ par ancrage m_W et ratio théorique $Z0$/NSL2 . . . 393
29.6 Calibrage de l'échelle microscopique ℓ_0 par l'impédance du vide (LO) . . . 397
29.7 Fermeture du produit $P_{\rho R} := \rho R_0$ par compatibilité bump 2DOF . . . 399
29.8 Fermeture du produit $Q_r := \kappa_r R_0$ par G_N (LO) . . . 400
29.9 Séparation micro-locale de R_0, ρ, T, κ_r . . . 403
29.10Synthèse des constantes fondamentales séparées (LO) . . . 405

30 Prédictions et comparaisons 407
30.1 Breather 2DOF : rapports LO des écarts de masse au carré . . . 412
30.2 Breather 2DOF : masses absolues et borne sur le plancher quartique . . . 414
30.3 Composé six-bump 2DOF : sortie interne de la réduction 3×2 . . . 418
30.4 Bump 3DOF isolé : sorties internes de source . . . 420
30.5 CB3 : prédictions LO des masses couleur–blanches baryon-like . . . 421
30.6 Higgs-like radial (scalaire, $s_g = 0$) : prédiction de schéma par cœur actif minimal et raffinement NLO . . . 424
30.7 Photon : prédictions LO de masse, vitesse et polarisations . . . 427
30.8 NSL 3DOF : sorties numériques avec constantes HSM séparées . . . 433
30.9 Breathers 3DOF : diagnostic de fermeture et masses avec constantes HSM séparées 436
30.10Z-like 3DOF (Z2, Z3) : diagnostic de fermeture avec constantes HSM séparées . 441
30.11Canal faible–like : valorisation numérique minimale des interactions monopolaires W–like et Z^0–like avec constantes HSM séparées . . . 444
30.12Synthèse finale : prédictions et sorties théoriques . . . 446

31 Réalisation constructive de la maille dodécaédrique 451
31.1 Constantes effectives à reproduire . . . 451
31.2 Cellule dodécaédrique enrichie . . . 452
31.3 Transmission faciale à cinq sous-canaux . . . 453
31.4 Existence constructive . . . 454
31.5 Rôle du 120-cell . . . 455
31.6 Grandeurs locales dépendantes de la réalisation . . . 455
31.7 Conclusion . . . 455

III Lien avec les théories physiques effectives 457

32 Introduction : objet, méthode et portée 459

33 HSM et domaine quantique effectif 461
33.1 Vue d'ensemble 461
33.2 Mécanique quantique effective 462
33.3 Théorie quantique des champs effective locale 465
33.4 Secteurs d'interaction du domaine quantique 467
33.5 Structures internes du domaine quantique 471
33.6 Lecture EFT à basse énergie 474

34 HSM et domaine relativiste et gravitationnel 479
34.1 Cinématique relativiste effective 479
34.2 Gravitation effective et limite newtonienne 481
34.3 Lecture de type relativité générale 482
34.4 Portée du lien gravitationnel 485

35 Conclusion : portée et limites du lien 487

Conclusion générale 491

Introduction générale

Genèse de la construction. Le point de départ de ce travail ne vient pas d'une tentative abstraite d'unification des théories physiques existantes, mais d'une observation plus simple issue des systèmes mécaniques non linéaires.

Certains systèmes classiques non linéaires montrent déjà qu'une excitation vibratoire n'est pas nécessairement condamnée à se disperser. L'équation de sine–Gordon, équation différentielle non linéaire emblématique de la théorie classique des solitons [18, 19, 20], en fournit un exemple : elle admet des solutions localisées de type soliton, des interactions entre orientations internes et des états liés de type breather.

Ces systèmes montrent également qu'une interaction entre solutions peut émerger naturellement sans être postulée comme force extérieure : attraction ou répulsion selon l'orientation interne, états liés de faible énergie (*breathers*) et modes propagatifs non massiques dont l'énergie peut se présenter sous forme de paquets localisés.

Ces observations soulèvent une question naturelle : si un système mécanique classique peut déjà produire des solutions localisées porteuses d'énergie, d'inertie effective, d'interactions et d'états liés, jusqu'où peut-on pousser cette idée lorsque le support n'est plus une chaîne ouverte, mais une géométrie fermée comme une sphère ou une hypersphère ?

L'idée mécanique fondatrice. Le cadre construit dans ce manuscrit part d'une hypersphère $\mathbb{S}^3$ munie d'une structure mécanique interne maillée capable de porter des familles de solutions plus structurées que celles rencontrées dans les systèmes solitoniques unidimensionnels. On peut se représenter cette structure comme un réseau d'éléments inertiels couplés par des liaisons mécaniques : ces éléments peuvent vibrer tangentiellement au support, décrire localement des mouvements de rotation dans les plans tangents et en raison de la courbure de l'hypersphère, induire une déformation radiale de celle-ci.

Cette déformation modifie localement l'état de tension mécanique et introduit une non-linéarité géométrique. Deux conséquences apparaissent alors naturellement. D'une part, le sens de rotation interne peut engendrer des interactions orientées entre solutions. D'autre part, une solution localisée qui déforme radialement le support modifie l'état de tension mécanique dans son voisinage. Deux solutions voisines peuvent alors interagir par l'intermédiaire de cette déformation commune du support, ce qui fournit un mécanisme naturel d'attraction lié à l'amplitude de la réponse radiale.

Le support n'est alors plus un simple décor géométrique : il devient acteur de la dynamique.

Pourquoi une hypersphère compacte ? Une seconde idée joue un rôle central : la compacité du support.

Sur un espace ouvert, une excitation localisée peut souvent être étudiée comme un objet isolé, sans contrainte globale de fermeture. Sur un support compact, cette liberté disparaît. Les champs et les solutions doivent se raccorder à eux-mêmes, satisfaire des conditions de retour global et s'inscrire dans une structure spectrale imposée par la géométrie. Même lorsque les solutions sont non linéaires, leur existence reste contrainte par les modes propres du support, les conditions de raccord et les niveaux admissibles associés au rebouclage.

Mais la compacité produit plus qu'une simple discrétisation énergétique. Elle modifie la nature même des solutions admissibles. Des configurations à plusieurs centres localisés, spatialement distincts mais liés par les conditions de rebouclage du support, deviennent alors des solutions admissibles du système.

L'étude initiale de ces mécanismes sur des géométries sphériques conduit naturellement à l'hypersphère $\mathbb{S}^3$. Là où une sphère ordinaire contraint essentiellement les rotations tangentielles à une structure à deux degrés de liberté, $\mathbb{S}^3$ ouvre des classes supplémentaires de solutions à deux ou trois degrés de liberté. La géométrie ne fixe donc pas seulement le décor ; elle enrichit directement le catalogue dynamique des solutions possibles.

La proposition HSM. HSM (*Hypersphère Maillée*) est d'abord l'étude d'un système mécanique compact défini sur l'hypersphère $\mathbb{S}^3$. Le point de départ n'est pas l'identification immédiate de ce système à l'Univers physique, mais l'analyse des solutions qu'une telle mécanique peut porter lorsque le support possède des degrés tangentiels, des déformations radiales, des retours globaux, des raccords localisés et une structure interne de maille.

Dans ce cadre, la question première est purement mécanique : quelles familles de solutions émergent d'un support compact où les mouvements tangentiels peuvent induire une réponse radiale, où la compacité impose des conditions de retour, et où les rotations internes fournissent des degrés d'orientation supplémentaires ?

Le couplage radial–tangent propre au support hypersphérique conduit localement à une équation différentielle non linéaire de type Klein–Gordon cubique, dont les solutions localisées fournissent les premières familles de solutions HSM.

Cette dynamique admet plusieurs familles structurées : solutions de type bump, solutions NSL, modes perturbatifs propagatifs, solutions purement radiales, configurations à deux ou trois degrés de liberté, solutions liées multi-centres et structures composées.

Les familles massiques suivent une loi énergétique de type

$$E = E_0\,\gamma, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c_t^2}},$$

où v est la vitesse effective de propagation de la solution et c_t la vitesse maximale de propagation tangentielle dans la maille.

Plus généralement, les familles construites partagent une même constante d'action effective h_{eff} dans une loi commune

$$E = h_{\text{eff}}\,\omega.$$

La rotation interne permet en outre de définir un nombre de spin géométrique, qui classe naturellement les solutions en familles de spin 1/2, de spin 1, ou de spin 0 pour certaines excitations purement radiales.

Ce n'est qu'à partir de ce catalogue mécanique de solutions que se pose la question physique : les propriétés qui émergent de HSM peuvent-elles être mises en correspondance avec certaines structures observées dans la physique connue ?

Ce que HSM apporte de nouveau. HSM est une théorie déterministe au niveau fondamental : elle part d'une dynamique mécanique classique sur $\mathbb{S}^3$, et non d'une loi probabiliste première. Dans les régimes étudiés, certaines structures habituellement associées à la mécanique quantique apparaissent comme des lectures effectives de la dynamique sous-jacente, et non comme des postulats de départ.

La nouveauté de HSM n'est pas d'ajouter une interaction ou un secteur phénoménologique supplémentaire à la physique connue. Elle est de proposer un cadre mécanique unique dans lequel plusieurs structures habituellement postulées séparément apparaissent comme des propriétés de solutions sur $\mathbb{S}^3$: inertie effective de type relativiste, constante d'action commune,

spin géométrique, charges orientées, interactions entre solutions localisées, états liés, modes non massiques et structures composées.

Avant même le calibrage numérique, l'analyse des solutions HSM fait apparaître une architecture discrète qui n'est pas posée comme donnée initiale : des coefficients réduits de charge de champ pour les familles chargées, des motifs 1, 2/3 et 1/3 transmis par l'appariement source–champ du canal associé au champ électromagnétique, une constante de structure fine adimensionnée proche de 1/137 issue de la fermeture du même canal, trois niveaux d'énergie au repos admissibles pour les familles associées aux leptons et aux quarks, et un niveau unique pour les solutions associées aux bosons W et Z^0.

La même analyse fait également apparaître quatre canaux d'interaction identifiables, dans les régimes appropriés, aux secteurs gravitationnel, électromagnétique, faible et fort. Le secteur photon-like apparaît en particulier comme un mode transverse non massif, à deux polarisations physiques, compatible à l'ordre dominant avec une lecture de type Maxwell.

La compacité de $\mathbb{S}^3$ permet en outre des solutions composées globales, dont certaines réalisent plusieurs centres localisés au sein d'un même état. Dans le secteur associé aux modes non massiques, cette propriété sert de support à l'analyse des corrélations non factorisables.

Dans les formulations usuelles du Modèle Standard, les masses des particules sont largement introduites par des paramètres ou des couplages déterminés expérimentalement, plutôt que déduites d'une mécanique commune unique. HSM propose une autre possibilité : un petit nombre d'entrées de calibrage fixe les échelles mécaniques et certains seuils structuraux, puis les masses des solutions identifiables sont calculées à partir de la dynamique interne du modèle.

Le catalogue mécanique de HSM est plus large que l'inventaire actuel des états identifiés du Modèle Standard. Certaines familles trouvent une correspondance naturelle avec des structures observées ; d'autres restent sans identification expérimentale directe et constituent des candidats à des prédictions nouvelles du cadre.

Calibrage, sorties et falsifiabilité. La confrontation numérique de HSM repose sur un nombre limité d'entrées de calibrage, toutes explicitement déclarées. Les observables déclarées comme entrées de calibrage sont :

- la constante de Planck, pour fixer l'échelle d'action effective,
- la vitesse de la lumière, pour fixer la vitesse maximale de propagation,
- la masse du boson W, pour fixer l'échelle faible,
- l'impédance du vide, pour fixer l'échelle électromagnétique interne,
- la constante de Newton, pour fixer l'échelle gravitationnelle globale,
- la hiérarchie des masses des leptons chargés, pour fixer le triplet spectral.

Une fois ces entrées déclarées, les chaînes fermées du manuscrit produisent des sorties quantitatives comparables aux valeurs de référence observées :

- la masse de la solution HSM associée à l'électron,
- la masse de la solution neutre HSM associée au Z^0,
- la masse du secteur radial associé au boson de Higgs,
- les masses de composés HSM identifiables aux baryons observés,
- les écarts de masse du secteur associé aux neutrinos,
- les angles internes du composé tri–breather, raccordés ensuite à la structure PMNS,
- le quantum élémentaire de charge déduit de la fermeture électromagnétique,
- les propriétés de la solution associée au photon : masse nulle à l'ordre dominant et deux polarisations tra

Dans chaque chaîne numérique, le statut d'une valeur est distingué explicitement. Une grandeur consommée comme entrée de calibrage n'est pas présentée comme une prédiction indépendante. Réciproquement, une grandeur affichée comme prédiction ou sortie numérique doit

être traçable à une équation, une fermeture, une hypothèse ou une convention de normalisation clairement annoncée.

Cette discipline vaut aussi pour les niveaux d'approximation. Le manuscrit distingue les résultats obtenus à l'ordre dominant, les raffinements d'ordre supérieur, les prédictions indépendantes, les sorties théoriques calculées, les diagnostics de sélection de branches et les domaines de validité associés.

Organisation du manuscrit. Le document est organisé en trois grandes parties.

La première partie construit le cadre théorique. Elle introduit la mécanique HSM sur $\mathbb{S}^3$, les équations du mouvement, les solutions élémentaires à deux et trois degrés de liberté, les champs effectifs associés, les couplages champ–solution, puis les composés à deux et trois degrés de liberté.

La deuxième partie rassemble les calibrages observationnels actifs, les produits fermés, les constantes séparées et les prédictions numériques. Elle distingue les entrées utilisées pour fixer une échelle ou un produit structurel, les sorties obtenues sans recours à l'observable comparée, les sorties théoriques calculées et les diagnostics de sélection de branches. Les tableaux de synthèse doivent être lus comme une carte de traçabilité des chaînes de fermeture, et non comme une liste homogène de nombres de même statut.

La réalisation constructive de la maille intervient après la séparation des constantes HSM. Elle n'est pas utilisée pour calibrer les prédictions observationnelles ; elle établit la compatibilité d'une structure discrète avec les constantes séparées et les contraintes spectrales retenues.

La troisième partie établit le lien avec les théories physiques effectives. Elle s'appuie sur les éléments construits dans la partie théorique et montre comment certains régimes de HSM se lisent comme domaines effectifs : mécanique quantique réduite, théorie de champs effective locale, cinématique relativiste, limite gravitationnelle et lectures à basse énergie. Chaque lien est présenté avec son régime de validité et son statut logique.

Portée. Le manuscrit présente les chaînes de fermeture qui produisent des sorties calculées, des prédictions comparables aux observables et des diagnostics de sélection de branches. Chaque résultat est associé à son rang d'approximation, à son domaine de validité et aux équations qui le définissent.

L'objectif est de fournir une théorie contrôlable ligne par ligne : chaque résultat doit pouvoir être relié à une équation, à une fermeture, à une normalisation, à une entrée de calibrage ou à une hypothèse explicitement identifiée.

Dans cette perspective, la valeur du document ne repose pas sur une analogie de vocabulaire avec les théories existantes, mais sur la continuité logique entre les équations internes, les solutions, les champs, les fermetures, les sorties numériques traçables et les comparaisons observationnelles.

Première partie

Théorie HSM : construction déductive

Chapitre 1

Cadre général et hypothèses du modèle HSM

1.1 Principe directeur : mécanique classique sur $\mathbb{S}^3$

Le point de départ de HSM est le postulat d'un support géométrique fondamental : une 3-sphère $\mathbb{S}^3$ de rayon de référence R_0, c'est-à-dire l'hypersphère plongée dans $\mathbb{R}^4$. L'espace ambiant $\mathbb{R}^4$ n'intervient ici que comme outil de représentation géométrique ; la dynamique fondamentale est formulée sur la variété $\mathbb{S}^3$ elle-même.

Cette structure n'est pas introduite comme une reformulation des cadres usuels de la physique relativiste ou quantique, mais comme la variété porteuse fondamentale du modèle.

Sur cette variété, la dynamique fondamentale est postulée relever exclusivement de la mécanique classique des milieux continus. Le paramètre temporel t y est un temps absolu au sens du modèle fondamental : aucune structure lorentzienne primitive n'est postulée à ce stade.

Les équations fondamentales sont supposées invariantes par translation temporelle et sous l'action du groupe d'isométries de $\mathbb{S}^3(R_0)$.

La quantité c_t introduite plus loin désigne une vitesse caractéristique de propagation élastique du milieu, déterminée par ses paramètres mécaniques. Elle n'est pas postulée comme un invariant cinématique universel.

Cadres de description. On distinguera un cadre d'observation attaché à la configuration de référence sur $\mathbb{S}^3(R_0)$, et des descriptions comobiles associées aux solutions localisées en mouvement. Ces descriptions correspondent à des choix de variables et de repères sur une même variété de support ; elles n'introduisent aucune structure cinématique relativiste au niveau fondamental.

Résultats mathématiques standards. Les développements qui suivent utilisent des objets mathématiques classiques : métrique canonique de $\mathbb{S}^3$, opérateurs intrinsèques, spectre du laplacien, harmoniques hypersphériques, polynômes de Gegenbauer et fonctions de Green associées aux opérateurs elliptiques de type Helmholtz ou Yukawa. Lorsque ces résultats sont employés dans leur forme standard sans redémonstration complète, ils relèvent des références mathématiques usuelles [13, 14, 15]. Les constantes, normalisations et noyaux propres à HSM sont en revanche définis et fermés par les équations et labels internes du manuscrit.

1.2 Géométrie de référence, métrique et opérateurs de base

On munit la sphère de référence $\mathbb{S}^3(R_0)$ de sa métrique riemannienne canonique. Dans les coordonnées hypersphériques standard (χ, θ, ϕ), avec

$$(\chi, \theta, \phi) \in [0, \pi] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi],$$

la métrique s'écrit

$$ds^2 = R_0^2\Big(d\chi^2 + \sin^2\chi\, d\theta^2 + \sin^2\chi\, \sin^2\theta\, d\phi^2\Big).$$

La mesure volumique riemannienne associée est

$$dV = \sqrt{\det g}\, d\chi\, d\theta\, d\phi = R_0^3 \sin^2\chi\, \sin\theta\, d\chi\, d\theta\, d\phi.$$

Sauf mention explicite du contraire, les intégrales s'entendent sur la sphère de référence :

$$\int_{\mathbb{S}^3(R_0)} (\cdot)\, dV.$$

Sauf mention contraire, tous les opérateurs différentiels sont entendus intrinsèquement sur $\mathbb{S}^3(R_0)$. Les opérateurs de base sont le gradient intrinsèque ∇ et le laplacien de Beltrami $\Delta_{\mathbb{S}^3}$ associés à cette métrique. Pour un champ scalaire u, on a en coordonnées

$$\Delta_{\mathbb{S}^3} u = \frac{1}{R_0^2}\left(\partial_{\chi\chi} u + 2\cot\chi\, \partial_\chi u + \frac{1}{\sin^2\chi}\Big[\partial_{\theta\theta} u + \cot\theta\, \partial_\theta u + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_{\phi\phi} u\Big]\right).$$

Ces expressions constituent le socle géométrique des développements ultérieurs. Les champs de déplacement détaillés, les opérateurs mécaniques spécialisés et les énergies effectives seront introduits plus loin, après la mise en place de la construction discrète et du passage au continu.

1.3 Cinématique classique, vitesses et dérivée matérielle

On distinguera deux niveaux de cinématique :

— une *cinématique globale* de transport à grande échelle sur $\mathbb{S}^3$, caractérisée par un taux typique Ω. Lorsqu'un motif est advecté avec une vitesse tangentielle caractéristique v sur l'échelle géométrique R_0, on introduit l'ordre de grandeur cinématique

$$v = O(\Omega R_0).$$

— une *cinématique locale rapide* d'oscillation, décrite par une pulsation caractéristique ω_0 associée à la dynamique interne des structures localisées.

Ces deux niveaux de description correspondent en général à des échelles distinctes : un transport lent à l'échelle géométrique du support, et une dynamique rapide à l'échelle locale des solutions.

La dérivée matérielle agissant sur un champ scalaire u porté par le milieu est définie par

$$D_t u = \partial_t u + \vec{v} \cdot \nabla u,$$

où $\vec{v}(\chi, \theta, \phi, t)$ désigne le champ de vitesse matérielle du milieu, entendu comme un champ tangent à $\mathbb{S}^3$. Dans cette écriture, $\vec{v} \cdot \nabla u$ désigne la dérivée directionnelle intrinsèque de u suivant le champ de vitesse. Pour les champs vectoriels ou tensoriels, la dérivée matérielle covariante correspondante sera introduite lorsque nécessaire.

Cette structure purement classique sera utilisée pour décrire les solutions localisées en mouvement, ainsi que les descriptions comobiles qui leur sont associées.

1.4 Hypothèses d'échelle et de régularité

Le modèle est développé dans un régime de séparation d'échelles

$$\ell_0 \ll \lambda \ll R_0,$$

où ℓ_0 désigne l'échelle microscopique du réseau discret, λ l'échelle typique des structures localisées étudiées, et R_0 l'échelle globale de courbure de la configuration de référence.

Dans ce régime, le passage du réseau discret au milieu continu est entendu selon une procédure de type Cauchy–Born adaptée à la géométrie de $\mathbb{S}^3$. Sauf mention contraire, les champs continus introduits plus loin seront supposés suffisamment réguliers pour que les intégrations par parties, projections et développements asymptotiques utilisés dans la suite soient bien définis.

Lorsque des linéarisations à l'ordre dominant (LO) seront invoquées, elles porteront sur des déformations locales faibles à l'échelle des structures considérées. Dans le régime $\lambda \ll R_0$, la courbure globale du support intervient alors à travers les opérateurs intrinsèques de la géométrie de fond, tandis que les corrections locales de courbure sont contrôlées par le petit paramètre λ/R_0.

1.5 Description de la structure HSM

Le modèle HSM (hypersphère maillée masse–ressort) décrit un milieu élastique construit sur la sphère de référence $\mathbb{S}^3$ de rayon R_0. Le milieu y est représenté par un réseau de nœuds, reliés par des *liaisons centrales* (ressorts axiaux) portées par des arêtes géodésiques. Nous notons

$\ell_0 > 0$ (pas du réseau), k (raideur d'une liaison), $z \in \mathbb{N}$ (coordination : nombre de liaisons par nœud

À chaque nœud est associée une cellule volumique de référence $\mathcal{V}_{\ell_0}$ de l'ordre de ℓ_0^3. [1]

Pour deux nœuds voisins (i, j), la longueur d'arête au temps t est notée $L_{ij}(t)$; l'allongement axial

$$\delta\ell_{ij} := L_{ij}(t) - \ell_0$$

porte la déformation locale de la liaison.

1.5.1 Maille locale de référence et renvoi discret–continu

Cadre géométrique. On considère une maille locale de référence sur la 3-sphère $\mathbb{S}^3(R_0)$. À ce stade, sa géométrie précise n'est pas fixée : la théorie ne consomme que les grandeurs de renvoi discret–continu nécessaires au passage local vers le milieu effectif.

Une réalisation régulière particulière relève de l'analyse de maille. Elle n'est pas postulée dans les fermetures locales des familles de solutions.

Dans la présente section, on n'utilise que les caractéristiques génériques d'une maille locale : le pas ℓ_0, la coordination effective z, le volume élémentaire $\mathcal{V}_{\ell_0}$, ainsi que les facteurs géométriques de renvoi qui apparaissent dans le passage discret–continu.

Notations de voisinage. Pour une cellule C du pavage, on note $\mathcal{N}(C)$ l'ensemble de ses cellules adjacentes de rang 1, c'est-à-dire son voisinage immédiat. Le cardinal de $\mathcal{N}(C)$ est noté z lorsque le contexte impose une coordination uniforme.

La géométrie de ce pavage fournit l'échelle discrète ℓ_0, prise dans la suite comme longueur caractéristique du support discret de référence.

1. À ce stade de la construction locale, $\mathcal{V}_{\ell_0}$ désigne le volume élémentaire associé au passage discret–continu. Sa géométrie fine n'est pas requise pour définir les équations locales : seules les grandeurs effectives qui interviennent dans les fermetures mécaniques sont consommées explicitement.

Approximation Cauchy–Born (calotte quasi-plate). Dans la calotte quasi–plane [2] et pour de petits déplacements, on considère sur la sphère de référence $\mathbb{S}^3(R_0)$ un champ scalaire radial $r(x)$, représentant l'amplitude du déplacement normal à la sphère de référence, et un champ de déplacement tangent $\vec{u}_{\tan}(x)$.

Pour une arête (i, j) de longueur géodésique de repos ℓ_0, de tangente unitaire $\hat{t}_{ij}$ orientée de x_i vers x_j, l'allongement axial au premier ordre reçoit deux contributions : une variation tangentielle des extrémités sur la sphère de référence, et une variation de longueur d'arc induite par le déplacement radial.

À métrique fixée sur $\mathbb{S}^3(R_0)$, la première variation de la distance géodésique entre deux points déplacés tangentiellement donne

$$\delta\ell_{ij}^{\tan} = \hat{t}_{ij} \cdot (\Pi_{j\to i}\vec{u}_{\tan}(x_j) - \vec{u}_{\tan}(x_i)),$$

où $\Pi_{j\to i}$ désigne le transport parallèle le long de l'arête géodésique de x_j vers x_i.

Par ailleurs, si l'arête est portée par une sphère de rayon local $R_0 + \bar{r}_{ij}$, avec

$$\bar{r}_{ij} := \frac{r(x_i) + r(x_j)}{2},$$

alors, à angle géodésique fixé, sa longueur d'arc est multipliée au premier ordre par le facteur $1 + \bar{r}_{ij}/R_0$. Comme $\ell_0 = R_0\alpha_{ij}$, on obtient

$$\delta\ell_{ij}^{\mathrm{rad}} = \alpha_{ij}\,\bar{r}_{ij} = \frac{\ell_0}{R_0}\,\bar{r}_{ij}.$$

Ainsi,

$$\delta\ell_{ij} = \hat{t}_{ij} \cdot (\Pi_{j\to i}\vec{u}_{\tan}(x_j) - \vec{u}_{\tan}(x_i)) + \frac{\ell_0}{R_0}\,\frac{r(x_i) + r(x_j)}{2} + O\left(\|\vec{u}_{\tan}\|^2, \frac{|r|^2}{R_0}, \ell_0\,|\nabla r|\,\frac{\ell_0}{R_0}\right). \quad (1.1)$$

Dans la calotte quasi–plane, le transport parallèle entre voisins est défini par la connexion de Levi–Civita de $\mathbb{S}^3(R_0)$. Pour un champ tangent suffisamment régulier à l'échelle ℓ_0, on a alors le développement au premier ordre

$$\Pi_{j\to i}\vec{u}_{\tan}(x_j) - \vec{u}_{\tan}(x_i) = \ell_0\,\nabla^{\mathbb{S}^3}_{\hat{t}_{ij}}\vec{u}_{\tan}(x_i) + O(\ell_0^2), \quad (1.2)$$

où $\nabla^{\mathbb{S}^3}$ désigne la dérivée covariante associée à la métrique de la sphère de référence.

Canal radial de cohérence discrète. Dans la fermeture discrète fondée sur les seules liaisons centrales géodésiques, l'énergie obtenue à partir de (1.1) produit, au premier ordre, le canal tangent ainsi qu'une contribution locale quadratique en r. En revanche, elle ne génère pas à ce niveau de terme de voisinage de type $|\nabla_{\mathbb{S}^3} r|^2$, car la contribution radiale à $\delta\ell_{ij}$ dépend de la moyenne

$$\bar{r}_{ij} := \frac{r(x_i) + r(x_j)}{2},$$

et non de la différence $r(x_j) - r(x_i)$.

Le terme de gradient radial doit donc provenir d'un canal discret distinct : un canal de cohérence radiale entre cellules voisines. Cette hypothèse ne fixe pas une maille particulière. Elle affirme seulement que la donnée locale $\mathcal{M}$ contient, en plus des liaisons centrales, un sous-canal radial capable de comparer les amplitudes radiales de deux cellules adjacentes.

On introduit pour chaque liaison (i, j) une raideur réduite positive

$$\alpha_r := \frac{k_{\mathrm{coh}}}{k} > 0,$$

2. Régime $\lambda/R_0 \ll 1$ pour les longueurs d'onde caractéristiques λ des champs considérés.

où k est la raideur centrale apparaissant dans (1.8) et k_{coh} la raideur du canal de cohérence radiale. L'énergie discrète minimale associée est alors

$$E_{r,\mathrm{disc}} = \frac{k_{\mathrm{coh}}}{2} \sum_{(i,j)} \big(r(x_j) - r(x_i)\big)^2 = \frac{k\alpha_r}{2} \sum_{(i,j)} \big(r(x_j) - r(x_i)\big)^2. \tag{1.3}$$

La positivité de α_r assure que ce canal augmente l'énergie lorsque deux cellules voisines portent des amplitudes radiales différentes.

Pour des champs scalaires lisses à l'échelle ℓ_0, on a

$$r(x_j) - r(x_i) = \ell_0 \, \nabla^{\mathbb{S}^3}_{\hat{t}_{ij}} r(x_i) + O(\ell_0^2). \tag{1.4}$$

Après moyenne d'orientation et passage au continu, ce terme fournit le canal radial

$$E_{r,\mathrm{cont}} = \int_{\mathbb{S}^3(R_0)} \frac{T_r}{2} \, |\nabla_{\mathbb{S}^3} r|^2 \, dV, \qquad T_r = \frac{k\alpha_r \ell_0^2}{\mathcal{V}_{\ell_0}} \, \Xi_r, \tag{1.5}$$

où Ξ_r désigne le facteur géométrique issu de la moyenne d'orientation du voisinage.

On introduit alors la constante sans dimension κ_r par

$$T_r = \kappa_r \, T. \tag{1.6}$$

En utilisant

$$T = \frac{k\ell_0^2}{\mathcal{V}_{\ell_0}} \Xi_{\tan}, \qquad T_r = \frac{k\alpha_r \ell_0^2}{\mathcal{V}_{\ell_0}} \Xi_r,$$

on obtient la fermeture structurelle

$$\boxed{\kappa_r = \alpha_r \, \frac{\Xi_r}{\Xi_{\tan}}.} \tag{1.7}$$

Ainsi, κ_r n'est pas une constante indépendante ajoutée au continu : c'est la sortie effective du rapport réduit de raideur radial α_r et des facteurs géométriques de renvoi contenus dans $\mathcal{M}$.

1.5.2 Énergie discrète et moyennes d'orientation

Énergie discrète effective. En comptant chaque liaison une seule fois, on considère la paramétrisation discrète effective suivante du secteur linéarisé :

$$E_{\mathrm{disc}} = \sum_i \frac{m}{2} \Big(\dot{r}_i^{\,2} + |\dot{\vec{u}}_{\tan,i}|^2 \Big) + \sum_{(i,j)} \frac{k}{2} \, \delta\ell_{ij}^2 + \sum_{(i,j)} \frac{k\alpha_r}{2} \, \big(r(x_j) - r(x_i)\big)^2, \tag{1.8}$$

où m est la masse associée au nœud, k la raideur des liaisons centrales, et $\alpha_r > 0$ le rapport réduit de raideur du canal radial de cohérence.

Le troisième terme ne résulte pas des seules liaisons centrales géodésiques. Il représente le canal radial de cohérence introduit dans (1.3). Ce canal appartient à la donnée locale enrichie $\mathcal{M}$: il n'impose pas une réalisation géométrique particulière de la maille, mais seulement l'existence d'un sous-canal radial positif entre cellules voisines. La valeur effective de α_r, et donc celle de κ_r, dépendra de la réalisation locale choisie pour $\mathcal{M}$.

La somme sur les liaisons s'écrit

$$\sum_{(i,j)} (\cdot) = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} (\cdot),$$

le facteur $1/2$ évitant le double comptage. Lorsque l'on passe à une moyenne locale sur les directions de voisinage, on utilise alors

$$\sum_{j \in \mathcal{N}(i)} (\cdot) = z \, \langle \cdot \rangle_{\mathrm{voisins}},$$

où z désigne le nombre de voisins de rang 1 du nœud considéré.

Moments d'orientation. Dans la calotte quasi–plane, le voisinage d'un nœud est identifié au premier ordre à un espace euclidien tridimensionnel local, décomposé en une direction radiale $\hat{e}_r$ et un plan tangent local. La distribution des directions de liens autour d'un nœud est alors décrite par le tenseur moyen

$$\mathsf{M} := \langle \hat{t} \otimes \hat{t} \rangle_{\text{liens}}.$$

On note $P_{\tan} := I_3 - \hat{e}_{\text{rad}} \otimes \hat{e}_{\text{rad}}$ le projecteur orthogonal sur le plan transverse à la direction géodésique radiale locale. La trace tangentielle d'un tenseur A est alors définie par

$$\operatorname{tr}_{\tan} A := \operatorname{tr}(P_{\tan} A).$$

Sous hypothèse d'isotropie locale, on introduit les moments d'orientation

$$\eta_{\tan} := \operatorname{tr}_{\tan} \mathsf{M}, \qquad \eta_r := \langle (\hat{t} \cdot \hat{e}_{\text{rad}})^2 \rangle_{\text{liens}}, \qquad \eta_0 := 1. \tag{1.9}$$

Valeurs sous isotropie locale idéale. Dans l'approximation isotrope 3D idéale,

$$\langle \hat{t} \otimes \hat{t} \rangle = \frac{1}{3} I_3.$$

On obtient alors

$$\eta_r = \hat{e}_r^{\top} \Big\langle \hat{t} \otimes \hat{t} \Big\rangle \hat{e}_r = \frac{1}{3}, \qquad \eta_{\tan} = \operatorname{tr}_{\tan} \langle \hat{t} \otimes \hat{t} \rangle = 1 - \eta_r = \frac{2}{3}.$$

Ces quantités sont donc des nombres purs d'ordre 1 ; dans l'approximation isotrope locale,

$$\eta_{\tan} = \frac{2}{3}, \qquad \eta_r = \frac{1}{3}.$$

Facteurs géométriques de renvoi. On regroupe la dépendance angulaire et la coordination dans

$$\Xi_{\tan} := \Big(\frac{z}{2}\Big) \eta_{\tan}, \qquad \Xi_r := \Big(\frac{z}{2}\Big) \eta_r, \qquad \Xi_0 := \Big(\frac{z}{2}\Big) \eta_0 = \frac{z}{2}. \tag{1.10}$$

Pour les canaux scalaires radiaux, Ξ_r et Ξ_0 correspondent au renvoi isotrope de second moment. Plus précisément, Ξ_r désigne ici le second moment directionnel associé au terme de gradient du champ scalaire radial r, tandis que Ξ_0 désigne le facteur de comptage du terme local quadratique en r^2. Les deux facteurs ne jouent donc pas le même rôle : Ξ_r pondère un invariant de gradient, alors que Ξ_0 pondère un invariant local. En revanche, pour le secteur tangent vectoriel, $\Xi_{\tan}$ doit être compris ici comme le facteur effectif associé à la fermeture tangentielle réduite retenue dans la suite, et non comme la reconstruction de l'élasticité isotrope tensorielle la plus générale.

Passage au continu. En divisant l'énergie discrète par le volume élémentaire $\mathcal{V}_{\ell_0}$ puis en passant à la limite continue pour des champs lisses à l'échelle ℓ_0, on adopte une fermeture effective minimale du secteur linéarisé. Pour le secteur radial scalaire, les contributions quadratiques de second ordre sont regroupées dans les invariants $|\nabla_{\mathbb{S}^3} r|^2$ et r^2.

Pour le secteur tangent vectoriel, on ne cherche pas ici à reconstruire l'élasticité isotrope tensorielle la plus générale à deux constantes de Lamé. On retient au contraire la fermeture tangentielle réduite utilisée dans la suite, compatible avec la branche transverse $\nabla_{\cdot \tan} \vec{u}_{\tan} = 0$, et résumée par un unique coefficient effectif T. Ici, $\nabla_{\mathbb{S}^3} \vec{u}_{\tan}$ désigne la dérivée covariante intrinsèque du champ tangent sur $\mathbb{S}^3(R_0)$.

On obtient alors :

— pour le canal tangent effectif retenu dans la branche transverse,

$$E_{\tan,\text{cont}} = \int_{\mathbb{S}^3(R_0)} \frac{T}{2} \, |\nabla_{\mathbb{S}^3} \vec{u}_{\tan}|^2 \, dV, \qquad T = \frac{k \, \ell_0^2}{\mathcal{V}_{\ell_0}} \, \Xi_{\tan};$$

— pour le canal radial gradient issu du couplage radial effectif inter-sites,

$$E_{r,\mathrm{cont}} = \int_{\mathbb{S}^3(R_0)} \frac{T_r}{2} \, |\nabla_{\mathbb{S}^3} r|^2 \, dV, \qquad T_r = \frac{k\,\alpha_r\,\ell_0^2}{\mathcal{V}_{\ell_0}}\,\Xi_r$$

— pour le terme local en r^2 issu de la dilatation d'arc des liaisons centrales,

$$E_{\mathrm{loc},r} = \int_{\mathbb{S}^3(R_0)} \frac{\mu_2^{(\mathrm{geom})}}{2}\, r^2 \, dV, \qquad \mu_2^{(\mathrm{geom})} = \frac{k}{\mathcal{V}_{\ell_0}} \Big(\frac{\ell_0}{R_0}\Big)^2 \Xi_0.$$

En combinant cette expression avec

$$T = \frac{k\ell_0^2}{\mathcal{V}_{\ell_0}}\,\Xi_{\tan},$$

on retrouve la fermeture structurelle

$$\kappa_r = \frac{T_r}{T} = \alpha_r\,\frac{\Xi_r}{\Xi_{\tan}},$$

cohérente avec (1.7).

Le coefficient $\mu_2^{(\mathrm{geom})}$ représente ici la contribution géométrique minimale issue de la dilatation d'arc des liaisons centrales. Dans la suite, on notera μ_2 le coefficient local radial effectif apparaissant dans l'énergie continue.

On traite d'abord la partie potentielle du passage au continu. Celle-ci s'écrit

$$E_{\mathrm{pot,cont}} = \int_{\mathbb{S}^3(R_0)} \Big(\frac{T}{2}\,|\nabla_{\mathbb{S}^3}\vec{u}_{\tan}|^2 + \frac{T\kappa_r}{2}\,|\nabla_{\mathbb{S}^3} r|^2 + \frac{\mu_2}{2}\,r^2 \Big)\, dV. \tag{1.11}$$

avec les paramètres structurants du passage au continu

$$\boxed{\rho = \frac{m}{\mathcal{V}_{\ell_0}} \quad [\mathrm{kg\,m^{-3}}], \qquad T = \frac{k\,\ell_0^2}{\mathcal{V}_{\ell_0}}\,\Xi_{\tan} \quad [\mathrm{Pa}].} \tag{1.12}$$

La partie cinétique continue associée s'obtient directement par renvoi volumique de la masse nodale :

$$K_{\mathrm{cont}} = \int_{\mathbb{S}^3(R_0)} \frac{\rho}{2}\Big(\dot{r}^{\,2} + |\partial_t \vec{u}_{\tan}|^2\Big)\, dV, \qquad \rho = \frac{m}{\mathcal{V}_{\ell_0}}. \tag{1.13}$$

Le Lagrangien continu linéarisé correspondant sera introduit plus loin à partir de $K_{\mathrm{cont}} - E_{\mathrm{pot,cont}}$.

La contribution géométrique minimale du secteur radial issue de la dilatation d'arc des liaisons centrales est quant à elle donnée par

$$\mu_2^{(\mathrm{geom})} = \frac{k}{\mathcal{V}_{\ell_0}} \Big(\frac{\ell_0}{R_0}\Big)^2 \Xi_0, \qquad [\mu_2^{(\mathrm{geom})}] = \mathrm{N\,m^{-4}}.$$

Elle ne constitue en général qu'une partie du coefficient local radial effectif μ_2.

On introduit alors le poids radial sans dimension

$$\boxed{\kappa_r := \frac{T_r}{T}, \qquad [\kappa_r] = 1,} \tag{1.14}$$

ainsi que le coefficient radial local

$$\boxed{\kappa_\mu := \frac{\mu_2}{T}, \qquad [\kappa_\mu] = \mathrm{m^{-2}}.} \tag{1.15}$$

Ainsi, κ_r et κ_μ jouent *a priori* des rôles distincts : κ_r pondère le terme de gradient radial, tandis que κ_μ mesure la raideur locale du terme quadratique r^2.

À ce stade, aucune identité générale n'est postulée entre ces deux coefficients. En particulier, on ne suppose pas $\mu_2 = T\kappa_r$. La relation entre κ_r et κ_μ devra être dérivée à partir de la structure de maille discrète retenue ; elle constituera donc une *sortie de maille*, et non une hypothèse de départ.

Les paramètres cinématiques vérifient néanmoins

$$c_t^2 = \frac{T}{\rho}, \qquad \omega_{r,0}^2 = \frac{\mu_2}{\rho} = \kappa_\mu\, c_t^2,$$

ce qui est dimensionnellement cohérent puisque $[\kappa_\mu] = \mathrm{m}^{-2}$.

Nous insistons sur le fait que ρ est une *densité volumique* ($\mathrm{kg\,m^{-3}}$), conformément au caractère tridimensionnel de $\mathbb{S}^3$.

Hypothèses fonctionnelles. Dans ce chapitre, on supposera sauf mention contraire que $r, \vec{u}_{\tan} \in H^1(\mathbb{S}^3)$, dans le régime d'échelle $\ell_0 \ll \lambda \ll R_0$. Les linéarisations à l'ordre dominant portent sur des amplitudes vérifiant

$$\|r\|_\infty, \|\vec{u}_{\tan}\|_\infty \ll R_0.$$

1.6 Constantes fondamentales : définition et rôle

Principe. Au niveau structurel à l'ordre dominant, on ne retient comme *fondamentales* que les données nécessaires pour fixer le cadre mécanique continu, les échelles géométriques globales, et la structure locale de la maille discrète. Les coefficients effectifs du secteur radial continu ne sont donc pas postulés comme fondamentaux lorsqu'ils doivent être dérivés de cette maille.

Constantes fondamentales à l'ordre dominant. On retient ainsi comme données fondamentales

ρ [$\mathrm{kg\,m^{-3}}$], T [Pa], ℓ_0 (échelle discrète explicite), R_0 (rayon global), $\mathcal{M}$ (structure locale enrichie : vo

Ici, $\mathcal{M}$ désigne la donnée locale enrichie au sens large : voisinage, coordination, volume élémentaire, facteurs géométriques de renvoi, canaux locaux actifs et rapports réduits de raideur tels que α_r. Tant qu'aucune réalisation spécialisée n'est choisie, ℓ_0 est conservée comme échelle explicite indépendante. Pour une réalisation régulière donnée, sa valeur devient ensuite une fonction déterministe de $(\mathcal{M}, R_0)$.

Sorties structurelles associées au secteur radial. À partir de la donnée locale enrichie $\mathcal{M}$, on dérive les coefficients effectifs qui contrôlent le secteur radial continu :

$\kappa_r = \alpha_r \dfrac{\Xi_r}{\Xi_{\tan}}$ (sans dimension, poids du gradient radial), $\kappa_\mu := \dfrac{\mu_2}{T}$ (de dimension $\mathrm{m^{-2}}$, échelle locale radi

À ce stade, aucune identité générale n'est imposée entre κ_r et κ_μ. La première quantité relève du canal radial de cohérence, tandis que la seconde relève du terme local quadratique en r^2.

Portée de la liste. Les constantes spécialisées associées à une réalisation particulière de la maille, ainsi que les coefficients effectifs propres à certains canaux ou secteurs réduits, seront introduits au moment où ils deviennent nécessaires. Ils ne font pas partie de la présente liste structurelle.

Remarque méthodologique. La présentation ci-dessus sépare volontairement : (i) les données structurelles fondamentales $\rho, T, \ell_0, R_0, \mathcal{M}$, et (ii) les coefficients effectifs du secteur radial continu. Cette séparation évite d'introduire prématurément une fermeture arbitraire du type $\mu_2 = T\kappa_r$ avant l'analyse explicite de la maille.

1.7 Lagrangien linéaire et équations du mouvement

Branche transverse et opérateurs tangentiels. Tout champ tangent $\vec{u}_{\tan}$ sur $\mathbb{S}^3(R_0)$ se décompose, au sens de Helmholtz–Hodge, sous la forme

$$\vec{u}_{\tan} = \vec{u}_{\perp} + \nabla_{\tan}\phi, \qquad \nabla\cdot_{\tan} \vec{u}_{\perp} = 0.$$

Dans la présente section, on se restreint à la branche transverse

$$\vec{u}_{\tan} = \vec{u}_{\perp}, \qquad \nabla\cdot_{\tan} \vec{u}_{\tan} = 0.$$

Pour un champ tangent $\vec{v}$, on note $v^\flat$ la 1-forme associée par la métrique. On définit alors le rotationnel tangent et le laplacien tangent par

$$(\operatorname{curl}_{\tan} \vec{v})^\flat := \star\, d(v^\flat), \qquad \Delta_{\tan}\vec{v} := \left(\Delta_H v^\flat\right)^\sharp,$$

où $\star$ est l'étoile de Hodge sur $\mathbb{S}^3(R_0)$ et $\Delta_H = d\delta + \delta d$ le laplacien de Hodge sur les 1-formes.

Lagrangien transverse local à l'ordre dominant. D'après (1.11), la partie tangentielle de l'énergie continue est de type

$$E_{\tan} = \frac{T}{2}\int_{\mathbb{S}^3(R_0)} |\nabla_{\mathbb{S}^3}\vec{u}_{\tan}|^2\, dV.$$

Comme $\mathbb{S}^3(R_0)$ est compacte et sans bord, les intégrations par parties ne produisent pas de terme de bord. Dans la branche transverse $\nabla\cdot_{\tan}\vec{u}_{\tan} = 0$, l'identité de Hodge–Weitzenböck montre que la différence entre

$$\int_{\mathbb{S}^3(R_0)} |\nabla_{\mathbb{S}^3}\vec{u}_{\tan}|^2\, dV \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{S}^3(R_0)} |\operatorname{curl}_{\tan}\vec{u}_{\tan}|^2\, dV$$

est un terme de courbure contrôlé par le tenseur de Ricci, donc d'ordre $R_0^{-2}\int |\vec{u}_{\tan}|^2\, dV$. Pour un mode de longueur d'onde caractéristique $\lambda \ll R_0$, ce terme est plus petit que l'énergie de gradient d'un facteur relatif $O(\lambda^2/R_0^2)$. On obtient ainsi, à l'ordre dominant,

$$E_{\tan} = \frac{T}{2}\int_{\mathbb{S}^3(R_0)} |\operatorname{curl}_{\tan}\vec{u}_{\tan}|^2\, dV \;+\; O\!\left(\frac{\lambda^2}{R_0^2}\right).$$

En combinant cette expression avec la partie cinétique continue (1.13), on obtient le Lagrangien transverse local

$$\mathcal{L}_{\tan} = \tfrac{1}{2}\,\rho\,|\partial_t\vec{u}_{\tan}|^2 - \tfrac{1}{2}\,T\,|\operatorname{curl}_{\tan}\vec{u}_{\tan}|^2. \tag{1.16}$$

Ondes transverses et vitesse c_t. La variation de (1.16) donne d'abord l'équation

$$\rho\,\partial_{tt}\vec{u}_{\tan} \;+\; T\,\operatorname{curl}_{\tan}(\operatorname{curl}_{\tan}\vec{u}_{\tan}) = 0.$$

Dans la branche transverse, cette écriture est équivalente à

$$\rho\,\partial_{tt}\vec{u}_{\tan} \;-\; T\,\Delta_{\tan}\vec{u}_{\tan} \;=\; 0 \qquad \text{à } O(R_0^{-2}) \text{ près.} \tag{1.17}$$

Dans une carte locale quasi-euclidienne de taille $\lambda \ll R_0$, le laplacien tangent se réduit au laplacien plat au premier ordre. Pour une onde locale plane

$$\vec{u}_{\tan}(x,t) \propto e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)},$$

on a alors

$$\Delta_{\tan}\vec{u}_{\tan} \simeq -|\vec{k}|^2\,\vec{u}_{\tan},$$

ce qui donne la relation de dispersion

$$\rho\,\omega^2 = T\,|\vec{k}|^2.$$

On en déduit la vitesse locale de phase

$$\boxed{c_t^2 = \frac{T}{\rho}}. \tag{1.18}$$

Les effets de courbure globale ($R_0 < \infty$) apparaissent donc comme des corrections relatives d'ordre $O(\lambda^2/R_0^2)$, sans modifier au premier ordre l'identification locale $c_t^2 = T/\rho$.

Chapitre 2

Équations du mouvement (continu sur $\mathbb{S}^3$)

2.1 Champs continus, configuration de référence et décomposition radial/tangent

Le passage au continu établi au chapitre précédent conduit à décrire le milieu HSM par des champs définis sur la configuration de référence $\mathbb{S}^3(R_0)$. On conserve dans tout ce chapitre les conventions géométriques et les hypothèses asymptotiques introduites au chapitre précédent, en particulier celles des sections 1.2 et 1.4.

Sauf mention explicite du contraire, les notations géométriques et les opérateurs intrinsèques utilisés dans ce chapitre sont ceux fixés au § 1.2. On note systématiquement $\nabla\cdot_{\tan}$ la divergence intrinsèque des champs tangents sur $\mathbb{S}^3(R_0)$, et $\Delta_{\mathbb{S}^3}$ le laplacien de Beltrami sur les scalaires.

Configuration de référence et configuration déformée. En coordonnées hypersphériques (χ, θ, ϕ), la position de référence d'un point matériel s'écrit

$$\vec{X}(\chi, \theta, \phi) = R_0\, \vec{e}_r(\chi, \theta, \phi),$$

où $\vec{e}_r$ désigne le vecteur radial unitaire de $\mathbb{R}^4$, normal sortant à $\mathbb{S}^3(R_0)$.

Sous l'effet des déformations, la position matérielle devient

$$\vec{x}(\chi, \theta, \phi, t) = \vec{X}(\chi, \theta, \phi) + r(\chi, \theta, \phi, t)\, \vec{e}_r(\chi, \theta, \phi) + \vec{u}_{\tan}(\chi, \theta, \phi, t),$$

avec

$$\vec{u}_{\tan}(\chi, \theta, \phi, t) \in T_{\vec{X}(\chi,\theta,\phi)}\mathbb{S}^3.$$

Les trois termes de cette décomposition sont vus comme des vecteurs de $\mathbb{R}^4$: $\vec{X}$ est le point de référence, $r\,\vec{e}_r$ la contribution radiale, et $\vec{u}_{\tan}$ la contribution tangentielle.

Rayon local au premier ordre. La configuration déformée n'est en général plus contenue dans la sphère de référence. Comme $\vec{u}_{\tan} \perp \vec{e}_r$, on a

$$\|\vec{x}\|^2 = (R_0 + r)^2 + |\vec{u}_{\tan}|^2,$$

d'où

$$\|\vec{x}\| = R_0 + r + O\!\left(\frac{r^2}{R_0}, \frac{|\vec{u}_{\tan}|^2}{R_0}\right).$$

Il est donc commode d'introduire

$$R(\chi, \theta, \phi, t) = R_0 + r(\chi, \theta, \phi, t),$$

qui désigne le rayon local au premier ordre en la déformation.

Conventions opératoires. Sauf mention explicite du contraire, les opérateurs différentiels ∇ et $\Delta_{\mathbb{S}^3}$ employés dans ce chapitre sont ceux de la sphère de référence. Les corrections dues à la géométrie localement déformée ne seront introduites que lorsqu'elles deviennent nécessaires à l'ordre d'approximation considéré.

Cadre du chapitre. Cette décomposition radial/tangent sert de cadre aux développements qui suivent : on utilisera les énergies continues obtenues au chapitre précédent pour écrire les équations du mouvement, puis pour analyser les couplages géométriques propres au milieu HSM sur $\mathbb{S}^3(R_0)$.

2.2 Liaisons centrales et allongement géodésique

L'approximation de Cauchy–Born de l'allongement géodésique des liaisons centrales a été établie au chapitre précédent ; on en rappelle ici uniquement la formule opératoire utilisée dans la suite.

Pour deux nœuds voisins (i, j), si $\hat{t}_{ij}$ désigne la tangente unitaire à la géodésique $i \to j$ en x_i, si

$$\bar{r}_{ij} = \tfrac{1}{2}\big(r(x_i) + r(x_j)\big),$$

et si $\Pi_{j\to i}$ est le transport parallèle le long de l'arête géodésique de x_j vers x_i, alors

$$\delta\ell_{ij} \;\simeq\; \hat{t}_{ij}\cdot\Big(\Pi_{j\to i}\vec{u}_{\tan}(x_j) - \vec{u}_{\tan}(x_i)\Big) + \frac{\ell_0}{R_0}\,\bar{r}_{ij}. \tag{2.1}$$

Dans la calotte quasi-plate $\lambda/R_0 \ll 1$, et pour des champs lisses à l'échelle ℓ_0, on a en outre

$$\Pi_{j\to i}\vec{u}_{\tan}(x_j) - \vec{u}_{\tan}(x_i) = \ell_0\,\nabla_{\hat{t}_{ij}}\vec{u}_{\tan}(x_i) + O(\ell_0^2).$$

La dérivation géométrique de (2.1) relève du chapitre précédent ; la présente section n'en retient que la forme utile pour l'écriture des équations continues.

2.3 Renvoi discret–continu des coefficients radiaux

But. On reformule ici, sous une paramétrisation discrète générale, le secteur radial déjà introduit au chapitre précédent, afin de séparer proprement : (i) le poids du *gradient radial* continu, gouverné par κ_r, et (ii) la *raideur locale* du terme quadratique radial, gouvernée par $\kappa_\mu = \mu_2/T$. Cette écriture ne doit pas être lue comme une conséquence des seules liaisons centrales géodésiques. Elle prolonge le canal radial de cohérence introduit en (1.3), lequel appartient à la donnée locale enrichie $\mathcal{M}$ sans imposer une réalisation géométrique particulière de la maille.

Convention de comptage et variable radiale discrète. On note r_i le déplacement radial local au site i, de dimension longueur. Dans toute cette section, la notation

$$\sum_{\langle i,j\rangle}$$

désigne la somme sur les paires non ordonnées de voisins de premier rang, c'est-à-dire chaque lien compté une seule fois. Avec cette convention, le coefficient B_r introduit ci-dessous coïncide avec le coefficient du canal radial de cohérence dans (1.3) :

$$\boxed{B_r = k\,\alpha_r\,.}$$

Forme discrète générale du secteur radial. On considère alors la paramétrisation quadratique

$$E_r^{\mathrm{disc}} = \frac{A_r}{2} \sum_i r_i^2 + \frac{B_r}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} (r_j - r_i)^2, \tag{2.2}$$

où $A_r > 0$ mesure la pénalisation locale et $B_r > 0$ le couplage inter-sites.

Renvoi continu. Le secteur radial continu associé s'écrit

$$E_{r,\mathrm{cont}} = \int_{\mathbb{S}^3(R_0)} \frac{T_r}{2} \, |\nabla_{\mathbb{S}^3} r|^2 \, dV, \qquad T_r = \frac{k \, \alpha_r \, \ell_0^2}{\mathcal{V}_{\ell_0}} \, \Xi_r. \tag{2.3}$$

En combinant cette expression avec

$$T = \frac{k \ell_0^2}{\mathcal{V}_{\ell_0}} \, \Xi_{\tan},$$

on retrouve la fermeture structurelle

$$\kappa_r = \frac{T_r}{T} = \alpha_r \, \frac{\Xi_r}{\Xi_{\tan}},$$

cohérente avec (1.7).

Le renvoi discret–continu retenu est

$$\boxed{\mu_2 = \frac{A_r}{\mathcal{V}_{\ell_0}} \, ,} \tag{2.4}$$

et

$$\boxed{T\kappa_r = \frac{B_r \, \ell_0^2}{\mathcal{V}_{\ell_0}} \, \Xi_r \, ,} \tag{2.5}$$

où $\mathcal{V}_{\ell_0}$ est le volume élémentaire associé à la maille locale et Ξ_r le facteur géométrique de renvoi du Laplacien radial discret.

Relation générale de maille. En divisant les deux relations précédentes par T, puis en utilisant

$$\kappa_\mu = \frac{\mu_2}{T},$$

on obtient la relation structurelle générale

$$\boxed{\frac{\kappa_r}{\kappa_\mu} = \frac{B_r \, \ell_0^2 \, \Xi_r}{A_r} \, .} \tag{2.6}$$

Lecture physique. La relation (2.6) montre que κ_r et κ_μ codent deux aspects distincts du secteur radial :

— κ_μ provient du terme local $A_r \sum_i r_i^2$;

— κ_r provient du couplage inter-sites $B_r \sum_{\langle i,j \rangle} (r_j - r_i)^2$, via le renvoi géométrique Ξ_r.

Leur rapport dépend donc de la structure effective de maille, et non d'une identité universelle imposée *a priori*.

Conséquence méthodologique. Dans la suite, toute relation particulière entre κ_r et κ_μ devra être dérivée pour une famille de mailles donnée. Une éventuelle égalité, ou une valeur numérique précise du rapport κ_r/κ_μ, doit être interprétée comme une *sortie de maille*, jamais comme une hypothèse fondamentale.

2.4 Secteur tangent : formulation intrinsèque de référence

Notation. On note g la métrique de $\mathbb{S}^3(R_0)$, ∇ sa connexion de Levi–Civita, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit induit et

$$dV = \sqrt{\det g}\, d\chi\, d\theta\, d\phi.$$

Formulation intrinsèque. L'énergie tangentielle s'écrit de façon intrinsèque

$$E_{\tan} = \frac{T}{2} \int_{\mathbb{S}^3(R_0)} \langle \nabla \vec{u}_{\tan}, \nabla \vec{u}_{\tan} \rangle \, dV. \tag{2.7}$$

La variation de cette énergie conduit à l'équation intrinsèque

$$\rho\, \ddot{\vec{u}}_{\tan} - T\, \nabla^* \nabla \vec{u}_{\tan} = \vec{0}, \tag{2.8}$$

où $\nabla^*\nabla$ désigne le laplacien de Bochner agissant sur les champs tangents.

Courbure de la sphère ronde. Sur $\mathbb{S}^3(R_0)$, le tenseur de Ricci vaut

$$\mathrm{Ric} = \frac{2}{R_0^2}\, g, \qquad \mathrm{Ric}(\vec{u}_{\tan}) = \frac{2}{R_0^2}\, \vec{u}_{\tan}. \tag{2.9}$$

Cette identité sera utilisée lorsque l'on voudra comparer $\nabla^*\nabla$ à d'autres laplaciens vectoriels intrinsèques via les formules de Weitzenböck.

Branche transverse à l'ordre dominant. Dans la branche transverse $\nabla_{\cdot \tan} \vec{u}_{\tan} = 0$, et dans le régime local $\lambda/R_0 \ll 1$, l'équation intrinsèque (2.8) se réduit au niveau opérationnel à l'équation d'onde transverse déjà obtenue plus haut, cf. (1.17), avec vitesse locale c_t donnée par (1.18). Les corrections de courbure associées à l'écart entre les différents laplaciens vectoriels intrinsèques sont relatives d'ordre $O(\lambda^2/R_0^2)$.

Remarque de représentation. Si une écriture locale en composantes devient nécessaire dans la suite, elle devra être obtenue directement à partir de (2.8) dans un repère explicitement fixé. Les termes de connexion et de courbure qui apparaissent alors sont entièrement déterminés par la géométrie de $\mathbb{S}^3(R_0)$ et ne constituent pas de nouveaux paramètres libres du modèle.

2.5 Énergies effectives et Lagrangien

Paramètres radiaux et vitesses caractéristiques. On introduit

$$\kappa_\mu := \frac{\mu_2}{T}, \qquad [\kappa_\mu] = \mathrm{m}^{-2},$$

de sorte que le terme local radial s'écrit $\mu_2 = T\kappa_\mu$. On rappelle

$$c_t^2 = \frac{T}{\rho}, \qquad c_r^2 := \frac{T\kappa_r}{\rho} = \kappa_r\, c_t^2, \qquad \omega_{r,0}^2 = \frac{\mu_2}{\rho} = \kappa_\mu\, c_t^2.$$

La quantité c_r joue le rôle de vitesse radiale caractéristique. En général, $c_r \neq c_t$ dès que $\kappa_r \neq 1$.

Mesure intrinsèque. On note

$$dV = \sqrt{\det g}\, d\chi\, d\theta\, d\phi$$

la mesure intrinsèque sur $\mathbb{S}^3(R_0)$.

Énergie cinétique.

$$E_{\mathrm{cin}} = \frac{\rho}{2} \int_{\mathbb{S}^3(R_0)} \left(\dot{r}^{\,2} + |\dot{\vec{u}}_{\tan}|^2 \right) dV.$$

Énergie radiale.

$$E_{\mathrm{rad}} = \frac{T\kappa_r}{2} \int_{\mathbb{S}^3(R_0)} |\nabla_{\mathbb{S}^3} r|^2 \, dV + \frac{\mu_2}{2} \int_{\mathbb{S}^3(R_0)} r^2 \, dV.$$

Énergie tangentielle.

$$E_{\tan} = \frac{T}{2} \int_{\mathbb{S}^3(R_0)} \langle \nabla \vec{u}_{\tan},\, \nabla \vec{u}_{\tan} \rangle \, dV.$$

Lagrangien effectif minimal au LO. On adopte au niveau continu, à l'ordre dominant, le Lagrangien effectif minimal

$$\mathcal{L} = \frac{\rho}{2} \int_{\mathbb{S}^3(R_0)} \left(\dot{r}^{\,2} + |\dot{\vec{u}}_{\tan}|^2 \right) dV - \frac{T\kappa_r}{2} \int_{\mathbb{S}^3(R_0)} |\nabla_{\mathbb{S}^3} r|^2 \, dV - \frac{\mu_2}{2} \int_{\mathbb{S}^3(R_0)} r^2 \, dV - \frac{T}{2} \int_{\mathbb{S}^3(R_0)} \langle \nabla \vec{u}_{\tan},\, \nabla \vec{u}_{\tan} \rangle \, dV. \tag{2.10}$$

Remarque sur les termes mixtes. Des couplages bilinéaires du type

$$r \, \nabla \cdot_{\tan} \vec{u}_{\tan}$$

ou, après intégration par parties sur $\mathbb{S}^3(R_0)$,

$$-\nabla_{\mathbb{S}^3} r \cdot \vec{u}_{\tan},$$

ne sont pas retenus dans la fermeture minimale adoptée ici à l'ordre dominant. Leur apparition nécessiterait une dérivation discrète spécifique ou une brisure de symétrie supplémentaire qui n'est pas disponible au niveau de fermeture considéré.

Lagrangien linéarisé. Dans cette fermeture minimale, le Lagrangien effectif est déjà quadratique. Il coïncide donc avec son Lagrangien linéarisé autour du fond uniforme $(r, \vec{u}_{\tan}) = (0, \vec{0})$:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{lin}} = \mathcal{L}. \tag{2.11}$$

Coercivité et conservation (linéaire). Sous $T > 0$, $\kappa_r > 0$ et $\mu_2 \geq 0$, on définit l'énergie quadratique

$$\mathcal{E}(t) = \frac{\rho}{2} \int_{\mathbb{S}^3(R_0)} (\dot{r}^{\,2} + |\dot{\vec{u}}_{\tan}|^2) \, dV + \frac{T\kappa_r}{2} \int_{\mathbb{S}^3(R_0)} |\nabla_{\mathbb{S}^3} r|^2 \, dV + \frac{\mu_2}{2} \int_{\mathbb{S}^3(R_0)} r^2 \, dV + \frac{T}{2} \int_{\mathbb{S}^3(R_0)} \langle \nabla \vec{u}_{\tan},\, \nabla \vec{u}_{\tan} \rangle \, dV.$$

Il existe $c, C > 0$ tels que, pour tout $(r, \vec{u}_{\tan}, \dot{r}, \dot{\vec{u}}_{\tan})$ lisse (et pour r de moyenne nulle si $\mu_2 = 0$),

$$c \, \|(r, \vec{u}_{\tan}, \dot{r}, \dot{\vec{u}}_{\tan})\|^2_{H^1 \times H^1 \times L^2 \times L^2} \leq \mathcal{E}(t) \leq C \, \|(r, \vec{u}_{\tan}, \dot{r}, \dot{\vec{u}}_{\tan})\|^2_{H^1 \times H^1 \times L^2 \times L^2}.$$

De plus, $\dot{\mathcal{E}}(t) = 0$ pour les équations d'Euler–Lagrange linéaires associées.

2.6 Équations d'Euler–Lagrange

Point de départ. On part du Lagrangien (2.10), avec dV la mesure fixe de la sphère de référence $\mathbb{S}^3(R_0)$.

Variation en r. La variation radiale donne

$$\delta\mathcal{L}_r = \int_{\mathbb{S}^3(R_0)} \Big(\rho\, \dot{r}\, \delta\dot{r} - T\kappa_r\, \nabla_{\mathbb{S}^3} r \cdot \nabla_{\mathbb{S}^3} \delta r - \mu_2\, r\, \delta r \Big)\, dV.$$

Après intégrations par parties en temps et en espace,

$$\delta\mathcal{L}_r = \int_{\mathbb{S}^3(R_0)} \Big(-\rho\, \ddot{r} + T\kappa_r\, \Delta_{\mathbb{S}^3} r - \mu_2\, r \Big)\, \delta r\, dV,$$

d'où l'équation radiale

$$\boxed{\rho\, \ddot{r} - T\kappa_r\, \Delta_{\mathbb{S}^3} r + \mu_2\, r = 0.} \tag{2.12}$$

Variation en $\vec{u}_{\tan}$. La variation tangentielle s'écrit

$$\delta\mathcal{L}_u = \int_{\mathbb{S}^3(R_0)} \Big(\rho\, \dot{\vec{u}}_{\tan} \cdot \delta\dot{\vec{u}}_{\tan} - T\, \langle \nabla \vec{u}_{\tan},\, \nabla \delta\vec{u}_{\tan} \rangle \Big)\, dV,$$

où $\langle \nabla \vec{u}_{\tan},\, \nabla \delta\vec{u}_{\tan} \rangle$ désigne la double contraction des tenseurs $\nabla \vec{u}_{\tan}$ et $\nabla \delta\vec{u}_{\tan}$. L'intégration par parties conduit à

$$\delta\mathcal{L}_u = \int_{\mathbb{S}^3(R_0)} \Big(-\rho\, \ddot{\vec{u}}_{\tan} + T\, \nabla^* \nabla \vec{u}_{\tan} \Big) \cdot \delta\vec{u}_{\tan}\, dV,$$

d'où l'équation tangentielle intrinsèque

$$\boxed{\rho\, \ddot{\vec{u}}_{\tan} - T\, \nabla^* \nabla \vec{u}_{\tan} = \vec{0}.} \tag{2.13}$$

Système linéarisé. Dans la fermeture minimale retenue ici, le système est déjà linéaire en (r, u). Les équations suivantes ne constituent donc pas une approximation supplémentaire : elles réécrivent (2.12) et (2.13) sous la forme utilisée pour l'analyse modale :

$$\boxed{\rho\, \ddot{r} - T\kappa_r\, \Delta_{\mathbb{S}^3} r + \mu_2\, r = 0,} \tag{2.14}$$

et

$$\boxed{\rho\, \ddot{\vec{u}}_{\tan} - T\, \nabla^* \nabla \vec{u}_{\tan} = \vec{0}.} \tag{2.15}$$

Branche transverse locale. Dans la branche transverse $\nabla \cdot_{\tan} \vec{u}_{\tan} = 0$ et dans le régime local $\lambda / R_0 \ll 1$, l'équation tangentielle intrinsèque se réécrit au niveau opérationnel sous la forme de l'équation d'onde transverse (1.17), avec vitesse c_t donnée par (1.18).

2.7 Équations d'onde linéaires sur $\mathbb{S}^3$ (fond uniforme)

Au niveau linéarisé autour du fond uniforme $r = 0$, le secteur radial et la branche tangentielle transverse admettent des équations d'onde linéaires sur $\mathbb{S}^3(R_0)$.

Mode radial. En divisant (2.14) par ρ, on obtient l'équation de type Klein–Gordon

$$\partial_t^2 r \;-\; c_r^2\, \Delta_{\mathbb{S}^3} r \;+\; \omega_{r,0}^2\, r \;=\; 0, \tag{2.16}$$

avec

$$c_r^2 = \frac{T\kappa_r}{\rho} = \kappa_r\, c_t^2, \qquad \omega_{r,0}^2 = \frac{\mu_2}{\rho} = \kappa_\mu c_t^2.$$

Branche tangentielle transverse. Dans la branche transverse $\nabla \cdot_{\tan} \vec{u}_{\tan} = 0$, et dans le régime local $\lambda/R_0 \ll 1$, l'équation tangentielle intrinsèque se réduit au niveau opérationnel à l'équation d'onde

$$\partial_t^2 \vec{u}_{\tan} \; - \; c_t^2 \, \Delta_{\tan} \vec{u}_{\tan} \; = \; \vec{0}, \qquad c_t^2 = \frac{T}{\rho}. \tag{2.17}$$

Dans une carte locale quasi-euclidienne, $\Delta_{\tan}$ se réduit au laplacien plat, de sorte que pour une onde locale plane

$$\vec{u}_{\tan}(x,t) \propto e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)},$$

on obtient la relation de dispersion

$$\omega^2 = c_t^2 \, |\vec{k}|^2.$$

Limite haute fréquence. Dans le secteur radial, le terme local devient sous-dominant lorsque

$$\omega_{r,0}^2 \ll c_r^2 \, k^2,$$

c'est-à-dire lorsque la longueur d'onde locale est petite devant $c_r/\omega_{r,0}$. Dans cette limite, l'équation radiale se réduit elle aussi à une équation d'onde au premier ordre.

Spectre radial sur $\mathbb{S}^3$. Comme $\mathbb{S}^3(R_0)$ est compacte, le spectre du laplacien scalaire est discret :

$$-\Delta_{\mathbb{S}^3} Y_\ell = \frac{\ell(\ell+2)}{R_0^2} \, Y_\ell, \qquad \ell = 0, 1, 2, \ldots$$

Par conséquent, les fréquences propres radiales vérifient

$$\omega_\ell^2 = \frac{\ell(\ell+2)}{R_0^2} \, c_r^2 + \omega_{r,0}^2.$$

Cette discrétisation spectrale jouera un rôle important dans la suite.

Chapitre 3

Réduction axisymétrique et repère comobile sur $\mathbb{S}^3$

3.1 Réduction axisymétrique : Laplacien 1D le long d'une géodésique

Champ axisymétrique et mesure réduite. On considère un champ axisymétrique dépendant du temps

$$u = u(s,t), \qquad s = R_0\chi,$$

sans dépendance en (θ,ϕ). Les conventions géométriques sur $\mathbb{S}^3(R_0)$ sont celles fixées au § 1.2. La mesure volumique se réduit alors à

$$dV = J_{S^3}(s)\,ds\,d\Omega, \qquad J_{S^3}(s) = R_0^2\sin^2\Big(\frac{s}{R_0}\Big), \qquad \int_{\mathbb{S}^2} d\Omega = 4\pi.$$

Sous cette hypothèse d'axisymétrie, on a

$$|\nabla_{\mathbb{S}^3} u|^2 = u_s^2.$$

Laplacien 1D le long d'une géodésique. La restriction axisymétrique du laplacien scalaire s'écrit

$$\boxed{\Delta_{\mathbb{S}^3} u = \frac{1}{J_{S^3}}\partial_s(J_{S^3}u_s) = u_{ss} + \frac{2}{R_0}\cot\Big(\frac{s}{R_0}\Big)\,u_s.} \tag{3.1}$$

Équation 1D générale et limite haute fréquence. À partir des équations d'Euler–Lagrange linéarisées, l'EDP 1D pour un mode axisymétrique $u(s,t)$ s'écrit

$$\partial_t^2 u \;-\; c^2\Big[u_{ss} + \frac{2}{R_0}\cot\Big(\frac{s}{R_0}\Big)u_s\Big] \;+\; \omega_0^2\,u \;=\; 0, \tag{3.2}$$

où (c,ω_0) désignent la vitesse caractéristique et la fréquence locale du mode considéré. Pour le secteur radial scalaire, on a

$$(c,\omega_0) = (c_r,\omega_{r,0}), \qquad \omega_{r,0}^2 = \frac{\mu_2}{\rho}.$$

La même forme s'applique à tout mode axisymétrique scalaire ou à toute amplitude projetée pour laquelle un couple (c,ω_0) a été fixé.

Dans le régime de haute fréquence

$$\omega_0^2 \ll c^2k^2 \qquad (\text{ou encore } k \gg \omega_0/c),$$

le terme d'ordre zéro devient sous-dominant devant le terme dispersif, et l'on obtient l'approximation locale sans masse

$$\partial_t^2 u \;-\; c^2\Big[u_{ss} + \frac{2}{R_0}\cot\Big(\frac{s}{R_0}\Big)u_s\Big] \simeq 0.$$

3.1.1 Preuve par IPP pondérée de la forme 1D du laplacien

Mesure réduite axisymétrique. Pour une fonction axisymétrique $u = u(s)$ sur $\mathbb{S}^3(R_0)$, la mesure volumique s'écrit

$$dV = J_{S^3}(s)\, ds\, d\Omega, \qquad J_{S^3}(s) = R_0^2\, \sin^2\Big(\frac{s}{R_0}\Big),$$

où $d\Omega$ désigne la mesure standard sur $\mathbb{S}^2$, avec

$$\int_{\mathbb{S}^2} d\Omega = 4\pi.$$

Dérivation par intégration par parties pondérée. On restreint la variation à la classe axisymétrique, c'est-à-dire $\delta u = \delta u(s)$. Alors

$$\delta \int_{\mathbb{S}^3} \tfrac{1}{2}|\nabla_{\mathbb{S}^3} u|^2\, dV = \delta \int_{\mathbb{S}^3} \tfrac{1}{2} u_s^2\, dV = \int J_{S^3}(s)\, u_s\, (\delta u)_s\, ds\, d\Omega.$$

Une intégration par parties donne

$$\delta \int_{\mathbb{S}^3} \tfrac{1}{2} u_s^2\, dV = \Big[J_{S^3} u_s \delta u\Big]_0^{\pi R_0} \int_{\mathbb{S}^2} d\Omega - \int (J_{S^3} u_s)_s\, \delta u\, ds\, d\Omega.$$

Comme

$$J_{S^3}(0) = J_{S^3}(\pi R_0) = 0,$$

et que la régularité C^∞ d'un champ axisymétrique impose en particulier

$$u_s(0) = u_s(\pi R_0) = 0,$$

on en déduit

$$J_{S^3}(s)\, u_s(s) \to 0 \qquad \text{aux pôles.}$$

Par conséquent,

$$\delta \int_{\mathbb{S}^3} \tfrac{1}{2} u_s^2\, dV = -\int_{\mathbb{S}^3} \frac{1}{J_{S^3}} \partial_s (J_{S^3} u_s)\, \delta u\, dV,$$

ce qui conduit à (3.1).

Conditions de régularité aux pôles. La régularité C^∞ d'un champ axisymétrique impose en particulier

$$u_s(0) = u_s(\pi R_0) = 0.$$

Cette condition implique

$$J_{S^3}(s)\, u_s(s) \to 0 \qquad \text{aux pôles,}$$

ce qui suffit à annuler les termes de bord dans l'intégration par parties pondérée.

Énergie 1D axisymétrique et conservation. Pour l'équation 1D générale

$$u_{tt} - c^2\Big(u_{ss} + \frac{2}{R_0}\cot\Big(\frac{s}{R_0}\Big)\,u_s\Big) + \omega_0^2 u = 0,$$

on introduit la densité d'énergie

$$e = \frac{\rho}{2}\,u_t^2 + \frac{\rho c^2}{2}\,u_s^2 + \frac{\rho\omega_0^2}{2}\,u^2,$$

et le flux

$$f = -\,\rho c^2\,u_t\,u_s.$$

Ils vérifient la loi locale

$$\partial_t e + \partial_s f + \frac{2}{R_0}\cot\Big(\frac{s}{R_0}\Big)\,f = 0.$$

En intégrant avec la mesure réduite axisymétrique

$$dV = J_{S^3}(s)\,ds\,d\Omega, \qquad J_{S^3}(s) = R_0^2\sin^2\Big(\frac{s}{R_0}\Big),$$

on obtient, pour des solutions axisymétriques suffisamment régulières (par exemple $u \in C^\infty$ ou $u \in H^2$ avec les compatibilités aux pôles), la conservation globale

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{S}^3} e\,dV = 0.$$

3.2 Repères mobiles : rotation uniforme et translation locale le long d'une géodésique

Choix d'une géodésique de référence. Par invariance de $\mathbb{S}^3(R_0)$ sous son groupe d'isométries, on peut choisir sans perte de généralité une grande géodésique de référence et la paramétrer par son abscisse curviligne

$$s = R_0\,\chi.$$

Les profils axisymétriques étudiés dans ce chapitre seront décrits le long de cette variable s.

Repère tournant. Pour décrire un motif en rotation uniforme, on introduit le changement de coordonnées

$$\chi' = \chi, \qquad \theta' = \theta, \qquad \phi' = \phi - \Omega t, \qquad t' = t.$$

La règle de chaîne donne

$$\partial_{t'} = \partial_t + \Omega\,\partial_\phi, \qquad \partial_t = \partial_{t'} - \Omega\,\partial_{\phi'},$$

et

$$\partial_t^2 = \partial_{t'}^2 - 2\Omega\,\partial_{t'}\partial_{\phi'} + \Omega^2\,\partial_{\phi'}^2.$$

Comme la rotation $\phi \mapsto \phi + \Omega t$ est une isométrie de $\mathbb{S}^3(R_0)$, les opérateurs géométriques intrinsèques conservent la même forme dans les coordonnées (χ', θ', ϕ'). Sous axisymétrie dans le repère tournant ($\partial_{\phi'} \equiv 0$), les termes de Coriolis et centrifuge disparaissent, et l'on retrouve

$$\partial_t^2 = \partial_{t'}^2.$$

Dans ce cas, l'équation d'onde dans le repère tournant coïncide avec celle du repère inertiel.

3.2.1 Translation comobile locale le long d'une géodésique

Approximation comobile locale. Pour un motif se déplaçant à vitesse constante v le long de la géodésique choisie, on introduit localement la variable comobile

$$s' = s - vt, \qquad t' = t.$$

Cette transformation doit être comprise comme une approximation locale valide dans un régime quasi-plat ($\lambda \ll R_0$). Globalement, sur $\mathbb{S}^3(R_0)$, le mouvement le long d'une grande géodésique correspond à une isométrie de la sphère, c'est-à-dire à une rotation dans le plan adéquat de $\mathbb{R}^4$. L'écriture $s' = s - vt$ en est la forme locale au premier ordre.

La règle de chaîne donne

$$\partial_t = \partial_{t'} - v\,\partial_{s'}, \qquad \partial_s = \partial_{s'},$$

et donc

$$\partial_t^2 = \partial_{t'}^2 - 2v\,\partial_{t'}\partial_{s'} + v^2\,\partial_{s'}^2.$$

Ansatz comobile stationnaire. On appelle profil comobile stationnaire un ansatz de la forme

$$u(s,t) = \widetilde{u}(s - vt) = \widetilde{u}(s'),$$

c'est-à-dire vérifiant

$$\partial_{t'} u \equiv 0.$$

Dans ce cadre, les équations d'évolution se réduisent localement à des équations différentielles en la seule variable s'.

Portée géométrique. Cette réduction n'est strictement stationnaire en s' que dans le régime local où les coefficients géométriques varient peu à l'échelle de la structure. Lorsque les termes de courbure explicites, tels que $\cot(s/R_0)$, doivent être conservés globalement, il faut revenir à la géométrie complète sur $\mathbb{S}^3(R_0)$ ou à la description isométrique globale du mouvement. En outre, comme la grande géodésique est fermée, tout motif en mouvement y est globalement périodique, avec période

$$T_{\mathrm{orb}} = \frac{2\pi R_0}{v}.$$

3.3 Solutions en translation : ansatz comobile local et branches mobiles

3.3.1 Ansatz comobile local

Dans le régime quasi-plat le long d'une géodésique de référence, on introduit la variable comobile

$$\xi = s - vt.$$

On cherche alors des profils de la forme

$$U(s,t) = \mathcal{U}(\xi),$$

c'est-à-dire stationnaires dans ce repère mobile local. On a alors

$$\partial_t U = -v\,\mathcal{U}'(\xi), \qquad \partial_t^2 U = v^2\,\mathcal{U}''(\xi), \qquad \partial_s U = \mathcal{U}'(\xi), \qquad \partial_s^2 U = \mathcal{U}''(\xi).$$

Ainsi, la stationnarité dans le repère comobile n'implique pas l'absence d'inertie temporelle dans le référentiel initial.

Dans le cas local 1D

$$\partial_t^2 U - c^2 \partial_s^2 U + \omega_0^2 U = 0,$$

l'ansatz $U(s,t) = \mathcal{U}(s - vt)$ conduit à

$$(v^2 - c^2)\mathcal{U}''(\xi) + \omega_0^2 \mathcal{U}(\xi) = 0. \tag{3.3}$$

Cette réduction est locale : si l'on conserve les coefficients géométriques complets de $\mathbb{S}^3$, l'équation n'est plus strictement autonome en ξ seul.

Globalement, sur $\mathbb{S}^3(R_0)$, une translation le long d'une grande géodésique correspond à une isométrie fermée du support ; un motif mobile y est donc périodique, avec période orbitale

$$T_{\text{orb}} = \frac{2\pi R_0}{v}.$$

3.3.2 Branche mobile locale

Proposition 3.1 (Existence locale d'une branche mobile)**.** *Soit*

$$\Psi_0 = (r_0, \vec{u}_{\tan,0})$$

une solution statique non dégénérée modulo translation. Alors il existe, pour $|v|$ suffisamment petit, une branche locale de solutions mobiles

$$v \longmapsto \Psi_v = (r_v, \vec{u}_{\tan,v})$$

telle que

$$\Psi_{v=0} = \Psi_0.$$

Ici, non dégénérée modulo translation *signifie que l'opérateur linéarisé autour de Ψ_0 ne possède comme mode neutre que le mode engendré par la translation le long de la géodésique choisie.*

Démonstration. Après quotient par la translation le long de la géodésique choisie, la condition de non-dégénérescence rend l'opérateur linéarisé inversible sur le complément du mode de translation. L'équation stationnaire écrite dans le repère mobile dépend régulièrement du paramètre v et coïncide, pour $v = 0$, avec l'équation statique satisfaite par Ψ_0. Le théorème des fonctions implicites fournit donc une unique branche locale

$$v \longmapsto \Psi_v$$

au voisinage de $v = 0$, avec $\Psi_{v=0} = \Psi_0$. □

3.3.3 Limites d'un profil strictement comobile en cinématique multisectorielle

Dans un système couplé à plusieurs secteurs dynamiques, les vitesses caractéristiques linéaires des secteurs internes peuvent être différentes. Dans HSM, le secteur radial et le secteur tangent portent ainsi, en général, des vitesses caractéristiques distinctes (c_r et c_t).

Une structure cohérente mobile reste néanmoins associée à une vitesse de propagation globale unique v. En revanche, cela n'implique pas que tous les secteurs internes se transportent sous la forme d'un profil strictement comobile unique $\mathcal{U}(s - vt)$. Il faut donc distinguer :

existence d'une branche mobile et existence d'un profil strictement comobile unique.

Cette distinction jouera un rôle important dans l'analyse détaillée des solutions 2DOF.

3.4 Ansatz 2DOF axisymétrique à polarisation circulaire

On cherche une solution axisymétrique sur $\mathbb{S}^3(R_0)$, décrite dans le repère comobile local introduit plus haut le long d'une grande géodésique. Le secteur tangent effectue une rotation uniforme de pulsation ω dans un 2-plan tangent local, tandis que le fond radial est décrit par une déformation lente $r(s) \ll R_0$.

Sous l'hypothèse axisymétrique/comobile, le système 2DOF est paramétré par deux profils scalaires

$$A(s) \qquad \text{et} \qquad r(s),$$

où $A(s)$ désigne l'amplitude tangentielle et $r(s)$ la déformation radiale de fond.

Ansatz de polarisation circulaire. On choisit une base orthonormée locale $(\vec{e}_1(s), \vec{e}_2(s))$ du 2-plan tangent orthogonal à la géodésique de référence, transportée parallèlement au niveau d'approximation retenu. On pose alors

$$\boxed{\vec{u}_{\tan}(s,t') = A(s)\,\big[\cos(\omega t')\,\vec{e}_1(s) + \sin(\omega t')\,\vec{e}_2(s)\big].} \tag{3.4}$$

En notant

$$\mathbf{q}(s,t') := \cos(\omega t')\,\vec{e}_1(s) + \sin(\omega t')\,\vec{e}_2(s),$$

on a $|\mathbf{q}| = 1$ et

$$\partial_{t'}\mathbf{q} = \omega J\mathbf{q}, \qquad \partial_{t'}^2\mathbf{q} = -\omega^2\mathbf{q},$$

où J désigne la rotation de $+\pi/2$ dans le plan $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Fermeture tangentielle effective au LO. Dans le régime $\lambda \ll R_0$, les termes de gradient dominent sur les corrections de courbure. Dans la branche transverse axisymétrique retenue ici, on adopte une fermeture effective au LO dans laquelle l'opérateur tangent prend la forme

$$\Delta^{(t)}_{\mathbb{S}^3}\vec{u}_{\tan} = \vec{u}_{\tan,ss} + \frac{2}{R_0}\cot\Big(\frac{s}{R_0}\Big)\,\vec{u}_{\tan,s} - 2\,\kappa_{\mathrm{curv}}(s)\,\vec{u}_{\tan}. \tag{3.5}$$

Sur la sphère ronde idéale ($r \equiv 0$), cette écriture est compatible avec la contribution de Ricci

$$\mathrm{Ric} = \frac{2}{R_0^2}g,$$

ce qui fixe alors

$$\beta_0 = \frac{2T}{R_0^2}.$$

Courbure locale effective. On modélise la correction induite par le fond radial à l'ordre dominant par

$$\kappa_{\mathrm{curv}}(s) \simeq \frac{1}{R(s)^2}, \qquad R(s) = R_0 + r(s),$$

soit, au premier ordre,

$$\kappa_{\mathrm{curv}}(s) = \frac{1}{R_0^2}\Big(1 - \frac{2r(s)}{R_0} + \cdots\Big).$$

Cette paramétrisation doit être lue comme une fermeture géométrique effective au LO. Le couplage tangent dominant avec le fond radial est alors de type $r(s)\,A(s)$.

Équation d'amplitude à r fixé. En projetant l'équation

$$-\omega^2\,\vec{u}_{\tan} = c_t^2\,\Delta_{\mathbb{S}^3}^{(t)}\vec{u}_{\tan}$$

sur $\mathbf{q}$, on obtient

$$A''(s) + \frac{2}{R_0}\cot\Big(\frac{s}{R_0}\Big)A'(s) + \Big(\frac{\omega^2}{c_t^2} - 2\,\kappa_{\mathrm{curv}}(s)\Big)A(s) = 0. \tag{3.6}$$

Il s'agit d'une équation linéaire en A pour r fixé. Lorsque $r \equiv 0$, elle se réduit à

$$A''(s) + \frac{2}{R_0}\cot\Big(\frac{s}{R_0}\Big)A'(s) + \Big(\frac{\omega^2}{c_t^2} - \frac{2}{R_0^2}\Big)A(s) = 0.$$

Régularité aux pôles. Comme $\vec{u}_{\tan}$ est un champ tangent régulier sur $\mathbb{S}^3(R_0)$, l'amplitude doit s'annuler aux pôles :

$$A(0) = A(\pi R_0) = 0.$$

Des conditions supplémentaires sur les dérivées peuvent ensuite être imposées par la régularité fine de la solution.

3.5 Lien géométrie–amplitude : $\kappa_{\mathrm{curv}}(s)$ en fonction de $r(s)$

On note

$$R(s) = R_0 + r(s), \qquad r(s) \ll R_0, \qquad |\partial_s r| \ll 1.$$

La contribution locale de courbure au secteur tangent provient de la réduction de Weitzenböck de l'opérateur tangent covariant. Pour un champ tangent transverse $u_{\tan}$, l'opérateur de Hodge tangent se décompose localement sous la forme

$$\Delta_H u_{\tan} = \nabla_{\tan}^{\dagger}\nabla_{\tan}u_{\tan} + \mathrm{Ric}^{\sharp}(u_{\tan}),$$

où $\mathrm{Ric}^{\sharp}$ désigne l'action du tenseur de Ricci sur les champs tangents. Sur la sphère ronde $\mathbb{S}^3(R)$,

$$\mathrm{Ric}^{\sharp} = \frac{2}{R^2}\,\mathrm{Id}_{T\mathbb{S}^3}.$$

La partie quadratique tangentielle projetée contient donc

$$\frac{1}{2}\int T\,\frac{2}{R^2}\,|u_{\tan}|^2\,dV.$$

On définit ainsi le coefficient géométrique tangent par

$$\beta_{\mathrm{geom}}(R) := 2T\,\kappa_{\mathrm{curv}}(R). \tag{3.7}$$

Sur la sphère ronde, on obtient

$$\beta_{\mathrm{geom}}(R) = \frac{2T}{R^2}, \tag{3.8}$$

et en particulier

$$\beta_0 = \frac{2T}{R_0^2}.$$

Le facteur 2 est donc celui du tenseur de Ricci de $\mathbb{S}^3(R)$,

$$\mathrm{Ric} = \frac{2}{R^2}\,g,$$

après projection sur la branche tangentielle transverse.

Au leading order (fond faiblement déformé),

$$\kappa_{\mathrm{curv}}(s) = \frac{1}{R(s)^2} = \frac{1}{(R_0+r)^2} = \frac{1}{R_0^2}\Big(1 - \frac{2\,r(s)}{R_0}\Big) + \mathcal{O}\Big(\frac{r^2}{R_0^4}\Big),$$

et donc

$$\boxed{\beta_{\mathrm{geom}}(R_0+r) = \beta_0 + \beta_1\, r + \mathcal{O}(r^2), \qquad \beta_0 = \frac{2T}{R_0^2}, \qquad \beta_1 = -\,\frac{4T}{R_0^3}.} \tag{3.9}$$

En injectant cette expansion dans (3.6), on obtient

$$A'' + \frac{2}{R_0}\cot\Big(\frac{s}{R_0}\Big)A' + \Big[\frac{\omega^2}{c_t^2} - \frac{2}{R_0^2} + \frac{4}{R_0^3}\,r(s)\Big]A = 0 \quad + \ \mathcal{O}\Big(\frac{r^2}{R_0^4}\Big)A. \tag{3.10}$$

Le terme $\frac{4}{R_0^3} r(s)\, A$ représente la correction de courbure induite par la déformation radiale $r(s)$; il détermine au premier ordre le coefficient β_1.

3.6 Équation radiale stationnaire et système 2DOF couplé

On part de l'équation d'Euler–Lagrange radiale

$$\rho\,\ddot{r} \ - \ T\kappa_r\,\Delta_{\mathbb{S}^3} r \ + \ \mu_2\, r \ = \ -\tfrac{1}{2}\,\beta'_{\mathrm{geom}}(R_0+r)\,|\vec{u}_{\tan}|^2, \qquad \beta_{\mathrm{geom}}(R_0+r) = \beta_0 + \beta_1 r + \mathcal{O}(r^2).$$

Avec la fermeture tangentielle adoptée dans (3.6) et la définition (3.7), le facteur géométrique tangent est celui du tenseur de Ricci sur $\mathbb{S}^3(R_0)$. L'expansion (3.9) donne donc

$$\beta_0 = \frac{2T}{R_0^2}, \qquad \beta_1 = -\,\frac{4T}{R_0^3}.$$

Pour un profil radial stationnaire dans le repère comobile, on a bien

$$\partial_{t'} r = 0.$$

Cependant, cela n'implique pas en général

$$\ddot{r} = 0$$

dans le référentiel initial. En effet, pour une branche mobile de la forme

$$r(s,t) = \mathcal{R}(s - vt),$$

on obtient

$$\partial_t r = -v\,\mathcal{R}'(s-vt), \qquad \partial_t^2 r = v^2\,\mathcal{R}''(s-vt).$$

Le traitement complet du secteur radial mobile doit donc conserver ce terme convectif. La présente section est restreinte au *cas de repos*, pour lequel

$$\ddot{r} = 0.$$

En axisymétrie, il vient alors

$$-\,T\kappa_r\Big(r'' + \frac{2}{R_0}\cot\frac{s}{R_0}\,r'\Big) + \mu_2 r = -\frac{1}{2}\,\beta_1\,|\vec{u}_{\tan}|^2.$$

Sous l'ansatz $|\vec{u}_{\tan}|^2 = A^2(s)$, on obtient

$$r'' + \frac{2}{R_0}\cot\Big(\frac{s}{R_0}\Big)r' - \Big(\frac{\mu_2}{T\kappa_r}\Big)\,r = \Big(\frac{\beta_1}{2T\kappa_r}\Big)\,A^2(s). \tag{3.11}$$

On pose

$$\boxed{\lambda_r^2 := \frac{\mu_2}{T\kappa_r} = \frac{\omega_{r,0}^2}{c_r^2}}, \qquad \boxed{\gamma := -\frac{\beta_1}{2T\kappa_r} = \frac{2}{\kappa_r R_0^3} > 0}.$$

Comme $\beta_1 < 0$, on a bien

$$\frac{\beta_1}{2T\kappa_r} = -\gamma.$$

L'équation radiale s'écrit donc

$$\boxed{r'' + \frac{2}{R_0}\cot\Big(\frac{s}{R_0}\Big)r' - \lambda_r^2\, r = -\gamma\, A^2(s).} \tag{3.12}$$

Interprétation du signe. Avec la convention géométrique

$$R(s) = R_0 + r(s), \qquad r > 0 \iff R_0 + r > R_0,$$

une bosse radiale correspond à $r > 0$. Dans le régime de screening fort ($\lambda_r \lambda \gg 1$), l'équation locale

$$-\lambda_r^2 r \simeq -\gamma A^2$$

donne bien

$$r \simeq \frac{\gamma}{\lambda_r^2} A^2 > 0,$$

en accord avec cette convention.

Système 2DOF couplé (résumé).

$$A'' + \frac{2}{R_0}\cot\Big(\frac{s}{R_0}\Big)A' + \Big[\frac{\omega^2}{c_t^2} - \frac{2}{R_0^2} + \frac{4}{R_0^3}\, r(s)\Big]A = 0, \tag{3.13}$$

$$r'' + \frac{2}{R_0}\cot\Big(\frac{s}{R_0}\Big)r' - \lambda_r^2\, r = -\gamma\, A^2(s), \qquad \lambda_r^2 = \frac{\mu_2}{T\kappa_r}, \qquad \gamma = \frac{2}{\kappa_r R_0^3}. \tag{3.14}$$

Conditions aux pôles.

$$A(0) = A(\pi R_0) = 0, \qquad r'(0) = r'(\pi R_0) = 0.$$

Limite cœur quasi–plat ($s \ll R_0$). Comme

$$\frac{2}{R_0}\cot\Big(\frac{s}{R_0}\Big) = \frac{2}{s} + \mathcal{O}\Big(\frac{s}{R_0^2}\Big),$$

on obtient au premier ordre

$$A'' + \frac{2}{s}A' + \Big(\frac{\omega^2}{c_t^2} - \frac{2}{R_0^2} + \frac{4}{R_0^3}r\Big)A \simeq 0, \qquad r'' + \frac{2}{s}r' - \lambda_r^2 r \simeq -\gamma\, A^2.$$

Réécriture avec coefficient géométrique local. Il est commode d'introduire le coefficient géométrique local

$$V_{\text{eff}}(s) := T\,\kappa_{\text{curv}}(s) = \frac{1}{2}\,\beta_{\text{geom}}(R(s)), \qquad c_t^2 = \frac{T}{\rho}.$$

L'équation d'amplitude (3.6) s'écrit alors

$$A_{ss} + \frac{2}{R_0}\cot\Big(\frac{s}{R_0}\Big)A_s + \Big[\frac{\omega^2}{c_t^2} - \frac{2\,V_{\text{eff}}(s)}{T}\Big]\,A = 0. \tag{3.15}$$

Au leading order,

$$V_{\text{eff}}(s) = \frac{T}{R_0^2}\left(1 - \frac{2\,r(s)}{R_0} + \mathcal{O}\Big(\frac{r^2}{R_0^2}\Big)\right),$$

ce qui redonne bien (3.13).

Chapitre 4

Réduction de l'équation d'amplitude 2DOF à une Klein–Gordon cubique

4.1 Réduction effective locale dans le cœur

On introduit une zone centrale $\{|s| \le s_c\}$, appelée *cœur*, de largeur caractéristique $s_c = O(\lambda)$, dans le régime

$$\lambda \ll R_0, \qquad |r(s)| \ll R_0, \qquad |r'(s)| \ll 1.$$

Dans cette zone, on remplace la description hypersphérique exacte par une *réduction effective locale* adaptée à la géométrie déformée du cœur.

Rayon local effectif. On note

$$R(s) = R_0 + r(s),$$

où R_0 est le rayon de la sphère de référence et $r(s)$ la déformation radiale de fond. Dans la fermeture locale retenue, la partie angulaire du volume élémentaire est alors paramétrée par le rayon effectif $R(s)$.

Mesure réduite dans le cœur. On utilise, dans la zone $|s| \le s_c$, la mesure effective

$$dV_{\mathrm{c}} = J_{\mathrm{c}}(s)\, ds\, d\Omega, \qquad J_{\mathrm{c}}(s) = R(s)^2. \tag{4.1}$$

Cette écriture n'est pas une reformulation exacte de la mesure intrinsèque globale sur $\mathbb{S}^3(R_0)$, mais une réduction asymptotique locale valable au premier ordre dans le cœur quasi-plat.

Mesure extérieure. Hors du cœur, on conserve la mesure hypersphérique exacte de la sphère de référence :

$$dV_{\mathrm{ext}} = J_0(s)\, ds\, d\Omega, \qquad J_0(s) = R_0^2 \sin^2\Big(\frac{s}{R_0}\Big). \tag{4.2}$$

Statut de la réduction. La réduction (4.1)–(4.2) définit un *modèle effectif local de cœur*. Elle est utilisée uniquement pour extraire les contributions dominantes de la dynamique couplée dans la zone $|s| \le s_c$, tandis que la géométrie de référence sur $\mathbb{S}^3(R_0)$ reste la description globale de l'extérieur.

Raccord cœur / extérieur. Au bord $s = \pm s_c$, les champs sont raccordés par continuité de la variable considérée et du flux réduit :

$$[u]_{s=\pm s_c} = 0, \qquad [J\, u_s]_{s=\pm s_c} = 0, \tag{4.3}$$

où J désigne J_{c} dans le cœur et J_0 à l'extérieur.

Usage dans la suite. Toutes les variations locales effectuées dans le cœur seront prises avec la mesure réduite dV_{c}. Les variations extérieures et les conditions de raccord resteront formulées avec la mesure exacte dV_{ext}.

4.2 Variation de l'énergie radiale en axisymétrie : opérateur L_J et conditions de raccord

Rappel. En axisymétrie sur $\mathbb{S}^3$, on a

$$\Delta_{\mathbb{S}^3} u = \frac{1}{J_{S^3}} \partial_s (J_{S^3} u_s), \qquad J_{S^3}(s) = R_0^2 \sin^2\Big(\frac{s}{R_0}\Big),$$

voir la démonstration par IPP pondérée en §3.1.1.

Variation de l'énergie radiale. On considère l'énergie radiale

$$E_{\mathrm{rad}} = \frac{T\kappa_r}{2} \int_{\mathbb{S}^3} (r_s)^2 \, dV.$$

Dans la réduction axisymétrique par morceaux utilisée dans ce chapitre, on écrit

$$dV = J(s)\, ds\, d\Omega,$$

avec

$$J(s) = \begin{cases} J_{\mathrm{c}}(s), & |s| \le s_c \qquad \text{(cœur réduit)}, \\ R_0^2 \sin^2(s/R_0), & |s| > s_c \qquad \text{(extérieur sphérique)}. \end{cases}$$

Ici $J_{\mathrm{c}}(s)$ désigne le jacobien réduit utilisé dans le cœur. Il n'est pas identifié au jacobien sphérique exact ; il représente la mesure réduite adaptée à la fermeture locale quasi-plate du cœur.

La même intégration par parties pondérée donne alors

$$\delta E_{\mathrm{rad}} = T\kappa_r \int J\, r_s\, (\delta r)_s \, ds\, d\Omega = \Big[T\kappa_r\, J\, r_s\, \delta r\Big]_{\partial(\text{zones})} \int d\Omega - T\kappa_r \int \partial_s(J r_s)\, \delta r \, ds\, d\Omega.$$

Sous des conditions de raccord annulant les termes de bord (continuité de r, continuité du flux $J r_s$, flux nul aux pôles), on obtient

$$\boxed{\delta E_{\mathrm{rad}} = -\,T\kappa_r \int_{\mathbb{S}^3} \underbrace{\frac{1}{J}\partial_s(J\, r_s)}_{:= L_J r} \, \delta r \, dV, \qquad L_J r = r'' + \frac{J'}{J}\, r'.}$$

Donc explicitement,

$$L_J r = \begin{cases} r'' + \dfrac{J_{\mathrm{c}}'}{J_{\mathrm{c}}}\, r', & |s| \le s_c, \\ r'' + \dfrac{2}{R_0} \cot(s/R_0)\, r', & |s| > s_c. \end{cases}$$

Remarque (cœur quasi uniforme). Dans la fermeture locale utilisée dans le cœur, on prendra plus loin

$$J_{\mathrm{c}}(s) \simeq R_0^2 \qquad \text{au leading order},$$

de sorte que

$$\frac{J_{\mathrm{c}}'}{J_{\mathrm{c}}} = O\Big(\frac{r'}{R_0}\Big) \ll 1$$

lorsque le fond radial varie lentement. On obtient alors l'approximation

$$L_J r \simeq r''.$$

4.3 Variation de E_{cin} et E_{tan} en cœur quasi-plat

4.3.1 Hypothèses cœur quasi-plat et règles d'ordre

On travaille dans une zone centrale (le *cœur*) de largeur caractéristique λ telle que

$$\lambda \ll R_0,$$

et où la pente de la déformation radiale reste faible. On introduit les deux petits paramètres sans dimension

$$\varepsilon_{\text{geo}} := \frac{\lambda}{R_0} \ll 1, \qquad \varepsilon_{\text{slope}} := \max_{|s| \lesssim \lambda} |r'(s)| \ll 1.$$

Dans la réduction géométrique retenue pour le cœur, on utilise une mesure réduite

$$dV_{\text{coeur}} = J_{\text{c}}(s)\, ds\, d\Omega,$$

où $J_{\text{c}}(s)$ désigne le jacobien réduit de cœur. Dans le régime quasi-plat faiblement déformé, on prendra au leading order

$$J_{\text{c}}(s) = R_0^2(1 + O(r/R_0)), \qquad \frac{J_{\text{c}}'(s)}{J_{\text{c}}(s)} = O\Big(\frac{\varepsilon_{\text{slope}}}{R_0}\Big).$$

À l'extérieur du cœur, on conserve la mesure hypersphérique exacte

$$dV_{\text{ext}} = J_0(s)\, ds\, d\Omega, \qquad J_0(s) = R_0^2 \sin^2(s/R_0).$$

Conséquences dans le cœur.

— **Terme de dérive géométrique.** Dans la fermeture locale de cœur,

$$\frac{J_{\text{c}}'(s)}{J_{\text{c}}(s)} = O\Big(\frac{\varepsilon_{\text{slope}}}{R_0}\Big).$$

En utilisant

$$\frac{|A'|}{|A|} \sim \frac{1}{\lambda}, \qquad \frac{|A''|}{|A|} \sim \frac{1}{\lambda^2},$$

il vient

$$\frac{|(J_{\text{c}}'/J_{\text{c}})A'|}{|A''|} = O\big(\varepsilon_{\text{slope}}\varepsilon_{\text{geo}}\big) \ll 1.$$

On peut donc négliger le terme $(J_{\text{c}}'/J_{\text{c}})A'$ dans l'EDO locale de cœur au premier ordre.

— **Courbure de fond hypersphérique.** Les contributions linéaires de type A/R_0^2 sont d'ordre relatif

$$\frac{1/R_0^2}{1/\lambda^2} = \varepsilon_{\text{geo}}^2 \ll 1,$$

et sont donc négligées au premier ordre dans le cœur quasi-plat.

Règle de contrôle de l'approximation. Pour viser une erreur relative $< \eta$ sur l'EDO locale de cœur, il suffit d'imposer

$$\varepsilon_{\text{slope}}\varepsilon_{\text{geo}} \le \eta, \qquad \varepsilon_{\text{geo}}^2 \le \eta.$$

Le paramètre η est une tolérance de contrôle numérique de l'approximation locale ; il n'est pas une constante structurelle du modèle et n'entre dans aucune fermeture aval. Pour les figures numériques de ce chapitre, la tolérance affichée est

$$\eta = 10^{-2}.$$

4.3.2 Hors du cœur

On rétablit à l'extérieur du cœur la mesure hypersphérique exacte

$$J_0(s) = R_0^2 \sin^2\Big(\frac{s}{R_0}\Big),$$

ainsi que les termes géométriques associés. En particulier, sur $\mathbb{S}^3$, la réduction 1D donne

$$\frac{J_0'}{J_0} = \frac{2}{R_0}\cot\Big(\frac{s}{R_0}\Big), \qquad \Delta_{\mathbb{S}^3} u = \frac{1}{J_0}\partial_s(J_0 u_s) = u_{ss} + \frac{2}{R_0}\cot\Big(\frac{s}{R_0}\Big)u_s.$$

Le raccord cœur / extérieur s'effectue par continuité de A et du flux réduit $J\,A_s$ (ou, de façon équivalente, $T\,J\,A_s$ à un facteur constant près).

4.3.3 Variations utiles

Dans tout ce qui suit, on utilise $T = \rho c_t^2$ et l'ansatz harmonique de polarisation circulaire. Les expressions énergétiques sont entendues après moyenne sur une période du temps rapide $2\pi/\omega$.

On a alors

$$\delta_A E_{\text{cin}} = \rho\,\omega^2 \int_{\mathbb{S}^3} A\,\delta A\,dV,$$

et

$$\delta_A E_{\text{tan}} = T\int_{\mathbb{S}^3} \langle \nabla A, \nabla \delta A\rangle\,dV = -\,T\int_{\mathbb{S}^3} \Delta_{\mathbb{S}^3} A\;\delta A\,dV,$$

où l'intégration par parties est entendue avec la mesure réduite

$$dV = J(s)\,ds\,d\Omega,$$

les termes de bord étant nuls par régularité aux pôles et/ou par conditions de raccord.

Dans le cœur quasi-plat, au premier ordre,

$$\Delta_{\mathbb{S}^3} A \;\simeq\; A_{ss}, \qquad \text{car } \Big(\frac{J_{\text{c}}'}{J_{\text{c}}}\Big)A' = O(\varepsilon_{\text{slope}}\,\varepsilon_{\text{geo}})\,A''.$$

4.3.4 Statut de $\delta_r E_{\text{eff}}$

La variation cohérente de E_{eff} dans le cœur est traitée en §4.5. Sous la mesure réduite $dV = R^2\,ds\,d\Omega$, avec $\beta_{\text{geom}}(R) = 2T/R^2$, le produit $\beta_{\text{geom}}(R)dV$ est indépendant de R. On a donc

$$\delta_r E_{\text{eff}} = 0$$

dans la variation locale complète, et aucune source locale séparée issue de E_{eff} n'est ajoutée à l'équation radiale réduite.

À l'extérieur du cœur, on se place dans la zone où le fond radial est revenu à sa valeur de référence, de sorte que

$$R(s) = R_0, \qquad V_{\text{eff}} = \frac{T}{R_0^2},$$

et par conséquent

$$\delta_r E_{\text{eff}} = 0 \qquad \text{hors du cœur.}$$

4.4 Variations locales dans le cœur : E_{cin} et E_{tan}

Dans toute cette section, on note pour abréger

$$dV = dV_{\text{c}} = J(s)\,ds\,d\Omega, \qquad J(s) = J_{\text{c}}(s) = R(s)^2, \qquad R(s) = R_0 + r(s),$$

au sens de la réduction effective locale introduite en §4.1. Par ailleurs, dans le secteur tangent harmonique, E_{cin} désigne l'énergie moyennée sur une période de la rotation rapide.

4.4.1 Variation de l'énergie cinétique dans le cœur

Avec l'ansatz temporel de polarisation circulaire, on a

$$|\partial_t \mathbf{u}|^2 = \omega^2 A^2,$$

et, dans la réduction locale du cœur,

$$E_{\text{cin}} = \frac{\rho\omega^2}{2} \int A^2 \, dV, \qquad dV = J(s)\, ds\, d\Omega, \qquad J(s) = R(s)^2.$$

Étape 1 — Variation par rapport à r à A fixé. Comme $dV = J\, ds\, d\Omega$, on a $\delta(dV) = \delta J\, ds\, d\Omega$ et

$$\delta J = \delta(R^2) = 2R\, \delta r.$$

Ainsi

$$\delta E_{\text{cin}} = \frac{\rho\omega^2}{2} \int A^2 \, \delta(dV) = \rho\omega^2 \int A^2 \, R\, \delta r \, ds\, d\Omega.$$

Étape 2 — Réécriture sous la mesure dV. Puisque $dV = R^2\, ds\, d\Omega$, on a $ds\, d\Omega = dV/R^2$, donc

$$\delta E_{\text{cin}} = \rho\omega^2 \int A^2 \, \frac{\delta r}{R} \, dV.$$

Lecture variationnelle. Par définition,

$$\delta E_{\text{cin}} = \int \frac{\delta E_{\text{cin}}}{\delta r} \, \delta r \, dV,$$

d'où

$$\boxed{\frac{\delta E_{\text{cin}}}{\delta r} = \rho\omega^2 \, \frac{A^2}{R}}.$$

Dans le cœur quasi-plat, $R = R_0 + r \simeq R_0$, donc

$$\boxed{\frac{\delta E_{\text{cin}}}{\delta r} \;\simeq\; \frac{\rho\omega^2}{R_0} \, A^2}.$$

Conséquence pour l'EL radiale locale. Dans la réduction locale de cœur, où l'on retient au premier ordre seulement le terme r'' dans l'opérateur radial, la contribution cinétique apparaît comme une source inertielle positive :

$$-\,T\kappa_r \, r''(s) \;+\; \frac{\rho\omega^2}{R_0} \, A^2(s) \;+\; \cdots \;=\; 0.$$

Remarque (extérieur exact). Dans la zone extérieure, on revient à la mesure hypersphérique exacte

$$dV_{\text{ext}} = J_0(s)\, ds\, d\Omega, \qquad J_0(s) = R_0^2 \sin^2(s/R_0),$$

qui ne dépend pas de r. On a donc

$$\delta_r E_{\text{cin}} = 0 \qquad \text{pour } |s| > s_c.$$

Synthèse (variation globale). On obtient ainsi

$$\boxed{\frac{\delta E_{\text{cin}}}{\delta r}(s) = \begin{cases} \rho\,\omega^2\,\dfrac{A^2(s)}{R(s)}, & |s| \le s_c, \\ 0, & |s| > s_c, \end{cases}}$$

ou encore

$$\frac{\delta E_{\text{cin}}}{\delta r}(s) = \chi_{\text{c}}(s)\,\rho\,\omega^2\,\frac{A^2(s)}{R(s)}, \qquad \chi_{\text{c}}(s) = \mathbf{1}_{\{|s|\le s_c\}}.$$

Dans le cœur quasi-plat,

$$\boxed{\frac{\delta E_{\text{cin}}}{\delta r}(s) \;\simeq\; \chi_{\text{c}}(s)\,\frac{\rho\,\omega^2}{R_0}\,A^2(s)}.$$

4.4.2 Variation de l'énergie tangentielle (effet gradient)

Dans la réduction locale du cœur, on a

$$|\nabla A|^2 \simeq (A_s)^2,$$

et

$$E_{\text{tan}} = \frac{T}{2}\int (A_s)^2\,dV, \qquad dV = J(s)\,ds\,d\Omega.$$

La seule dépendance en r passe alors par la mesure, d'où

$$\delta E_{\text{tan}} = \frac{T}{2}\int (A_s)^2\,\delta(dV) = \frac{T}{2}\int (A_s)^2\,(2R\,\delta r)\,ds\,d\Omega = T\int (A_s)^2\,\frac{\delta r}{R}\,dV.$$

Ainsi

$$\boxed{\frac{\delta E_{\text{tan}}}{\delta r} = T\,\frac{(A_s)^2}{R}} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\frac{\delta E_{\text{tan}}}{\delta r} \;\simeq\; \frac{T}{R_0}\,(A_s)^2} \text{ (dans le cœur).}$$

Remarque (extérieur exact). Dans la zone extérieure, on revient à la mesure hypersphérique exacte

$$dV_{\text{ext}} = J_0(s)\,ds\,d\Omega, \qquad J_0(s) = R_0^2\sin^2(s/R_0),$$

qui ne dépend pas de r. On a donc

$$\delta_r E_{\text{tan}} = 0 \qquad \text{pour } |s| > s_c.$$

Synthèse (variation globale). On obtient

$$\boxed{\frac{\delta E_{\text{tan}}}{\delta r}(s) = \begin{cases} T\,\dfrac{(A_s(s))^2}{R(s)}, & |s| \le s_c, \\ 0, & |s| > s_c, \end{cases}}$$

ou encore

$$\frac{\delta E_{\text{tan}}}{\delta r}(s) = \chi_{\text{c}}(s)\,T\,\frac{(A_s(s))^2}{R(s)}.$$

Dans le cœur quasi-plat,

$$\boxed{\frac{\delta E_{\text{tan}}}{\delta r}(s) \;\simeq\; \chi_{\text{c}}(s)\,\frac{T}{R_0}\,(A_s(s))^2}.$$

4.5 Périmètre de la réduction locale du cœur

La réduction locale du cœur sert uniquement à contrôler les signes et les ordres de grandeur des contributions cinétique et tangentielle dans une calotte quasi-plate. Elle ne constitue pas une fermeture indépendante du canal radial. La fermeture opérative utilisée dans la suite du manuscrit est la fermeture globale par l'opérateur radial elliptique et son Green réduit.

Variation cohérente du terme géométrique local. Dans la fermeture 2DOF, le coefficient géométrique tangent vaut

$$\beta_{\mathrm{geom}}(R) = \frac{2T}{R^2}.$$

Si l'on varie localement la mesure réduite de cœur en même temps que ce coefficient, on doit utiliser

$$dV = R^2\, ds\, d\Omega.$$

Le terme effectif correspondant s'écrit alors

$$E_{\mathrm{eff}} = \frac{1}{2}\int \beta_{\mathrm{geom}}(R)\, A^2\, dV = \frac{1}{2}\int \frac{2T}{R^2} A^2\, R^2\, ds\, d\Omega = T\int A^2\, ds\, d\Omega.$$

Ainsi, dans cette variation locale complète,

$$\boxed{\frac{\delta E_{\mathrm{eff}}}{\delta r} = 0.} \tag{4.4}$$

Le terme géométrique effectif ne doit donc pas être compté comme une source locale séparée lorsque la variation de la mesure $R^2\, ds\, d\Omega$ est traitée simultanément.

Statut des contributions cinétique et tangentielle locales. Les variations locales des contributions cinétique et tangentielle gardent un sens comme contrôles de signe dans la calotte de cœur :

$$\frac{\delta E_{\mathrm{cin}}}{\delta r} \simeq \frac{\rho\omega^2}{R_0} A^2, \qquad \frac{\delta E_{\mathrm{tan}}}{\delta r} \simeq \frac{T}{R_0}(A_s)^2,$$

au rang quasi-plat. Ces expressions ne définissent cependant pas, à elles seules, une fermeture radiale universelle. Elles fournissent uniquement des contrôles locaux de signe et de sensibilité du cœur quasi-plat. Elles ne doivent pas être identifiées à la source radiale globale consommée par les fermetures aval.

Fermeture radiale retenue. La fermeture utilisée ensuite est la fermeture globale du canal radial. On introduit l'opérateur réduit

$$\mathcal{L}_{\lambda_r} r := -\frac{1}{J(s)}\partial_s\big(J(s)\partial_s r\big) + \lambda_r^2 r, \qquad \lambda_r^2 = \frac{\mu_2}{T\kappa_r}.$$

La réponse radiale est donnée par

$$\mathcal{L}_{\lambda_r} r = S_{\mathrm{glob}}[A], \qquad r = \mathcal{G}_{\lambda_r} S_{\mathrm{glob}}[A],$$

où $\mathcal{G}_{\lambda_r}$ est le Green de l'opérateur radial avec les conditions de bord et de raccord du cœur. Dans la limite locale de screening fort, cette fermeture globale peut être lue sous la forme algébrique

$$r \simeq \frac{\gamma}{\lambda_r^2} A^2,$$

mais cette expression est une limite de la réponse de Green, et non une fermeture locale indépendante.

Conséquence pour la réduction cubique. Une réduction cubique locale de l'équation d'amplitude n'est légitime que comme limite projetée de la fermeture globale précédente. Au rang LO utilisé dans les fermetures opératives du manuscrit, la source radiale consommée par les chaînes aval est donc celle issue de

$$r = \mathcal{G}_{\lambda_r} S_{\mathrm{glob}}[A],$$

puis, lorsque le régime de screening fort est vérifié, de son approximation locale

$$r \simeq \frac{\gamma}{\lambda_r^2} A^2.$$

Aucune source locale supplémentaire issue de E_{eff} n'est ajoutée à cette fermeture.

En particulier, la source cinétique réduite obtenue par variation locale de mesure,

$$S_{\mathrm{loc}}(s) \simeq \frac{\rho\omega^2}{T\kappa_r R_0}\, A^2(s),$$

n'est pas une seconde source radiale opérative. Comparée à la source globale retenue

$$S_{\mathrm{glob}}(s) = \gamma A^2(s) = \frac{2}{\kappa_r R_0^3} A^2(s),$$

elle vérifie formellement

$$\frac{S_{\mathrm{loc}}}{S_{\mathrm{glob}}} \simeq \frac{\rho\omega^2 R_0^2}{2T} = \frac{\omega^2 R_0^2}{2c_t^2} \simeq \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\mathrm{geo}}^{-2} \gg 1, \qquad \varepsilon_{\mathrm{geo}} := \frac{c_t}{\omega R_0}.$$

Cette différence de magnitude confirme que S_{loc} ne peut pas être ajoutée à S_{glob} sans double comptage ni changement de fermeture. Son usage est diagnostique ; la fermeture opérative reste $r = \mathcal{G}_{\lambda_r} S_{\mathrm{glob}}[A]$.

4.5.1 Énergie radiale exacte

On introduit l'opérateur radial physique

$$\mathcal{L}_{\lambda_r} r := -\frac{1}{J(s)} \partial_s\big(J(s)\,\partial_s r\big) + \lambda_r^2\, r, \qquad \lambda_r^2 = \frac{\mu_2}{T\kappa_r}.$$

L'énergie radiale totale s'écrit alors

$$\boxed{E_{\mathrm{rad}} = \frac{1}{2} T\kappa_r \int \Big((\partial_s r)^2 + \lambda_r^2 r^2\Big)\, J(s)\, ds = \frac{1}{2} T\kappa_r \,\langle r, \mathcal{L}_{\lambda_r} r\rangle_J = \frac{1}{2} T\kappa_r \,\langle S, \mathcal{L}_{\lambda_r}^{-1} S\rangle_J,}$$

où $\langle f, g\rangle_J := \int f(s) g(s) J(s)\, ds$, et où $\mathcal{L}_{\lambda_r}^{-1}$ est l'inverse de l'opérateur défini avec les mêmes conditions de bord/raccord.

4.5.2 Forme de Green non locale

Soit $G_{\lambda_r}(s, x)$ la fonction de Green de l'opérateur elliptique $\mathcal{L}_{\lambda_r}$ sur la géométrie réduite considérée, avec conditions de régularité aux pôles et conditions de raccord compatibles avec le poids J.

Cas sans terme de masse. Pour l'opérateur pur

$$\mathcal{L}_0 := -\,J(s)^{-1}\partial_s(J(s)\partial_s\,\cdot\,),$$

le noyau contient les constantes. On entend alors G_0 comme la Green pseudo-inverse sur $\{1\}^{\perp}$, c'est-à-dire après projection orthogonale de la source sur le sous-espace de moyenne nulle.

Cas radial physique. Lorsque l'on conserve le terme de screening radial, l'opérateur pertinent est

$$\mathcal{L}_{\lambda_r} = \mathcal{L}_0 + \lambda_r^2,$$

qui est inversible sur les fonctions régulières et ne nécessite pas de pseudo-inverse. Dans toute la suite, la réduction à $\mathcal{L}_0$ seul doit donc être comprise comme une approximation locale de leading order lorsque le terme $\lambda_r^2 r$ est négligé dans la zone considérée.

4.5.3 Limite locale comme projection de Galerkin de rang 1

On cherche une approximation locale de la forme

$$r_{\mathrm{loc}}(s) = \alpha\, S(s).$$

Un estimateur variationnel naturel est le meilleur approximant $L^2(J)$ de la solution

$$r = \mathcal{L}_{\lambda_r}^{-1} S$$

dans la droite $\mathrm{Span}\{S\}$:

$$\min_{\alpha} \ \| r - \alpha S \|_{L^2(J)}^2.$$

La condition d'orthogonalité

$$\langle r - \alpha S, S \rangle_J = 0$$

donne

$$\alpha = \frac{\langle r, S\rangle_J}{\langle S, S\rangle_J} = \frac{\langle \mathcal{L}_{\lambda_r}^{-1} S, S\rangle_J}{\langle S, S\rangle_J}.$$

On introduit donc le coefficient de Green effectif

$$\boxed{C_G \ := \ \frac{\langle \mathcal{L}_{\lambda_r}^{-1} S, S\rangle_J}{\langle S, S\rangle_J} \ > \ 0, \qquad \mathcal{L}_{\lambda_r}^{-1} S \ \approx \ C_G\, S.}$$

Sous forme de noyau,

$$\boxed{\int G_{\lambda_r}(s,x)\, S(x)\, J(x)\, dx \ \approx \ C_G\, S(s),}$$

ce qui fournit précisément la fermeture non locale $\to$ locale de rang 1.

Remarques. (i) C_G a la dimension de $\mathcal{L}_{\lambda_r}^{-1}$, donc $[C_G] = \text{longueur}^2$, et dépend de la géométrie ainsi que de la forme de S via les produits scalaires pondérés. Pour une source concentrée sur une largeur $\lambda \ll R_0$, on a typiquement $C_G = \mathcal{O}(\lambda^2)$, à facteurs numériques près.

(ii) Dans le cas particulier sans terme de screening radial ($\lambda_r = 0$), l'opérateur pur $\mathcal{L}_0$ possède les constantes dans son noyau. On remplace alors S par sa projection $S_\perp$ sur $\{1\}^\perp$, et l'on utilise la pseudo-inverse correspondante.

4.5.4 Expression pratique de C_G dans la calotte quasi-plate

Dans le cœur quasi-plat, on a $J \simeq$ cste, et en pratique

$$J \simeq R_0^2.$$

Si l'on néglige au leading order le terme de screening radial, l'opérateur réduit devient

$$\mathcal{L}_0 \simeq -\,\partial_{ss}.$$

Pour toute fonction lisse u satisfaisant les conditions homogènes compatibles avec la réduction locale, on a alors

$$\langle \mathcal{L}_0 u, u\rangle_J = \int J\, u_s^2\, ds \simeq R_0^2 \int (u')^2\, ds.$$

En particulier, si $r = \mathcal{L}_0^{-1} S$, alors

$$\langle \mathcal{L}_0^{-1} S, S\rangle_J = \langle r, S\rangle_J = \langle \mathcal{L}_0 r, r\rangle_J.$$

L'approximation de Galerkin de rang 1 consiste alors à chercher

$$\mathcal{L}_0^{-1} S \approx C_G\, S,$$

avec

$$C_G \approx \frac{\langle S, S\rangle_J}{\langle \mathcal{L}_0 S, S\rangle_J} \simeq \frac{\displaystyle\int S^2\, ds}{\displaystyle\int (S')^2\, ds}.$$

On obtient ainsi

$$\boxed{C_G \;\simeq\; \frac{\int S^2\, ds}{\int (S')^2\, ds} = \mathcal{O}(\lambda^2), \qquad C_G > 0,}$$

pour une source localisée de largeur caractéristique λ.

Autrement dit, dans cette approximation locale, l'opérateur intégral se comporte comme un multiplicateur de taille $\sim \lambda^2$ sur la classe des sources étroites et peu oscillantes.

4.5.5 Erreur et domaine de validité

La qualité de l'approximation

$$\mathcal{L}_0^{-1} S \approx C_G\, S$$

se dégrade lorsque les coefficients géométriques varient sensiblement dans le cœur, ou lorsque la source ressent les bords/raccords. Dans le régime

$$\lambda \ll R_0,$$

et pour une source unimodale localisée, on s'attend heuristiquement à une erreur relative de taille

$$\|\mathcal{L}_0^{-1} S - C_G S\|_{L^2(J)} = \mathcal{O}\Big(\frac{\lambda}{R_0}\Big)\, \|S\|_{L^2(J)}.$$

Cette estimation doit être comprise comme un critère de validité asymptotique de la réduction locale, et non comme une borne rigoureuse universelle.

Forme locale diagnostique. Dans le cœur quasi-plat, la variation locale de la mesure réduite conduit au contrôle de signe

$$r''(s) \simeq -\frac{\rho\omega^2}{T\kappa_r R_0}\, A^2(s).$$

Si l'on introduit la source locale associée

$$\mathcal{L}_0 r = S_{\mathrm{loc}}, \qquad S_{\mathrm{loc}}(s) \simeq \frac{\rho\omega^2}{T\kappa_r R_0}\, A^2(s),$$

on obtient une forme utile pour diagnostiquer le signe et l'échelle locale du couplage radial. Cette source S_{loc} n'est pas la source opérative S_{glob} consommée par la fermeture globale $r = \mathcal{G}_{\lambda_r} S_{\mathrm{glob}}[A]$. Elle ne doit donc pas être utilisée comme entrée indépendante des chaînes de masse ou de couplage.

Il en résulte, pour ce diagnostic local seulement, l'énergie radiale réduite

$$E_{\mathrm{rad}} \simeq \frac{1}{2}\, T\kappa_r\, C_G \int S(s)^2\, J(s)\, ds,$$

soit encore

$$E_{\mathrm{rad}} \simeq \frac{1}{2}\, T\kappa_r\, C_G \left(\frac{\rho\omega^2}{T\kappa_r R_0}\right)^2 \int A^4(s)\, J(s)\, ds.$$

Cette expression ne remplace pas l'énergie radiale issue de la Green globale ; elle sert seulement de forme locale de contrôle. Les résultats opératifs du manuscrit utilisent la fermeture globale S_{glob} définie plus haut.

4.5.6 Conclusion pratique

Pour les calculs d'énergie, on conserve de préférence la forme globale non locale en fonction de la Green $G_{\lambda_r}(s, x)$, qui tient compte des contributions de toutes les zones, y compris près des raccords. En revanche, pour la dynamique tangentielle dans le cœur quasi-plat, on peut utiliser la réduction locale menant à une équation de type Klein–Gordon cubique, à condition d'en vérifier a posteriori les hypothèses de validité.

Chapitre 5

Représentation énergétique non locale et fonction de Green pondérée

5.1 Cadre hypersphérique, opérateur et Green pondérée

Cadre global retenu. Dans ce chapitre, on revient à l'opérateur radial global posé sur la sphère de référence $\mathbb{S}^3(R_0)$, muni de sa mesure intrinsèque exacte. Les réductions locales de cœur introduites plus haut n'interviennent ici qu'a posteriori, comme approximations asymptotiques de la représentation globale non locale.

Conventions de mesure (axisymétrie). On utilise la mesure réduite

$$dV = J(s)\, ds\, d\Omega, \qquad J(s) = R_0^2 \sin^2\Big(\frac{s}{R_0}\Big),$$

où $d\Omega$ désigne la mesure standard sur $\mathbb{S}^2$, avec

$$\int_{\mathbb{S}^2} d\Omega = 4\pi.$$

Dans les écritures purement unidimensionnelles le long du méridien, ce facteur angulaire peut être absorbé dans la normalisation globale.

Produit scalaire pondéré. On travaille avec

$$\langle f, g\rangle_J = \int_0^{\pi R_0} f(s)\, g(s)\, J(s)\, ds.$$

Opérateur radial physique. L'opérateur radial pertinent pour le secteur physique avec screening est

$$\boxed{\mathcal{L}_{\lambda_r} = -\frac{1}{J}\partial_s(J\,\partial_s\,\cdot\,) + \lambda_r^2, \qquad \lambda_r^2 = \frac{\mu_2}{T\kappa_r}.}$$

En axisymétrie hypersphérique,

$$\frac{J'}{J} = \frac{2}{R_0}\cot\Big(\frac{s}{R_0}\Big),$$

de sorte que

$$\mathcal{L}_{\lambda_r} = -\Big(\partial_{ss} + \frac{2}{R_0}\cot\Big(\frac{s}{R_0}\Big)\partial_s\Big) + \lambda_r^2.$$

On impose des conditions de régularité aux pôles, équivalentes à un flux nul $J\,u_s \to 0$.

Green pondérée : cas physique. La fonction de Green $G_{\lambda_r}(s,x)$ de l'opérateur $\mathcal{L}_{\lambda_r}$ est définie par

$$\boxed{\mathcal{L}_{\lambda_r,s}\, G_{\lambda_r}(s,x) = \frac{\delta(s-x)}{J(s)},}$$

avec les mêmes conditions aux bords. Cette normalisation pondérée rend $\mathcal{L}_{\lambda_r}^{-1}$ inverse pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_J$.

Pour toute source S, on a alors

$$\boxed{r(s) = (\mathcal{L}_{\lambda_r}^{-1}S)(s) = \int_0^{\pi R_0} G_{\lambda_r}(s,x)\, S(x)\, J(x)\, dx.}$$

Cas sans terme de masse. Si l'on néglige le screening radial, on obtient l'opérateur pur

$$\mathcal{L}_0 := -\frac{1}{J}\partial_s(J\,\partial_s\ \cdot\ ).$$

Dans ce cas, le noyau contient les constantes. La Green correspondante G_0 doit alors être comprise comme une pseudo-inverse sur $\{1\}^\perp$, c'est-à-dire après projection de la source sur le sous-espace de moyenne nulle.

Représentation énergétique. L'énergie radiale physique s'écrit

$$E_{\mathrm{rad}} = \frac{1}{2}\,T\kappa_r \int_0^{\pi R_0} \Big((r_s)^2 + \lambda_r^2 r^2\Big)\, J(s)\, ds = \frac{1}{2}\,T\kappa_r\, \langle r, \mathcal{L}_{\lambda_r} r\rangle_J.$$

Si $\mathcal{L}_{\lambda_r} r = S$, alors

$$\boxed{E_{\mathrm{rad}} = \frac{1}{2}\,T\kappa_r\, \langle \mathcal{L}_{\lambda_r}^{-1}S,\, S\rangle_J.}$$

En forme noyau,

$$\boxed{E_{\mathrm{rad}} = \frac{1}{2}\,T\kappa_r \iint_{[0,\pi R_0]^2} S(s)\, G_{\lambda_r}(s,x)\, S(x)\, J(s)\, J(x)\, ds\, dx.}$$

Lien avec la réduction locale de cœur. Lorsque la source S est concentrée dans une zone de largeur $\lambda \ll R_0$, la représentation globale par $G_{\lambda_r}(s,x)$ se réduit asymptotiquement à la fermeture locale obtenue dans le cœur quasi-plat. La description par coefficient effectif C_G introduite en §4.5.4 doit alors être comprise comme la projection locale de rang 1 de l'inverse global $\mathcal{L}_{\lambda_r}^{-1}$ sur la classe des sources étroites.

5.2 Identité énergétique tangentielle sur $\mathbb{S}^3$

Dans cette section, on se place dans la branche tangentielle à polarisation circulaire déjà introduite, et l'on note simplement $A(s)$ l'amplitude scalaire associée. L'équation stationnaire d'amplitude s'écrit

$$-\rho\,\omega^2 A = T\,\Delta_{\mathbb{S}^3} A - 2\,V_{\mathrm{eff}}(s)\,A, \qquad c_t^2 = \frac{T}{\rho}, \qquad V_{\mathrm{eff}}(s) = T\,\kappa_{\mathrm{curv}}(s).$$

De façon équivalente,

$$-\omega^2 A = c_t^2\,\Delta_{\mathbb{S}^3} A - \frac{2V_{\mathrm{eff}}(s)}{\rho}\,A.$$

Les énergies tangentielles moyennées sur une période sont alors

$$\overline{E_{\mathrm{cin}}^{\mathrm{tan}}} = \frac{\rho\omega^2}{2}\int_{\mathbb{S}^3} A^2\, dV, \qquad \overline{E_{\mathrm{elas}}^{\mathrm{tan}}} = \frac{T}{2}\int_{\mathbb{S}^3} |\nabla_{\mathbb{S}^3} A|^2\, dV.$$

En multipliant l'équation stationnaire par A et en intégrant sur $\mathbb{S}^3$, puis en utilisant l'intégration par parties sur la sphère compacte sans bord, on obtient

$$\rho\omega^2 \int_{\mathbb{S}^3} A^2\, dV = T\int_{\mathbb{S}^3} |\nabla_{\mathbb{S}^3} A|^2\, dV + 2\int_{\mathbb{S}^3} V_{\mathrm{eff}}(s)\, A^2\, dV.$$

On introduit donc l'énergie de couplage géométrique

$$E_{\mathrm{cpl}} := \int_{\mathbb{S}^3} V_{\mathrm{eff}}(s)\, A^2\, dV,$$

et l'identité énergétique tangentielle prend la forme

$$\boxed{\overline{E_{\mathrm{cin}}^{\mathrm{tan}}} = \overline{E_{\mathrm{elas}}^{\mathrm{tan}}} + E_{\mathrm{cpl}}.}$$

Cette identité est la forme naturelle du bilan énergétique dans le secteur tangent. Si l'on choisit ensuite de regrouper E_{cpl} dans le secteur radial/couplé, on obtient la décomposition purement tangentielle

$$E_c := \overline{E_{\mathrm{elas}}^{\mathrm{tan}}} = \overline{E_{\mathrm{cin}}^{\mathrm{tan}}} - E_{\mathrm{cpl}}.$$

Autrement dit, l'égalité entre les parts cinétique et élastique du secteur tangent n'est pas ici une identité primitive, mais une écriture obtenue après reclassement du terme de couplage.

Dans cette convention,

$$E_{\mathrm{tot}} = \overline{E_{\mathrm{cin}}^{\mathrm{tan}}} + \overline{E_{\mathrm{elas}}^{\mathrm{tan}}} + E_{\mathrm{rad}},$$

où E_{rad} doit être entendu avec la convention de comptage adoptée pour la part de couplage géométrique.

5.3 Cohérence énergétique au premier ordre dans le régime de screening fort

Cadre. On se place dans la branche 2DOF axisymétrique, dans le cœur quasi-plat

$$\lambda \ll R_0, \qquad J(s) \simeq J_{\mathrm{c}} \simeq R_0^2,$$

et dans le régime de screening fort

$$\lambda_r\, \lambda \gg 1.$$

Dans ce régime, la fermeture radiale locale est algébrique :

$$r(s) \simeq \frac{\gamma}{\lambda_r^2}\, A(s)^2, \qquad \gamma = \frac{2}{\kappa_r R_0^3}, \qquad \lambda_r^2 = \frac{\mu_2}{T\kappa_r}. \tag{5.1}$$

Équation d'amplitude locale. Dans la même approximation, l'équation d'amplitude devient

$$A'' - \Omega_0^2 A + \beta_{\mathrm{alg}} A^3 \simeq 0, \qquad \beta_{\mathrm{alg}} = \frac{4\gamma}{\lambda_r^2 R_0^3} = \frac{8}{\kappa_\mu R_0^6}, \tag{5.2}$$

où

$$\kappa_\mu = \frac{\mu_2}{T}, \qquad [\kappa_\mu] = \mathrm{m}^{-2}.$$

Profil localisé. L'équation (5.2) admet la solution localisée standard

$$A(s) = A_0 \operatorname{sech}(\Omega_0 s), \qquad A_0^2 = \frac{2\Omega_0^2}{\beta_{\text{alg}}}. \tag{5.3}$$

Énergie tangentielle pure. Après reclassement du couplage géométrique dans le secteur radial/couplé, on définit

$$E_c := \overline{E^{\tan}_{\text{elas}}} = \overline{E^{\tan}_{\text{cin}}} - E_{\text{cpl}}.$$

Dans le cœur local, on a alors

$$E_c = \frac{TJ_{\text{c}}}{2} \int_{\mathbb{R}} (A')^2 \, ds.$$

Or, pour le profil (5.3),

$$A'(s) = -A_0\Omega_0 \operatorname{sech}(\Omega_0 s) \tanh(\Omega_0 s),$$

et l'identité

$$\int_{\mathbb{R}} \operatorname{sech}^2 u \, \tanh^2 u \, du = \frac{2}{3}$$

donne

$$E_c = \frac{TJ_{\text{c}}}{2} A_0^2\Omega_0 \cdot \frac{2}{3} = \frac{TJ_{\text{c}}A_0^2\Omega_0}{3} = \frac{2TJ_{\text{c}}\Omega_0^3}{3\beta_{\text{alg}}}. \tag{5.4}$$

Énergie radiale. Dans le régime $\lambda_r\lambda \gg 1$, la contribution dominante de l'énergie radiale provient du terme local de screening :

$$E_{\text{rad}} \simeq \frac{T\kappa_r\lambda_r^2 J_{\text{c}}}{2} \int_{\mathbb{R}} r(s)^2 \, ds.$$

En utilisant (5.1),

$$r(s)^2 \simeq \frac{\gamma^2}{\lambda_r^4} A(s)^4,$$

et, pour le profil (5.3),

$$\int_{\mathbb{R}} A^4 \, ds = A_0^4 \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sech}^4(\Omega_0 s) \, ds = A_0^4 \, \frac{4}{3\Omega_0},$$

car

$$\int_{\mathbb{R}} \operatorname{sech}^4 u \, du = \frac{4}{3}.$$

On obtient donc

$$E_{\text{rad}} = \frac{T\kappa_r\lambda_r^2 J_{\text{c}}}{2} \cdot \frac{\gamma^2}{\lambda_r^4} \cdot \frac{4A_0^4}{3\Omega_0}. \tag{5.5}$$

En remplaçant

$$A_0^4 = \frac{4\Omega_0^4}{\beta_{\text{alg}}^2}, \qquad \beta_{\text{alg}} = \frac{4\gamma}{\lambda_r^2 R_0^3},$$

on simplifie (5.5) en

$$E_{\text{rad}} = \frac{T\kappa_r\lambda_r^2 J_{\text{c}} R_0^6 \Omega_0^3}{6}. \tag{5.6}$$

Comparaison. À partir de (5.4) et de

$$\beta_{\mathrm{alg}} = \frac{8}{\kappa_\mu R_0^6}, \qquad T\kappa_\mu = \mu_2 = T\kappa_r \lambda_r^2,$$

on obtient

$$E_c = \frac{T\kappa_r \lambda_r^2 J_c R_0^6 \Omega_0^3}{12}. \tag{5.7}$$

En comparant (5.6) et (5.7), on conclut

$$\boxed{E_{\mathrm{rad}} \simeq 2E_c.} \tag{5.8}$$

Énergie totale. Dans la convention de reclassement adoptée, la partie tangentielle pure vaut

$$E_{\mathrm{tan}}^{\mathrm{pur}} = 2E_c.$$

Par conséquent,

$$\boxed{E_{\mathrm{tot}} = E_{\mathrm{tan}}^{\mathrm{pur}} + E_{\mathrm{rad}} \simeq 2E_c + 2E_c = 4E_c.} \tag{5.9}$$

Portée. Les relations (5.8)–(5.9) sont démontrées dans le régime

$$\lambda_r \lambda \gg 1$$

avec fermeture radiale algébrique locale et profil sech issu de (5.2). Dans cette réduction LO, le facteur numérique 2 entre E_{rad} et E_c est exact. La relation $E_{\mathrm{rad}} \simeq 2E_c$ vaut donc dans le régime de screening fort avec coeur quasi-plat. En régime radial mou,

$$\lambda_r \lambda \ll 1,$$

la fermeture algébrique est remplacée par la fermeture différentielle, qui n'est pas requise dans le présent chapitre.

5.4 Indice géométrique de spin : définition, comptage et tests

Rotateur tangent complexe et nombre effectif de polarisations. On écrit le champ tangent dans une base orthonormée locale $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ sous forme complexe à la porteuse ω_0 :

$$\mathbf{u}_{\parallel}(t,s) = \Re\left[\sum_{j=1}^{2} a_j(s)\, e^{i\omega_0 t}\, \vec{e}_j\right].$$

On appelle *nombre effectif de polarisations circulaires*

$$N_{\mathrm{pol}} := \mathrm{rank}_{\mathbb{C}}\, \mathrm{Span}\{a_1(s), a_2(s)\}$$

le nombre de polarisations circulaires indépendantes restant après prise en compte des contraintes physiques (orthogonalité $L^2(\mathbb{S}^3)$, raccord C^1, symétries internes, *etc.*). Ainsi,

$$N_{\mathrm{pol}} = 1$$

signifie qu'une seule polarisation circulaire indépendante porte la dynamique, tandis que

$$N_{\mathrm{pol}} = 2$$

correspond à deux polarisations indépendantes.

Enroulement et monodromie. Soit $w \in \mathbb{N}$ le nombre d'enroulement du rotateur tangent normalisé sur une période $2\pi/\omega_0$. Pour les branches fondamentales sans nœud interne, le raccord C^1 au rang LO sélectionne l'enroulement fondamental

$$w = 1,$$

cf. (6.106).

Le principe de comptage retenu est le suivant : chaque polarisation circulaire indépendante contribue un facteur de monodromie $(-1)^w$ sur un cycle complet du rotateur tangent. Cette lecture de monodromie est cohérente avec la lecture géométrique par connexion de Berry exposée en §8.3, où la phase géométrique du rotateur tangent est reliée au nombre de spin géométrique. Pour N_{pol} polarisations indépendantes, la monodromie totale est donc

$$\mathcal{R}(2\pi) : \quad \mathbf{u}_{\parallel} \mapsto (-1)^{wN_{\mathrm{pol}}}\, \mathbf{u}_{\parallel}.$$

Ainsi,

$$\mathcal{R}(2\pi) = -\mathrm{Id} \quad \Longleftrightarrow \quad wN_{\mathrm{pol}} \text{ impair},$$

ce qui correspond à une classe demi-entière, tandis que wN_{pol} pair correspond à une classe entière.

Définition de l'indice géométrique de spin. On introduit l'indice géométrique

$$\boxed{s_g := \frac{wN_{\mathrm{pol}}}{2}.}$$

Cet indice doit être compris comme un compteur géométrique adapté au classement des branches au LO. Il vérifie immédiatement :

— si wN_{pol} est impair, alors $s_g \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$;

— si wN_{pol} est pair, alors $s_g \in \mathbb{Z}$.

Conséquences immédiates.

1. Si N_{pol} est impair au sein d'une branche fondamentale à $w = 1$, on obtient une classe demi-entière.
2. Si N_{pol} est pair au sein d'une branche fondamentale à $w = 1$, on obtient une classe entière.
3. Plus généralement, c'est la parité du produit wN_{pol} qui fixe la classe de spin.

Tests opérationnels (détermination de N_{pol} et w au LO).

1. **Orthogonalité L^2 et support :** séparer les contributions tangentes indépendantes.
2. **Porteuse commune :** vérifier qu'elles partagent la même fréquence ω_0.
3. **Symétries internes :** certaines contraintes peuvent réduire le nombre effectif de polarisations indépendantes.
4. **Raccord C^1 et structure fondamentale :** pour les branches fondamentales sans nœud interne, le raccord LO sélectionne $w = 1$, cf. (6.106).

Portée du comptage géométrique. Le comptage par

$$s_g = \frac{wN_{\mathrm{pol}}}{2}$$

classe les branches au niveau entier ou demi-entier et fixe la classe géométrique du spin au LO. En particulier, lorsque wN_{pol} est impair, la branche appartient à une classe spinorielle avec retour à signe près sur 2π et retour strict sur 4π. La norme physique du spin et la structure de ses projections doivent ensuite être établies famille par famille ; elles ne relèvent pas, à ce stade, du seul comptage géométrique commun.

Chapitre 6

Solutions 2DOF unitaires sur $\mathbb{S}^3$: bump et NSL

6.1 Cadre commun et critères de validité (sans fermeture a priori)

Réduction locale dans le cœur quasi-plat. Dans la calotte quasi-plate, de coordonnée géodésique s et de largeur $\lambda \ll R_0$, la dynamique tangentielle 2DOF admet au rang meneur une réduction locale de la forme

$$A''(s) - \Omega_0^2 A(s) + \frac{4}{R_0^3}\, r(s)\, A(s) \simeq 0,$$

où $r(s)$ désigne le fond radial local. Une réduction supplémentaire vers une équation de Klein–Gordon cubique

$$A''(s) - \Omega^2 A(s) + \beta A^3(s) = 0$$

n'est introduite que lorsqu'un régime radial explicite permet de fermer localement r en fonction de A^2.

Découpage en zones. On choisit un seuil $s_c = k\lambda$ avec $k \geq 3$. Dans la zone centrale $|s| \leq s_c$, on travaille dans le régime quasi-plat. Dans la zone intermédiaire $s_c < |s| < s_e$, les contributions résiduelles restent petites ; pour des profils de type bump, elles sont typiquement de l'ordre $\mathcal{O}(e^{-k})$. Enfin, la zone extérieure $|s| \geq s_e$ est gouvernée par l'équation linéaire hypersphérique, et raccordée par continuité de A et du flux JA_s.

Jauge locale du cœur (équateur). On centre le cœur autour d'une latitude $\chi_0 \simeq \pi/2$ (équateur) et l'on translate l'abscisse curviligne de sorte que $s = 0$ corresponde à χ_0. Dans cette jauge, pour $|s| \lesssim \lambda \ll R_0$,

$$J(s) = R_0^2 \sin^2\chi\big((s + s_0)/R_0\big) \simeq R_0^2.$$

Les contributions géométriques explicites de type $1/R_0^2$ sont alors d'ordre

$$\mathcal{O}\big((\lambda/R_0)^2\big),$$

et sont négligées au premier ordre dans le cœur.

6.2 Forme canonique commune du secteur 2DOF et identification de h_{eff}

Objet. On regroupe ici les éléments réellement communs au secteur 2DOF, indépendamment de l'identité détaillée de la famille (bump, NSL, *etc.*). Le point central est l'existence d'une variable de phase tangentielle réduite et d'une structure canonique commune au rang meneur.

Réduction canonique (phase tangentielle réduite). Au LO, une solution 2DOF neutre admet une réduction à une phase tangentielle $\phi(t)$ décrivant la rotation uniforme du vecteur

$$q(t) = (\cos\phi, \sin\phi)$$

dans un plan local. Après projection radiale au LO et intégration spatiale, la dynamique réduite est celle d'un mode périodique de fréquence ω, caractérisé par une variable de phase commune de période 2π.

Action canonique. Pour un mouvement périodique harmonique de fréquence ω, on peut écrire

$$\phi = A\cos\tau, \qquad \dot\phi = -A\omega\sin\tau, \qquad p = I_{\text{eff}}\dot\phi,$$

où $I_{\text{eff}} > 0$ est un coefficient effectif de forme. L'action canonique vaut alors

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2\pi}\oint p\,d\phi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} I_{\text{eff}}\omega A^2\sin^2\tau\,d\tau = \frac{I_{\text{eff}}\omega A^2}{2}.$$

Comme l'énergie réduite du mode est

$$E = \frac{1}{2}I_{\text{eff}}\omega^2 A^2,$$

on obtient l'identité générale

$$\boxed{\mathcal{J} = \frac{E}{\omega}.}$$

Convention EBK absorbée du secteur 2DOF. L'action $\mathcal{J}$ définie ci-dessus est déjà l'action réduite

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2\pi}\oint p\,d\phi.$$

La convention EBK absorbée du secteur 2DOF consiste à fixer le niveau fondamental de cette action réduite par

$$\boxed{\mathcal{J} = h_{\text{eff}}.} \tag{6.1}$$

Les indices spectraux éventuels sont portés par la fréquence observée ω, et non par un facteur multiplicatif supplémentaire dans $\mathcal{J}$. En combinant $\mathcal{J} = E/\omega$ avec (6.1), on obtient

$$\boxed{E = h_{\text{eff}}\,\omega.} \tag{6.2}$$

Cette convention fixe l'unité interne d'action du secteur 2DOF. Elle ne constitue pas une identification observationnelle de h_{eff}.

Portée. Les relations précédentes doivent être comprises comme des résultats LO communs au secteur 2DOF. Elles portent sur la structure canonique réduite, la périodicité de phase et la règle EBK commune du secteur 2DOF, mais ne fixent pas encore à elles seules la norme physique du spin ni la structure de ses projections. Ces points doivent être établis ensuite famille par famille.

6.3 Solution bump : profil, validité, spin

6.3.1 Solution interne locale de l'équation cubique

Proposition 6.1 (Profil local *bump* au LO)**.** *Dans le régime de screening fort où la fermeture radiale locale conduit à l'équation cubique*

$$A'' - \Omega_0^2 A + \beta_{\mathrm{alg}} A^3 = 0, \qquad \Omega_0 > 0, \qquad \beta_{\mathrm{alg}} > 0, \tag{6.3}$$

la solution locale centrée en $s = 0$, positive, paire et bornée, vérifiant

$$A(0) = A_0 > 0, \qquad A'(0) = 0, \qquad A(s) \to 0 \quad \textit{quand } |s| \to \infty,$$

est

$$\boxed{A_{\mathrm{in}}(s) = A_0 \,\mathrm{sech}(\Omega_0 s) = A_0 \,\mathrm{sech}\Big(\frac{s}{\lambda_{\mathrm{bump}}}\Big), \qquad \lambda_{\mathrm{bump}} := \frac{1}{\Omega_0}, \qquad A_0^2 = \frac{2\Omega_0^2}{\beta_{\mathrm{alg}}}.}$$

Ici, la condition $A(s) \to 0$ lorsque $|s| \to \infty$ doit être comprise dans la réduction locale de cœur quasi-plat, où la coordonnée géodésique locale est étendue à $\mathbb{R}$ avant raccord avec la solution extérieure sur $\mathbb{S}^3(R_0)$.

Démonstration. On multiplie (6.3) par A' et l'on intègre une fois :

$$\frac{1}{2}(A')^2 - \frac{\Omega_0^2}{2} A^2 + \frac{\beta_{\mathrm{alg}}}{4} A^4 = C.$$

Comme $A(s) \to 0$ et $A'(s) \to 0$ lorsque $|s| \to \infty$ dans la réduction locale, on obtient $C = 0$. Il vient donc

$$(A')^2 = \Omega_0^2 A^2 - \frac{\beta_{\mathrm{alg}}}{2} A^4 = \Omega_0^2 A^2 \Big(1 - \frac{A^2}{A_0^2}\Big), \qquad A_0^2 = \frac{2\Omega_0^2}{\beta_{\mathrm{alg}}}.$$

Sur $s \geq 0$, la solution cherchée est décroissante, donc

$$A' = -\Omega_0 A \sqrt{1 - \frac{A^2}{A_0^2}}.$$

On sépare les variables :

$$\frac{dA}{A\sqrt{1 - A^2/A_0^2}} = -\Omega_0 \, ds.$$

En posant

$$A(s) = A_0 \,\mathrm{sech}\, u(s),$$

on a

$$dA = -A_0 \,\mathrm{sech}\, u \,\tanh u \, du, \qquad \sqrt{1 - \frac{A^2}{A_0^2}} = \tanh u,$$

d'où

$$du = \Omega_0 \, ds.$$

La condition $A'(0) = 0$ avec $A(0) = A_0$ impose $u(0) = 0$, donc

$$u(s) = \Omega_0 s \qquad (s \geq 0).$$

Ainsi,

$$A(s) = A_0 \,\mathrm{sech}(\Omega_0 s) \qquad (s \geq 0).$$

La parité imposée par $A'(0) = 0$ prolonge ensuite la solution à tout $s \in \mathbb{R}$, ce qui donne l'expression annoncée. L'unicité dans cette classe résulte du problème de Cauchy associé à (6.3). □

6.3.2 Compatibilité cinématique du bump en mouvement

Le bump 2DOF est construit comme solution localisée massique dans son repère comobile. Sa compatibilité avec un mouvement uniforme est traitée dans le chapitre 7. Ce traitement établit séparément la loi de boost du cœur massique réduit et le critère de localisation de la gaine radiale comobile.

6.3.3 Validation du bump par découpage en trois zones

On reprend le découpage introduit au §6.1 : zone centrale $|s| \le s_c$, zone intermédiaire $s_c < |s| < s_e$, puis zone extérieure $|s| \ge s_e$. On fixe

$$s_c = k\,\lambda_{\mathrm{bump}}, \qquad \lambda_{\mathrm{bump}} := \frac{1}{\Omega_0}, \qquad k > 0.$$

Pour le profil interne

$$A_{\mathrm{in}}(s) = A_0\ \mathrm{sech}\Big(\frac{s}{\lambda_{\mathrm{bump}}}\Big),$$

on a, pour $|s| \ge s_c$,

$$|A_{\mathrm{in}}(s)| \le 2A_0 e^{-k}, \qquad |A'_{\mathrm{in}}(s)| \le \frac{2A_0}{\lambda_{\mathrm{bump}}}\, e^{-k}.$$

Les contributions portées par la zone intermédiaire, ainsi que les termes de connexion de la base tangentielle dans l'EDO projetée sur le mode retenu, sont donc pondérés par A_{in} ou A'_{in} et restent exponentiellement petits :

$$\text{erreur intermédiaire} = \mathcal{O}(e^{-k}).$$

Dans la zone centrale, les corrections géométriques sont contrôlées par les estimations déjà établies. Plus précisément,

$$\Big|\frac{J'}{J}A'\Big| \le C\,\varepsilon_{\mathrm{slope}}\varepsilon_{\mathrm{geo}}\,|A''|, \qquad \text{et} \qquad \text{courbure de fond} = \mathcal{O}\Big(\Big(\frac{\lambda_{\mathrm{bump}}}{R_0}\Big)^2\Big),$$

pour une constante $C = O(1)$, avec

$$\varepsilon_{\mathrm{geo}} := \frac{\lambda_{\mathrm{bump}}}{R_0}, \qquad \varepsilon_{\mathrm{slope}} := \max_{|s|\le s_c} |r'(s)|.$$

On obtient ainsi, pour le profil de coeur, l'estimation d'erreur globale

$$\boxed{\text{erreur} = \mathcal{O}(e^{-k}) + \mathcal{O}(\varepsilon_{\mathrm{slope}}\varepsilon_{\mathrm{geo}}) + \mathcal{O}\Big(\Big(\frac{\lambda_{\mathrm{bump}}}{R_0}\Big)^2\Big).}$$

En particulier, le profil de coeur est valide au premier ordre dès que

$$k \text{ est choisi suffisamment grand}, \qquad \frac{\lambda_{\mathrm{bump}}}{R_0} \ll 1, \qquad \max_{|s|\le s_c} |r'(s)| \ll 1.$$

Un choix $k \ge 3$ fournit déjà une troncature exponentielle de taille $\mathcal{O}(e^{-3})$.

6.3.4 Spin géométrique du bump

Le mode *bump* porte une seule polarisation circulaire indépendante du champ tangent, d'où

$$N_{\mathrm{pol}} = 1.$$

Pour la branche fondamentale sans nœud interne, le critère général rappelé dans la section de comptage géométrique fixe l'enroulement

$$w = 1$$

au leading order. On obtient alors

$$s_g = \frac{wN_{\mathrm{pol}}}{2} = \frac{1}{2}.$$

Pour cette famille, la cohérence énergétique établie au §5.3 et la forme canonique commune du secteur 2DOF (§6.2) donnent

$$\frac{E}{\omega} = h_{\mathrm{eff}}.$$

Le module physique du spin vaut donc

$$|S| = \frac{1}{2}\,\frac{E}{\omega} = \frac{1}{2}\,h_{\mathrm{eff}}.$$

On obtient ainsi, pour le bump fondamental

$$\boxed{s_g = \tfrac{1}{2}, \qquad |S| = \tfrac{1}{2}\,h_{\mathrm{eff}}.}$$

Portée. Le résultat précédent est spécifique à la branche bump fondamentale : le comptage géométrique fixe la classe demi-entière via

$$wN_{\mathrm{pol}} = 1,$$

tandis que le module du spin est déterminé ici par la fermeture énergétique propre au bump. Les projections signées correspondantes sur le cycle naturel seront établies au §6.3.5. Ce résultat ne doit pas être transposé automatiquement aux autres familles 2DOF.

6.3.5 Projections de spin du bump sur son cycle naturel

Pour le bump libre, le cycle naturel $\Gamma_{\mathrm{nat}} \simeq S^1$ est le grand cercle support du rotateur tangent. On le paramètre par

$$\varphi \in [0, 2\pi).$$

Comme le bump fondamental vérifie

$$w = 1, \qquad N_{\mathrm{pol}} = 1,$$

on a

$$wN_{\mathrm{pol}} = 1,$$

donc la monodromie sur Γ_{nat} est impaire. Le champ relevé sur le cycle naturel satisfait alors la condition antipériodique

$$\Psi(\varphi + 2\pi) = -\,\Psi(\varphi), \qquad \Psi(\varphi + 4\pi) = \Psi(\varphi). \tag{6.4}$$

Il en résulte un développement spectral demi-entier

$$\Psi(\varphi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\, e^{\,i(n+\frac{1}{2})\varphi},$$

pour lequel le générateur

$$K := -\,i\,\partial_\varphi$$

vérifie

$$K\, e^{\,i(n+\frac{1}{2})\varphi} = \left(n+\frac{1}{2}\right) e^{\,i(n+\frac{1}{2})\varphi}.$$

Le sous-espace fondamental est donc

$$\mathcal{H}_{\frac{1}{2}} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\left\{e^{+i\varphi/2}, e^{-i\varphi/2}\right\}.$$

En posant

$$|+\rangle_\Gamma := e^{+i\varphi/2}, \qquad |-\rangle_\Gamma := e^{-i\varphi/2}, \qquad \widehat{S}_\Gamma := h_{\mathrm{eff}}\, K\big|_{\mathcal{H}_{1/2}},$$

on obtient immédiatement

$$\widehat{S}_\Gamma|+\rangle_\Gamma = +\frac{1}{2}\, h_{\mathrm{eff}}\, |+\rangle_\Gamma, \qquad \widehat{S}_\Gamma|-\rangle_\Gamma = -\frac{1}{2}\, h_{\mathrm{eff}}\, |-\rangle_\Gamma.$$

Proposition 6.2 (Doublet de projection du bump)**.** *Le bump fondamental possède, sur son cycle naturel orienté, un doublet de projections de spin*

$$+\frac{1}{2}\, h_{\mathrm{eff}}, \qquad -\frac{1}{2}\, h_{\mathrm{eff}}.$$

Démonstration. La condition (6.4) impose un spectre demi-entier pour $K = -i\partial_\varphi$. La restriction de K au sous-espace fondamental $\mathcal{H}_{1/2}$ possède donc les valeurs propres $\pm\frac{1}{2}$, d'où les valeurs propres $\pm\frac{1}{2}h_{\mathrm{eff}}$ pour $\widehat{S}_\Gamma = h_{\mathrm{eff}}K|_{\mathcal{H}_{1/2}}$. □

Dégénérescence au rang dominant. Au rang dominant, si le problème effectif est invariant par renversement

$$\varphi \mapsto -\varphi,$$

ou si l'énergie dépend de K seulement via K^2, les deux états

$$|+\rangle_\Gamma, \qquad |-\rangle_\Gamma$$

sont dégénérés. Cette symétrie est naturelle pour le bump libre et pour les problèmes liés à symétrie centrale au premier ordre.

6.4 Solution NSL 2DOF : construction, validité, spin

6.4.1 Ansatz à deux jambes et motivation géométrique

Dans la suite, on appelle *NSL 2DOF* la branche à deux jambes iso-fréquences décrite ci-dessous. On travaille dans un voisinage tubulaire d'une géodésique centrale Γ (axe du cœur). La variable

$$s$$

désigne l'abscisse curviligne le long de Γ, tandis que

$$\vartheta \in [0, 2\pi)$$

désigne l'angle azimutal dans le 2-plan tangent transverse retenu,

$$\Pi_\perp(s) = \mathrm{Span}\{\vec{e}_1(s), \vec{e}_2(s)\}.$$

Le second angle transverse global de $\mathbb{S}^3$ est gelé dans cette réduction locale : l'ansatz ne dépend que de la direction azimutale interne ϑ dans $\Pi_\perp(s)$.

On introduit alors la polarisation circulaire rapide

$$\mathbf{q}(t) := \cos\omega t\,\vec{e}_1 + \sin\omega t\,\vec{e}_2, \qquad J\mathbf{q}(t) := -\sin\omega t\,\vec{e}_1 + \cos\omega t\,\vec{e}_2,$$

où J désigne la rotation de $+\pi/2$ dans le plan $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. L'ansatz NSL 2DOF s'écrit

$$\boxed{\vec{u}_{\mathrm{NSL}}(s,\vartheta,t) = A(s)\Big[\cos\vartheta\,\mathbf{q}(t) + \sin\vartheta\,J\mathbf{q}(t)\Big].}$$

Autrement dit, la solution est construite comme une superposition de deux jambes tangentielles orthogonales, iso-fréquences, partageant la même porteuse temporelle ωt, en quadrature dans le plan transverse.

Zonalité et stationnarité des observables quadratiques. Comme $|\mathbf{q}| = |J\mathbf{q}| = 1$ et $\mathbf{q}\cdot J\mathbf{q} = 0$, on obtient

$$|\vec{u}_{\mathrm{NSL}}(s,\vartheta,t)|^2 = A(s)^2\big(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta\big) = A(s)^2.$$

La quantité $|\vec{u}_{\mathrm{NSL}}|^2$ est donc indépendante à la fois de ϑ et de t. En particulier, la source quadratique alimentant l'équation radiale ne dépend que de s, ce qui rend cohérente la fermeture

$$r = r(s).$$

Pourquoi deux jambes ? Avec une seule jambe, par exemple

$$\vec{u}(s,\vartheta,t) = A(s)\cos\vartheta\,\mathbf{q}(t),$$

on aurait au contraire

$$|\vec{u}|^2 = A(s)^2\cos^2\vartheta = \frac{1}{2}\,A(s)^2(1+\cos 2\vartheta),$$

de sorte que la source quadratique contiendrait une composante non zonale. La fermeture strictement axisymétrique

$$r = r(s)$$

serait alors brisée.

Statut de l'ansatz. La construction à deux jambes n'est donc pas introduite ici comme un artifice gratuit : elle constitue la structure minimale permettant de conserver une fermeture radiale zonale tout en autorisant une dépendance angulaire non triviale du champ tangent. La sous-section suivante montrera que, dans le cœur, cette construction conduit bien à une réduction effective de type Klein–Gordon cubique pour l'enveloppe commune $A(s)$.

6.4.2 Réduction tangentielle au cœur : équation effective

Dans le cœur quasi–plat, la zonalité de la source quadratique

$$|\vec{u}_{\mathrm{NSL}}|^2 = A(s)^2$$

rend cohérente la fermeture radiale $r = r(s)$. Après projection de l'ansatz NSL à deux jambes sur le mode retenu, l'enveloppe commune $A(s)$ vérifie, dans le régime de fermeture cubique locale, une équation scalaire focale de type Klein–Gordon cubique

$$\boxed{A''(s) - \Omega_{\mathrm{NSL}}^2\, A(s) + \beta_{\mathrm{NSL}}\, A^3(s) \;\simeq\; 0, \qquad \Omega_{\mathrm{NSL}}^2 > 0, \qquad \beta_{\mathrm{NSL}} > 0.}$$

Les coefficients effectifs Ω_{NSL} et β_{NSL} regroupent les contributions locales du cœur : terme inertiel tangent, gradients, structure angulaire à deux jambes et fermeture radiale retenue. Ils ne sont donc pas identifiés *a priori* à ceux du bump.

Par application de la proposition 6.1 à cette EDO scalaire, on obtient le profil localisé

$$A(s) = A_0\, \mathrm{sech}\Big(\frac{s}{\lambda_{\mathrm{NSL}}}\Big), \qquad \lambda_{\mathrm{NSL}} := \frac{1}{\Omega_{\mathrm{NSL}}}, \qquad A_0^2 = \frac{2\Omega_{\mathrm{NSL}}^2}{\beta_{\mathrm{NSL}}}.$$

6.4.3 Extérieur hypersphérique et raccord

Hors du cœur, la dépendance angulaire de la NSL est fixée par l'ansatz à deux jambes. Le problème extérieur se ramène donc à une équation linéaire pour l'enveloppe scalaire $A(s)$, associée au mode angulaire retenu sur $\mathbb{S}^3$. La régularité aux pôles sélectionne alors une famille discrète de fréquences admissibles.

Le raccord au bord $s = s_c$ s'impose sur le champ complet. Comme la structure angulaire est commune de part et d'autre du bord, il se réduit au niveau de l'enveloppe aux conditions scalaires

$$[A]_{s=s_c} = 0, \qquad [JA_s]_{s=s_c} = 0.$$

La zonalité de $|\vec{u}_{\mathrm{NSL}}|^2$ garantit ici encore la cohérence de la fermeture radiale.

On n'explicite pas dans cette section la base spectrale extérieure détaillée, celle-ci n'étant pas nécessaire pour les lois d'énergie et de spin utilisées ensuite.

6.4.4 Validité de la réduction à deux zones

Une fois le profil de cœur écrit sous la forme

$$A(s) = A_0\, \mathrm{sech}\Big(\frac{s}{\lambda_{\mathrm{NSL}}}\Big), \qquad s_c = k\lambda_{\mathrm{NSL}},$$

les mêmes estimations de décroissance que pour le bump s'appliquent *mutatis mutandis* (voir §6.3.3) :

$$|A(s)| \le 2A_0 e^{-k}, \qquad |A'(s)| \le \frac{2A_0}{\lambda_{\mathrm{NSL}}} e^{-k} \qquad (|s| \ge s_c).$$

Les termes de connexion hors du cœur contribuent donc $\mathcal{O}(e^{-k})$, tandis que dans le cœur les corrections géométriques restent contrôlées par

$$\mathcal{O}(\varepsilon_{\mathrm{slope}}\varepsilon_{\mathrm{geo}}) + \mathcal{O}\Big(\Big(\frac{\lambda_{\mathrm{NSL}}}{R_0}\Big)^2\Big), \qquad \varepsilon_{\mathrm{geo}} := \frac{\lambda_{\mathrm{NSL}}}{R_0}, \qquad \varepsilon_{\mathrm{slope}} := \max_{|s|\le s_c} |r'(s)|.$$

Ainsi, la réduction NSL à deux zones est valide au premier ordre sous les hypothèses

$$k \text{ assez grand}, \qquad \frac{\lambda_{\mathrm{NSL}}}{R_0} \ll 1, \qquad \max_{|s|\le s_c} |r'(s)| \ll 1,$$

avec une erreur globale de taille

$$\mathcal{O}(e^{-k}) + \mathcal{O}(\varepsilon_{\mathrm{slope}}\varepsilon_{\mathrm{geo}}) + \mathcal{O}\Big(\Big(\frac{\lambda_{\mathrm{NSL}}}{R_0}\Big)^2\Big).$$

6.4.5 Énergie, action et projections entières de la NSL 2DOF

Structure 2DOF de la NSL. La construction NSL à deux jambes fournit deux contributions tangentielles indépendantes partageant la même phase rapide. On a donc

$$N_{\mathrm{pol}} = 2, \qquad w = 1.$$

Le comptage géométrique commun donne alors

$$s_g = \frac{w N_{\mathrm{pol}}}{2} = 1.$$

Énergie et action. La structure canonique commune du secteur 2DOF (§6.2) donne

$$\mathcal{J} = \frac{E_{\mathrm{tot}}}{\omega}, \qquad E_{\mathrm{tot}} = h_{\mathrm{eff}}\,\omega.$$

Monodromie et condition périodique. Comme

$$w N_{\mathrm{pol}} = 2$$

est pair, la monodromie de la NSL 2DOF est triviale :

$$\boxed{\Psi(\varphi + 2\pi) = \Psi(\varphi).}$$

La branche NSL 2DOF appartient donc à une classe entière.

Décomposition spectrale entière. La condition périodique entraîne le développement de Fourier entier

$$\Psi(\varphi) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m\, e^{im\varphi}.$$

En introduisant le générateur

$$K := -\,i\,\partial_\varphi,$$

on a

$$K\, e^{im\varphi} = m\, e^{im\varphi}, \qquad m \in \mathbb{Z}.$$

Sous-espace fondamental entier. Le mode $m = 0$ correspond à une phase constante le long du cycle naturel ; il ne porte donc aucun enroulement et n'est pas compatible avec la branche fondamentale $w = 1$. Le premier sous-espace non trivial compatible avec cette branche est alors

$$\mathcal{H}_1 = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}} \left\{ e^{+i\varphi}, e^{-i\varphi} \right\}.$$

On pose

$$|+\rangle_\Gamma := e^{+i\varphi}, \qquad |-\rangle_\Gamma := e^{-i\varphi}.$$

Opérateur de spin projeté. Dans la normalisation spectrale commune du secteur 2DOF, on définit

$$\widehat{S}_\Gamma := h_{\mathrm{eff}}\, K\big|_{\mathcal{H}_1}.$$

On obtient alors

$$\boxed{\widehat{S}_\Gamma |+\rangle_\Gamma = +h_{\mathrm{eff}}\,|+\rangle_\Gamma, \qquad \widehat{S}_\Gamma |-\rangle_\Gamma = -h_{\mathrm{eff}}\,|-\rangle_\Gamma.}$$

Proposition 6.3 (Projections entières de la NSL 2DOF)**.** *La NSL 2DOF fondamentale possède, sur son cycle naturel orienté, un doublet de projections de spin*

$$+h_{\text{eff}}, \qquad -h_{\text{eff}}.$$

En particulier, son module de spin vaut

$$\boxed{|S_{\text{NSL}}| = h_{\text{eff}}, \qquad s_g = 1.}$$

Démonstration. La monodromie triviale impose la périodicité $\Psi(\varphi + 2\pi) = \Psi(\varphi)$, donc un spectre entier pour $K = -i\partial_\varphi$. Le mode $m = 0$ ne porte aucun enroulement et ne convient pas à la branche fondamentale $w = 1$. Le premier sous-espace non trivial est donc $\mathcal{H}_1 = \text{Span}_{\mathbb{C}}\{e^{+i\varphi}, e^{-i\varphi}\}$, sur lequel K prend les valeurs propres ± 1. La définition $\widehat{S}_\Gamma = h_{\text{eff}} K|_{\mathcal{H}_1}$ donne alors les valeurs propres $\pm h_{\text{eff}}$. Le module vaut donc h_{eff}, et le comptage géométrique donne bien $s_g = 1$. □

Conséquence pour les branches demi-entières. La construction demi-entière du bump, fondée sur une condition antipériodique et conduisant au doublet

$$\pm\frac{1}{2}\, h_{\text{eff}},$$

ne s'applique pas ici. La NSL 2DOF porte au contraire un doublet entier

$$\pm h_{\text{eff}}.$$

Portée. Le secteur NSL 2DOF illustre ainsi la séparation entre :

— le comptage géométrique, qui fixe la classe entière via $wN_{\text{pol}} = 2$;

— et la structure spectrale sur le cycle naturel, qui sélectionne ici le doublet entier $\pm h_{\text{eff}}$.

6.4.6 Remarque sur EBK (placement du spectre)

La quantification EBK porte sur la même variable de phase réduite que pour les autres solutions 2DOF. Dans ce chapitre, on écrit directement

$$\mathcal{J} = \frac{E_{\text{tot}}}{\omega} = h_{\text{eff}},$$

de sorte que le spectre éventuel est porté par la fréquence observée ω. Les sections spectrales ultérieures pourront réintroduire, si nécessaire, un indice discret q à travers la structure spectrale de ω, sans modifier les relations

$$E_{\text{tot}} = h_{\text{eff}}\, \omega, \qquad |S_{\text{NSL}}| = h_{\text{eff}}.$$

6.5 Filtres spectro–géométriques pour les solutions 2DOF (cadre commun)

Cette section établit le cadre commun des filtres applicables à toute solution à deux degrés de liberté (2DOF) avant fermeture explicite.

On travaille dans un voisinage tubulaire d'un grand cercle de $\mathbb{S}^3(R_0)$, recentré localement à l'équateur. Autrement dit, on introduit une coordonnée locale

$$s = \frac{\pi R_0}{2} + r, \qquad |r| \lesssim \lambda,$$

de sorte que $r = 0$ corresponde au point de courbure minimale le long de la géodésique choisie. Le régime commun est celui d'un tube mince et d'une calotte quasi-plate :

$$\varepsilon := \frac{\lambda}{R_0} \ll 1, \qquad A(0) = 1, \qquad A'(0) = 0.$$

Pour l'EBK, on utilise la convention absorbée du secteur 2DOF (6.1)–(6.2). Dans cette section, on la rappelle sous la forme

$$\mathcal{J} = \frac{E}{\omega} = h_{\mathrm{eff}}, \tag{6.5}$$

l'indice spectral éventuel étant porté par la fréquence observée ω. Lorsqu'un indice discret $q \in \mathbb{N}$ est réintroduit explicitement, il l'est par la dépendance $\omega = \omega(q)$, sans modifier la forme $\mathcal{J} = E/\omega$.

On appellera enfin *réduction mono–anneau* l'hypothèse spectrale selon laquelle, à géométrie de cœur fixée,

$$\varepsilon(q) = \frac{\varepsilon(1)}{q}.$$

Cette relation sera utilisée plus loin pour réécrire le paramètre spectral extérieur en fonction de q.

6.5.1 Régime $\mathbb{S}^3$ quasi–plat, réduction locale et contrôle d'erreurs

Dans la jauge locale précédente, le jacobien hypersphérique

$$J(s) = R_0^2 \sin^2\Big(\frac{s}{R_0}\Big)$$

s'évalue près de l'équateur sous la forme

$$J\Big(\frac{\pi}{2}R_0 + r\Big) = R_0^2 \cos^2\Big(\frac{r}{R_0}\Big) = R_0^2\Big[1 + \mathcal{O}\Big(\frac{r^2}{R_0^2}\Big)\Big] = R_0^2\Big[1 + \mathcal{O}\Big(\frac{\lambda^2}{R_0^2}\Big)\Big]. \tag{6.6}$$

Ainsi, au leading order, on peut remplacer J par la constante R_0^2 dans le cœur, avec une erreur relative quadratique en $\varepsilon = \lambda/R_0$.

La réduction locale cœur / extérieur, avec zone de raccord exponentiellement petite, introduit alors les corrections

$$\text{LO} : \qquad \mathcal{O}(e^{-k}) \;+\; \mathcal{O}(\varepsilon_{\mathrm{slope}}\varepsilon) \;+\; \mathcal{O}\Big(\frac{\lambda^2}{R_0^2}\Big), \tag{6.7}$$

où $k \geq 3$ contrôle la troncature exponentielle et

$$\varepsilon_{\mathrm{slope}} := \max_{|s| \leq s_c} |r'(s)|.$$

Dans une écriture plus grossière, on peut condenser ces corrections en

$$\mathcal{O}(e^{-k}) + \mathcal{O}\Big(\frac{\lambda}{R_0}\Big) + \mathcal{O}\Big(\frac{\lambda^2}{R_0^2}\Big),$$

mais les identités LO du manuscrit doivent être lues au sens précis de (6.7).

6.5.2 Raccord LO et carte DtN (filtre de canal)

On appelle *canal* X la famille de réduction extérieure retenue (bump, NSL, *etc.*), et Δ_X le décalage pur sans dimension induit, au leading order, par la carte Dirichlet–to–Neumann associée à ce canal.

Étape 1 : dérivée logarithmique intérieure. Pour un cœur localisé de type

$$A_{\text{in}}(s) = A_0 \operatorname{sech}\Big(\frac{s}{\lambda}\Big), \qquad s_c = u_*\lambda,$$

on obtient au bord du cœur

$$\frac{A'_{\text{in}}}{A_{\text{in}}}(s_c) = -\frac{1}{\lambda}\tanh u_*.$$

Étape 2 : dérivée logarithmique extérieure régulière sur $\mathbb{S}^3$. Pour le mode zonal extérieur régulier d'indice $n \in \mathbb{N}$, on a

$$A_{\text{ext}}(\theta) \propto \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}, \qquad \theta = \frac{s}{R_0},$$

d'où

$$\frac{A'_{\text{ext}}}{A_{\text{ext}}}(s_c) = \frac{1}{R_0}\left[(n+1)\cot\big((n+1)\theta_c\big) - \cot\theta_c\right], \qquad \theta_c = \frac{s_c}{R_0} = u_*\varepsilon.$$

Étape 3 : raccord LO. Le raccord C^1 au bord $s = s_c$ impose l'égalité des dérivées logarithmiques :

$$-\frac{1}{\lambda}\tanh u_* = \frac{1}{R_0}\left[(n+1)\cot\big((n+1)u_*\varepsilon\big) - \cot(u_*\varepsilon)\right].$$

En multipliant par $u_*\lambda$, puis en introduisant

$$y := (n+1)\,u_*\,\varepsilon,$$

on obtient

$$-u_*\tanh u_* = y\cot y - u_*\varepsilon\,\cot(u_*\varepsilon).$$

Autrement dit,

$$y\cot y = u_*\varepsilon\,\cot(u_*\varepsilon) - u_*\tanh u_*.$$

Étape 4 : correction de couche et correction de canal. On définit la correction de couche sous-dominante par

$$\delta\Lambda(u_*,\varepsilon) := u_*\varepsilon\,\cot(u_*\varepsilon) - 1 = \mathcal{O}\big((u_*\varepsilon)^2\big). \tag{6.8}$$

Au canal X, la carte DtN projetée ajoute en outre un décalage pur

$$\Delta_X(u_*;\kappa_r),$$

qui dépend du canal et de la fenêtre, mais non des constantes dimensionnées du milieu. On obtient ainsi le raccord LO général

$$\boxed{h(y) := y\cot y = 1 - u_*\tanh u_* + \Delta_X(u_*;\kappa_r) + \delta\Lambda(u_*,\varepsilon),} \qquad y = (n{+}1)\,u_*\,\varepsilon, \qquad \varepsilon = \frac{\lambda}{R_0} \ll 1. \tag{6.9}$$

Pour alléger les notations, on introduit le membre droit réduit

$$G_X(u_*;\kappa_r,\varepsilon) := 1 - u_*\tanh u_* + \Delta_X(u_*;\kappa_r) + \delta\Lambda(u_*,\varepsilon). \tag{6.10}$$

Bornitude et indépendance d'échelle. Après réduction adimensionnée au leading order, G_X est un nombre pur borné, indépendant des constantes dimensionnées du milieu

$$\rho, \quad T, \quad \mu_2, \quad R_0, \quad \ell_0.$$

Son signe et son amplitude dépendent uniquement du canal X, de la fenêtre u_*, et des paramètres sans dimension de la réduction.

6.5.3 Fenêtre robuste du coeur et coupure

Le terme géométrique

$$1 - u \tanh u$$

est décroissant et reste de taille bornée négative pour $u = \mathcal{O}(1)$. Sous l'hypothèse d'un décalage de bord borné

$$\Delta_X = \mathcal{O}(1),$$

et d'une correction de couche sous-dominante

$$\delta\Lambda = \mathcal{O}((u\varepsilon)^2),$$

on anticipe au leading order une fenêtre de contrôle du raccord

$$\boxed{u_* \in [1.7,\, 2.1]}. \tag{6.11}$$

Cette écriture ne constitue pas une fermeture numérique autonome de u_*. Elle est la version arrondie de la fenêtre dérivée plus bas à partir du filtre de raccord

$$-1 \le 1 - u_* \tanh u_* \le -\frac{3}{5},$$

cf. (6.19)–(6.20). La valeur centrale consommée par les fermetures de cœur est ensuite fixée par la condition canonique de raccord (6.22)–(6.23).

La coupure radiale s'évalue alors au bord à partir du profil canonique de cœur

$$A(u) = A(0)\ \mathrm{sech}\, u.$$

On introduit

$$\Sigma_{\mathrm{eff}} := \sup_{u \in \mathcal{U}_{\mathrm{adm}}} u^2 \Big(\tfrac{A(u)}{A(0)}\Big)^2. \tag{6.12}$$

Pour le profil canonique $A(u) = A(0)\,\mathrm{sech}\, u$, et pour la fenêtre complète

$$\mathcal{U}_{\mathrm{adm}} = [1.7,\, 2.1],$$

on obtient

$$0.2568\ldots \le u^2\,\mathrm{sech}^2 u \le 0.3613\ldots \qquad (u \in \mathcal{U}_{\mathrm{adm}}).$$

On peut donc utiliser, au LO, la borne conservative

$$u_*^2\,\mathrm{sech}^2 u_* \le \Sigma_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{LO}}, \qquad \Sigma_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{LO}} = 0.37.$$

Cette quantité fournit un indicateur simple et robuste de la coupure au bord dans la fenêtre admissible considérée.

6.5.4 EBK absorbée, dispersion et carte $y \leftrightarrow q$

Les familles 2DOF partagent la même variable de phase et le même indice de Maslov. Dans cette section, on utilise la convention EBK absorbée (6.5) : l'indice spectral q est porté par la dispersion via $\varepsilon(q)$, et non affiché explicitement dans $\mathcal{J}$.

La dispersion zonale sur $\mathbb{S}^3$, combinée à la réduction mono–anneau, impose

$$\varepsilon(q) = \frac{\varepsilon(1)}{q}, \qquad y = (n+1)\,u_*\,\varepsilon(q). \tag{6.13}$$

Dans la branche mono–anneau de référence, l'indice radial extérieur et la largeur réduite du fondamental sont liés par

$$(n+1)\,\varepsilon(1) = 1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

On obtient donc, au LO,

$$\boxed{y = \frac{u_*}{q}\left[1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\right].} \tag{6.14}$$

On utilisera la carte de signe de

$$h(y) = y\cot y :$$

$$h(y)\begin{cases} > 0, & 0 < y < \frac{\pi}{2}, \\ < 0, & \frac{\pi}{2} < y < \pi, \end{cases} \qquad h'(y) = \cot y - y\csc^2 y \; < \; 0 \quad \text{sur chaque bande ouverte } (k\pi, (k+1)\pi). \tag{6.15}$$

Ainsi, sur chaque bande ouverte $(k\pi, (k+1)\pi)$, la fonction h est strictement décroissante et donc bijective sur son image.

6.5.5 Filtre universel : décision par le signe dans la fenêtre

Proposition 6.4 (Existence/contrôle pour $u_* \in [1.7, 2.1]$)**.** *Considérons* (6.9)–(6.10) *avec la carte mono–anneau* (6.14)*,*

$$y = \frac{u_*}{q}\,[1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)].$$

1. *Si $G_X(u_*; \kappa_r, \varepsilon) < 0$ au LO, alors pour tout $q \geq 2$ on a $y \leq u_*/2 < \pi/2$, donc $h(y) > 0$; l'égalité* (6.9) *est impossible. En revanche, pour $q = 1$, on a $y = u_* \in (\pi/2, \pi)$, et comme h est continue et strictement décroissante sur cette bande, il existe une solution unique dans cette bande.*
2. *Si $G_X(u_*; \kappa_r, \varepsilon) \in (0, 1)$ au LO, alors pour chaque bande ouverte où h prend la valeur G_X, il existe exactement une solution y. Via* (6.13)*, cela sélectionne un ensemble discret de niveaux EBK admissibles.*

Définition 6.5 (Critères locaux de signe du raccord LO)**.** Pour un raccord LO de la forme (6.9), on dira que le membre droit réduit est *négatif* sur la fenêtre admissible si

$$G_X(u_*; \kappa_r, 0) < 0 \qquad \text{pour tout } u_* \in [1.7, 2.1].$$

On dira qu'il est *positif borné* sur cette fenêtre s'il existe des bornes pures $0 < g_{\min} \leq g_{\max} < 1$ telles que

$$G_X(u_*; \kappa_r, 0) \in [g_{\min}, g_{\max}] \qquad \text{pour tout } u_* \in [1.7, 2.1].$$

Ces critères ne sont pas des affectations de familles. Ils sont utilisables uniquement lorsqu'un lemme de signe ou une évaluation explicite de la carte de raccord établit l'une des deux conditions.

Esquisse de preuve. Le point (i) résulte directement de (6.15) et de l'encadrement $y \leq u_*/q$. Le point (ii) suit de la bijectivité de h sur chaque bande ouverte et de la monotonie $h' < 0$.

Robustesse LO. Les corrections $\delta\Lambda = \mathcal{O}((u\varepsilon)^2)$ et les variations bornées de la DtN (canal fixé) ne changent ni le signe de G_X, ni la monotonie de h. La décision (unicité $q = 1$ versus ensemble discret de niveaux admissibles) est donc robuste au leading order.

6.5.6 Procédure de sélection par bandes (générique)

On considère le raccord LO (6.9) et la définition (6.10). Au leading order, pour un canal X donné, on encadre le membre droit

$$G_X(u_*; \kappa_r, \varepsilon)$$

par des bornes pures $g_{\min}, g_{\max} \in (-\infty, 1)$ sur la fenêtre robuste

$$u_* \in [1.7, 2.1],$$

sous les hypothèses de DtN bornée et de correction de couche sous-dominante. On utilise ensuite la carte spectrale (6.13) et la monotonie bande par bande de $h(y) = y \cot y$ (cf. (6.15)).

Algorithme générique.

1. **Enveloppe.** Fixer un intervalle admissible

   $$[g_{\min}, g_{\max}] \subset (-\infty, 1)$$

   pour G_X au LO.

2. **Inversion par bande.** Pour tout $g \in [g_{\min}, g_{\max}]$ et pour toute bande ouverte $(k\pi, (k+1)\pi)$, résoudre

   $$h(y_k) = g.$$

   L'unicité de $y_k(g)$ sur chaque bande suit de la monotonie stricte de h.

3. **Projection EBK.** Associer ensuite l'entier candidat correspondant à la valeur la plus proche de

   $$\frac{u_*}{y_k(g)}, \qquad u_* \in [1.7, 2.1].$$

   Autrement dit,

   $$q_k(u_*, g) := \mathrm{round}\Big(\frac{u_*}{y_k(g)}\Big),$$

   sous réserve de rester uniformément à distance des demi-entiers sur toute l'enveloppe.

4. **Stabilité d'intégralité (plateaux).** Vérifier que $q_k(u_*, g)$ demeure constant lorsque (u_*, g) varie dans l'enveloppe, c'est-à-dire qu'aucun franchissement de demi-entier ne se produit.

Proposition 6.6 (Sortie générique et robustesse LO)**.** *Sous les hypothèses précédentes, la procédure sélectionne un ensemble discret, et en pratique fini, d'entiers EBK stables par plateaux pour le canal X et la famille considérée. Les corrections*

$$\delta\Lambda = \mathcal{O}((u\varepsilon)^2)$$

et les variations bornées de la DtN ne modifient ni la monotonie de h, ni la stabilité des plateaux au leading order.

6.5.7 Repères pour l'audit numérique (générique)

Résolveur y par bande : dichotomie sur $(k\pi, (k+1)\pi)$, arrêt lorsque

$$|h(y) - g| \le 10^{-14}.$$

Grilles :

$$u_* \in [1.7, 2.1] \quad (\text{pas } 10^{-3}), \qquad g \in [g_{\min}, g_{\max}] \quad (\text{pas } 10^{-4}).$$

Vérification : constance de q_k sur la grille, sans changement d'entier sur toute l'enveloppe testée.

Résumé. (i) **Filtres communs.** Tube mince ($\varepsilon \ll 1$), réduction locale avec raccord (erreurs (6.7)), raccord LO (6.9) et DtN bornée (6.10), fenêtre robuste (6.11) et coupure (6.12), EBK absorbée (6.5), carte $y \leftrightarrow q$ (6.13), et signe/monotonie de h (6.15).

(ii) **Règle de décision (filtre universel).** Par la Proposition 6.4 :

$$G_X < 0 \;\Rightarrow\; q = 1 \textbf{ unique}, \qquad G_X \in (0,1) \;\Rightarrow\; \textbf{ensemble discret}$$

(une solution par bande). Robustesse LO vis-à-vis des variations bornées de la DtN et de

$$\delta\Lambda = \mathcal{O}((u\varepsilon)^2).$$

(iii) **Portée.** La détermination des entiers q admissibles est *famille + canal dépendante* et est reportée dans chaque chapitre de fermeture (bump, NSL, etc.). Aucun q numérique n'est fixé ici.

(iv) **Indépendance d'échelle.** Tous les termes mobilisés sont des *nombres purs* au sens de la théorie HSM.

6.6 Fermeture du coeur pour le bump

Dans le régime LO quasi–plan sur $\mathbb{S}^3$, la branche est caractérisée par une fenêtre de coeur, une coupure radiale, des facteurs de forme internes et une fermeture spectrale du canal. Ces éléments permettent de fixer la fermeture 1–corps effective associée au bump.

On travaille au **LO** dans la calotte quasi-plate de $\mathbb{S}^3$,

$$\varepsilon := \frac{\lambda}{R_0} \ll 1, \qquad c_t^2 = \frac{T}{\rho}, \qquad J(s) = R_0^2 \sin^2\Big(\frac{s}{R_0}\Big),$$

et l'on considère un fondamental décrit par

$$\psi(t,\mathbf{x}) = A(\xi)\, e^{i\omega t}, \qquad \xi = \frac{s}{\lambda}, \qquad A(0) = 1, \quad A'(0) = 0, \quad A(\xi) = \operatorname{sech}\xi.$$

6.6.1 Fenêtre de coeur et coupure

(1) Raccord LO et fenêtre d'admissibilité pour u_*. Au leading order, le raccord cœur–extérieur se lit comme une égalité de cartes Dirichlet–to–Neumann réduites. La carte intérieure est celle du cœur régulier. En variable réduite $u = s/\lambda$, la composante radiale régulière associée au profil canonique s'écrit

$$F_{\text{in}}(u) = u\, \operatorname{sech} u.$$

Sa carte logarithmique réduite vaut

$$\boxed{\mathcal{D}_{\text{in}}(u) := u\,\frac{F_{\text{in}}'(u)}{F_{\text{in}}(u)} = 1 - u\tanh u.} \tag{6.16}$$

La première cellule extérieure régulière est décrite, dans la jauge réduite de raccord, par le mode oscillatoire

$$F_{\text{out}}(y) = \sin y.$$

Sa carte logarithmique réduite vaut

$$\boxed{\mathcal{D}_{\text{out}}(y) := y\,\frac{F_{\text{out}}'(y)}{F_{\text{out}}(y)} = y\cot y.} \tag{6.17}$$

Le raccord LO impose donc

$$\boxed{\mathcal{D}_{\text{out}}(y) = \mathcal{D}_{\text{in}}(u_*), \qquad y = (n{+}1)\,u_*\,\varepsilon, \qquad \varepsilon = \frac{\lambda}{R_0} \ll 1.} \tag{6.18}$$

Autrement dit,

$$y\cot y = 1 - u_*\tanh u_*.$$

Fenêtre d'admissibilité. La fenêtre admissible de cœur est utilisée comme contrôle de régime : elle sélectionne les raccords pour lesquels le membre droit intérieur reste négatif, borné, et éloigné des bords singuliers du raccord oscillatoire. On impose

$$\boxed{-1 \;\le\; 1 - u_* \tanh u_* \;\le\; -\frac{3}{5}.} \tag{6.19}$$

Cette bande maintient le membre droit du raccord d'ordre 1, loin du régime trop mou $1 - u_* \tanh u_* \simeq 0$ et loin d'une coupure trop dure.

Posons

$$g(u) := 1 - u \tanh u.$$

Comme

$$g'(u) = -\tanh u - u \operatorname{sech}^2 u < 0 \qquad (u > 0),$$

la fonction g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$. La condition (6.19) est donc équivalente à

$$u_- \le u_* \le u_+,$$

où

$$g(u_-) = -\frac{3}{5}, \qquad g(u_+) = -1.$$

Numériquement,

$$u_- \approx 1.7085, \qquad u_+ \approx 2.0653.$$

On retient donc la fenêtre de contrôle

$$\boxed{u_* \in [u_-, u_+] = [1.7085\ldots,\ 2.0653\ldots].} \tag{6.20}$$

Dans le texte courant, on utilisera la version arrondie

$$\boxed{u_* \in [1.7,\ 2.1].} \tag{6.21}$$

Sur la première branche physique

$$y \in \Big(\frac{\pi}{2}, \pi\Big),$$

la fonction $h(y) := y \cot y$ est strictement décroissante. La fenêtre (6.19) correspond donc à une racine physique unique dans cette branche et maintient le raccord à distance des deux bords.

(1bis) Fermeture canonique de raccord pour u_*. La fenêtre (6.21) fixe le domaine d'admissibilité du raccord. La valeur centrale de u_* est ensuite déterminée par la fermeture canonique mono-cellule : le cœur et la première cellule extérieure sont évalués sur la même coordonnée réduite de bord. Dans cette jauge de raccord, on identifie

$$y = u.$$

La condition DtN (6.18) devient alors

$$\boxed{\phi(u) := u \cot u - \big(1 - u \tanh u\big) = 0, \qquad u \in [1.7, 2.1].} \tag{6.22}$$

Sur cette fenêtre, ϕ change de signe et possède une unique racine sur la branche $(\pi/2, \pi)$. Cette racine définit le paramètre réduit canonique du raccord :

$$\boxed{u_*^{(\mathrm{ref})} \simeq 2.00712.} \tag{6.23}$$

Ainsi, l'intervalle (6.20) n'est pas une valeur libre de coupure : il est le domaine d'admissibilité dérivé du filtre de raccord (6.19). Les grandeurs aval qui exigent une valeur centrale de cœur consomment la racine canonique $u_*^{(\mathrm{ref})}$ définie par (6.22)–(6.23). Les bornes $[u_-, u_+]$ servent aux contrôles de robustesse et aux majorations de coupure.

(2) Coupure ⇒ évaluation de Σ_{eff} et de ε_*. On définit la constante de forme

$$\Sigma_{\text{eff}} := \sup_{u\in\mathcal{U}_{\text{adm}}} u^2\Big(\tfrac{A(u)}{A(0)}\Big)^2, \qquad \mathcal{U}_{\text{adm}} := [u_-, u_+]. \tag{6.24}$$

Pour le profil canonique

$$A(u) = A(0)\,\operatorname{sech} u,$$

on obtient

$$u^2\Big(\tfrac{A(u)}{A(0)}\Big)^2 = u^2\operatorname{sech}^2 u.$$

Sur l'intervalle $[u_-, u_+]$, cette fonction est décroissante, d'où

$$u_+^2\operatorname{sech}^2(u_+) \;\le\; u_*^2\operatorname{sech}^2 u_* \;\le\; u_-^2\operatorname{sech}^2(u_-),$$

soit numériquement

$$0.266 \;\lesssim\; u_*^2\operatorname{sech}^2 u_* \;\lesssim\; 0.359. \tag{6.25}$$

En particulier,

$$\Sigma_{\text{eff}} = \sup_{u\in[u_-,u_+]} u^2\operatorname{sech}^2 u = u_-^2\operatorname{sech}^2(u_-) \approx 0.359.$$

De même, l'amplitude relative au bord

$$\varepsilon_* := \frac{A(u_*)}{A(0)} = \operatorname{sech} u_*$$

vérifie

$$\operatorname{sech}(u_+) \le \varepsilon_* \le \operatorname{sech}(u_-),$$

c'est-à-dire

$$0.2495 \;\lesssim\; \varepsilon_* \;\lesssim\; 0.3508.$$

Au centième près, on retrouve ainsi

$$\boxed{\varepsilon_* \in [0.25,\ 0.35].} \tag{6.26}$$

Il n'y a donc pas de circularité : la fenêtre (6.21) est d'abord obtenue à partir du filtre de raccord (6.19), puis Σ_{eff} et ε_* sont simplement évalués sur cette fenêtre.

6.6.2 Paramétrisation locale au centre et définition de $\Phi_\star$

Base locale paire/impaire et normalisation. Au voisinage du centre $s = 0$, l'équation radiale réduite admet une base locale paire / impaire. On écrit

$$f_{\text{even}}(s) = 1 - \frac{1}{2}\kappa_0^2 s^2 + \mathcal{O}(s^4), \qquad f_{\text{odd}}(s) = \frac{s}{\lambda} + \mathcal{O}\Big(\frac{s^3}{\lambda^3}\Big),$$

où κ_0 caractérise la courbure locale au centre. Plus précisément, sous la normalisation $A(0) = 1$, on pose

$$\kappa_0^2 := -A''(0).$$

Pour le profil fondamental de type $\operatorname{sech}(s/\lambda)$, on a au rang meneur

$$A''(0) = -\frac{1}{\lambda^2}, \qquad \text{donc} \qquad \kappa_0 = \frac{1}{\lambda}.$$

La solution locale générale s'écrit alors

$$A(s) = C_{\text{even}}\, f_{\text{even}}(s) + C_{\text{odd}}\, f_{\text{odd}}(s).$$

La normalisation

$$A(0) = 1$$

impose $C_{\text{even}} = 1$. On paramétrise ensuite la composante impaire par

$$C_{\text{odd}} = \tan \Phi_\star, \qquad \Phi_\star \in \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big),$$

de sorte que

$$A'(0) = \frac{\tan \Phi_\star}{\lambda}.$$

Sélection par parité au centre. Pour le bump fondamental à une jambe, la branche de plus basse énergie est paire au centre. En effet, au voisinage du cœur, l'énergie de gradient contient

$$\int |\partial_s A|^2 \, J(s) \, ds.$$

En substituant

$$A = f_{\text{even}} + \tan \Phi_\star \, f_{\text{odd}},$$

on obtient

$$\int |\partial_s A|^2 \, J \, ds = \int (f'_{\text{even}})^2 J \, ds + 2 \tan \Phi_\star \int f'_{\text{even}} f'_{\text{odd}} J \, ds + \tan^2 \Phi_\star \int (f'_{\text{odd}})^2 J \, ds.$$

Or, au centre du bump, $J(s)$ est paire, f'_{even} est impaire et f'_{odd} est paire. Le terme croisé

$$\int f'_{\text{even}} f'_{\text{odd}} J \, ds$$

est donc nul par parité sur un domaine symétrique. Il reste ainsi

$$\int |\partial_s A|^2 \, J \, ds = \int (f'_{\text{even}})^2 J \, ds + \tan^2 \Phi_\star \int (f'_{\text{odd}})^2 J \, ds,$$

ce qui est minimal pour

$$\Phi_\star = 0.$$

Par conséquent, pour le bump fondamental,

$$\boxed{\Phi_\star = 0, \qquad A'(0) = 0.}$$

Portée. Le paramètre $\Phi_\star$ est conservé à ce stade comme paramètre de centre de la branche locale générale ; il devient trivial pour le bump fondamental, mais pourra servir de repère pour d'éventuelles branches excitées, déformées, ou pour d'autres familles où la parité centrale n'impose pas immédiatement $A'(0) = 0$.

6.6.3 Sélection par retour admissible du bump

On applique au cas du bump la procédure générique de la §6.5.6, mais l'ouverture des seuils non triviaux n'est pas fondée sur une affectation abstraite de signe de Δ_X. Elle est portée par le retour principal effectivement lu au bord du coeur. Le rôle du filtre est donc de sélectionner les branches pour lesquelles ce retour compact est admissible.

Par inversion monotone bande par bande de $h(y) = y \cot y$, puis insertion de la loi mono–anneau

$$\varepsilon(q) = \frac{\varepsilon(1)}{q},$$

on obtient

$$y = (n+1)\,u_*\,\varepsilon(q) = \big((n+1)\varepsilon(1)\big)\frac{u_*}{q}.$$

Au rang LO, le facteur $(n+1)\varepsilon(1)$ est inclus dans la normalisation spectrale de la branche, conformément à la convention EBK absorbée (6.5). La variable réduite peut alors être écrite sous la forme

$$y \simeq \frac{u_*}{q}.$$

Les entiers admissibles apparaissent alors comme les plateaux stables de l'inversion par bandes de h sur l'enveloppe (u_*, g).

6.6.4 Mécanisme de retour et hiérarchie des ouvertures admissibles

Avant d'introduire le filtre lui-même, il faut expliciter le mécanisme géométrique qui le rend possible.

Le bump vit sur une hypersphère compacte $\mathbb{S}^3$. Dans une telle géométrie, la composante extérieure engendrée par le cœur ne se propage pas vers un infini absent ; elle peut reboucler sur le grand cycle et revenir au voisinage du cœur. Ce *retour* constitue l'objet géométrique de base sur lequel repose ensuite la sélection des branches q.

1. Retour global et lecture locale

Le point essentiel est que le cœur ne lit pas le motif extérieur global sur tout le grand cycle. Il ne couple qu'à la partie du retour effectivement résolue dans une fenêtre angulaire locale centrée sur le point de retour principal $\psi_{\mathrm{ret}}(q)$.

On introduit donc la variable réduite

$$u := \frac{\psi - \psi_{\mathrm{ret}}(q)}{\delta\psi_c(q)},$$

où $\delta\psi_c(q)$ désigne la largeur angulaire effective du bord du cœur. Dans le régime tube mince, cette largeur est l'image angulaire de la fenêtre de cœur $s_c = u_*\lambda(q)$. Comme $\varepsilon(q) = \lambda(q)/R_0$, on obtient au rang LO

$$\delta\psi_c(q) \sim u_*\,\varepsilon(q).$$

Le retour principal effectivement lu au bord s'écrit alors sous la forme

$$\boxed{\mathcal{E}_{\mathrm{ret}}(\psi; q) = \mathcal{C}_{\mathrm{ext}}(q)\,\Gamma_{\mathrm{ret}}(u; q),}$$

où :

$\mathcal{C}_{\mathrm{ext}}(q)$ porte le poids global du canal extérieur principal,

$\Gamma_{\mathrm{ret}}(u; q)$ décrit le profil local réduit du retour vu par le bord.

Le couplage effectif entre retour et cœur est obtenu après pondération par la lecture locale du bord. En notant $T_0(u)$ le noyau de transmission du bord, on introduit le poids de retour principal

$$\boxed{R_{\mathrm{pr}}(q) := \mathcal{C}_{\mathrm{ext}}(q) \int_{\mathbb{R}} T_0(u)\,\Gamma_{\mathrm{ret}}(u; q)\,du.}$$

Ainsi, le cœur ne sélectionne pas le retour global brut, mais le *retour principal effectivement lu au bord*.

2. Profil local du retour principal

Au voisinage de $u = 0$, qui correspond au maximum principal du retour lu par le cœur, le profil $\Gamma_{\mathrm{ret}}(u; q)$ est pair, lisse et maximal en $u = 0$. On peut donc l'écrire sous la forme locale

$$\boxed{\Gamma_{\mathrm{ret}}(u; q) = 1 - \frac{\kappa_{\mathrm{ret}}(q)}{2}\, u^2 + \frac{\lambda_{\mathrm{ret}}(q)}{24}\, u^4 + \mathcal{O}(u^6).}$$

Les coefficients $\kappa_{\mathrm{ret}}(q)$ et $\lambda_{\mathrm{ret}}(q)$ décrivent respectivement la courbure et le premier correctif de forme du retour principal effectivement résolu par le cœur.

3. Première ouverture : retour principal isotrope

Le premier seuil non trivial apparaît lorsque le retour principal devient effectivement admissible dans la fenêtre du cœur. Il s'agit d'une ouverture *isotrope*, au sens où elle concerne le canal dominant du retour, sans scission orientée.

On notera ensuite ce premier seuil

$$q_2.$$

Autrement dit, q_2 n'est pas un seuil ajouté de l'extérieur : il correspond à l'apparition du premier retour principal isotrope admissible.

4. Seconde ouverture : scission anisotrope faible

Une fois le retour principal isotrope établi, une anisotropie faible peut scinder ce même retour selon l'orientation. On écrit alors, au premier ordre,

$$\boxed{\Gamma_{\mathrm{ret}}(u, \theta; q) = \Gamma_0(u; q) + \varepsilon_2\, \Gamma_2(u; q)\, P_2(\cos\theta) + \mathcal{O}(\varepsilon_2^2),}$$

où Γ_0 désigne la partie isotrope principale, Γ_2 la correction quadrupolaire lue au bord, et ε_2 l'amplitude géométrique brute de l'anisotropie faible.

Cette correction n'invente pas un nouveau mécanisme de retour ; elle scinde le retour principal déjà ouvert. Le second seuil correspond alors à l'apparition d'une seconde orientation admissible du retour. On le notera

$$q_3.$$

Ainsi, la hiérarchie des ouvertures s'interprète comme

$$\boxed{\text{retour principal isotrope} \implies q_2, \qquad \text{scission anisotrope faible du même retour} \implies q_3.}$$

5. Portée du mécanisme

Le point important est donc le suivant :

— la compacité de $\mathbb{S}^3$ rend possible un retour principal lu par le bord du cœur ;

— l'ouverture isotrope de ce retour définit le premier seuil structurel q_2 lorsque la fermeture de branche le rend admissible ;

— l'anisotropie faible n'intervient qu'au rang suivant, pour scinder ce retour et définir un second seuil structurel q_3 ;

— le filtre étudié ensuite ne crée pas de nouvelles valeurs de q, mais formule les conditions sous lesquelles ces ouvertures de retour sont effectivement admissibles.

6.6.5 Filtre de retour admissible et définition des seuils structurels

Le mécanisme précédent fournit un retour principal effectivement lu au bord du cœur. Le rôle du filtre n'est pas de créer de nouvelles valeurs de q, mais de sélectionner, parmi les branches possibles, celles pour lesquelles ce retour est effectivement admissible.

1. Chaîne de retour et données réduites

On note

$$\mathscr{R}_{\mathrm{ret}}(q)$$

la chaîne de retour associée à la branche q, c'est-à-dire l'ensemble des données réduites qui gouvernent le retour effectivement lu au bord :

$$\mathscr{R}_{\mathrm{ret}}(q) = \Big(\mathcal{C}_{\mathrm{ext}}(q),\, \Gamma_{\mathrm{ret}}(v;q),\, T_0(v),\, \delta\psi_c(q)\Big),$$

où v désigne la variable locale réduite au voisinage du point de retour principal.

Le poids isotrope principal effectivement lu au bord est

$$R_{\mathrm{pr}}(q) := \mathcal{C}_{\mathrm{ext}}(q) \int_{\mathbb{R}} T_0(v)\, \Gamma_{\mathrm{ret}}(v;q)\, dv.$$

2. Critères minimaux d'admissibilité

On dira qu'une branche q est admissible si les trois conditions suivantes sont simultanément satisfaites :

(i) Compatibilité de fenêtre. Le retour principal doit être effectivement résolu dans la fenêtre du cœur :

$$\delta\psi_c(q) \sim u_*\, \varepsilon(q), \qquad u_* \in [1.7, 2.1].$$

(ii) Compatibilité locale du lobe principal. Le profil principal

$$\Gamma_{\mathrm{ret}}(v;q) = 1 - \frac{\alpha_{\mathrm{ret}}(q)}{2}\, v^2 + \frac{\beta_{\mathrm{ret}}(q)}{24}\, v^4 + \mathcal{O}(v^6)$$

doit correspondre à un maximum local stable au bord, c'est-à-dire

$$\alpha_{\mathrm{ret}}(q) > 0, \qquad |\beta_{\mathrm{ret}}(q)| < \infty.$$

(iii) Compatibilité spectrale réduite. La branche doit appartenir à un plateau stable du filtre de retour compact. Autrement dit, les données réduites de retour

$$\mathscr{R}_{\mathrm{ret}}(q) = \Big(\mathcal{C}_{\mathrm{ext}}(q),\, \Gamma_{\mathrm{ret}}(v;q),\, T_0(v),\, \delta\psi_c(q)\Big)$$

doivent produire un retour principal effectivement lu dans la fenêtre du coeur, sans franchissement de plateau EBK au rang LO.

On définit alors l'ensemble admissible par

$$\boxed{\mathcal{Q}_{\mathrm{adm}} := \Big\{q \in \mathbb{N}^* \;;\; \mathscr{R}_{\mathrm{ret}}(q) \text{ satisfait (i), (ii), (iii)}\Big\}.}$$

3. Nature sélective du filtre

Le filtre est *sélectif* et non *créatif* : il n'engendre pas de nouvelles valeurs de q, mais élimine les branches qui ne satisfont pas les conditions d'admissibilité ci-dessus.

4. Seuil fondamental

Le seuil fondamental est

$$\boxed{q_1 := 1.}$$

Il correspond à la branche fondamentale servant d'ancrage à la hiérarchie.

5. Premier seuil non trivial

Le premier seuil non trivial est défini par

$$\boxed{q_2 := \min\Big\{q > q_1 \ ; \ q \in \mathcal{Q}_{\mathrm{adm}} \text{ et le retour principal isotrope est admissible}\Big\}.}$$

6. Second seuil non trivial

Au premier ordre anisotrope, on écrit

$$\Gamma_{\mathrm{ret}}(v, \theta; q) = \Gamma_0(v; q) + \varepsilon_2 \, \Gamma_2(v; q) \, P_2(\cos\theta) + \mathcal{O}(\varepsilon_2^2).$$

Le second seuil non trivial est alors

$$\boxed{q_3 := \min\Big\{q > q_2 \ ; \ q \in \mathcal{Q}_{\mathrm{adm}} \text{ et une seconde orientation admissible apparaît}\Big\}.}$$

7. Hiérarchie structurelle

On obtient ainsi la hiérarchie

$$\boxed{q_1 \ \longrightarrow \ q_2 \ \longrightarrow \ q_3,}$$

avec l'interprétation suivante :

q_1 = branche fondamentale, q_2 = première ouverture isotrope du retour admissible, q_3 = première sci

Proposition 6.7 (Nombre de seuils structurels du bump au LO minimal)**.** *Dans la fermeture LO minimale du bump 2DOF, le filtre de retour compact porte exactement trois niveaux structurels :*

$$q_1, \qquad q_2, \qquad q_3.$$

Le premier est la branche fondamentale. Les deux autres correspondent respectivement à l'ouverture isotrope du retour principal et à sa première scission anisotrope faible.

Démonstration. Le niveau $q_1 = 1$ est fixé par la branche fondamentale (6.21)–(6.22). Au rang LO, le retour compact lu par le bord possède une composante isotrope principale $\Gamma_0(v; q)$. Sa trace scalaire porte le niveau fondamental, tandis que son défaut isotrope résiduel sans trace porte la première ouverture non triviale q_2, via les fonctionnels r_1, r_2 définis en §6.6.6. Pour un bump mono-jambe, ce défaut est non nul. La première correction géométrique indépendante est ensuite la correction quadrupolaire

$$\varepsilon_2 \, \Gamma_2(v; q) \, P_2(\cos\theta),$$

qui scinde le retour isotrope et définit le second seuil non trivial q_3. Les corrections suivantes sont d'ordre supérieur dans l'expansion anisotrope ou dans les corrections de forme du retour. Elles n'appartiennent donc pas à la fermeture LO minimale. Il n'existe ainsi, au rang LO minimal, que la branche fondamentale, l'ouverture isotrope et la première scission anisotrope. □

8. Portée

À ce stade, cette sous-section fixe la structure du filtre et la définition des seuils. L'évaluation explicite de $\mathcal{Q}_{\mathrm{adm}}$, ainsi que la fermeture des paramètres résiduels qui portent q_2 et q_3, est reportée à la sous-section suivante.

6.6.6 Relation isotrope associée à q_2 et fermeture anisotrope minimale associée à q_3

La structure du filtre admissible introduit trois seuils

$$q_1 = 1, \qquad q_2, \qquad q_3,$$

où q_2 étiquette la première ouverture non triviale de la chaîne isotrope dominante, tandis que q_3 étiquette la première ouverture portée par la correction anisotrope minimale.

1. Projections isotropes du retour

Le retour isotrope se décompose en deux lectures distinctes. La première lit la trace scalaire commune du coeur ; elle porte le niveau fondamental. La seconde lit le défaut isotrope résiduel après retrait de cette trace ; elle porte la première ouverture non triviale.

Pour formaliser cette séparation, on associe à chaque branche X une matrice interne de jambes/polarisations

$$M_X := \frac{\langle p_X \otimes p_X \rangle_{\mathrm{cyc}}}{\langle |p_X|^2 \rangle_{\mathrm{cyc}}}, \qquad \operatorname{tr} M_X = 1.$$

Sa décomposition canonique trace/sans-trace dans le plan interne 2DOF est

$$\boxed{M_X = \frac{1}{2} I_2 + D_X, \qquad \operatorname{tr} D_X = 0.} \tag{6.27}$$

La partie $\frac{1}{2} I_2$ est la trace fondamentale commune. Le tenseur D_X est le défaut interne résiduel.

On note alors, pour la branche considérée,

$$r_1^{(X)}(q) := \int_{\mathbb{R}} T_0(v)\, \Gamma_0(v; q)\, dv, \qquad r_2^{(X)}(q) := \|D_X\|^2 \int_{\mathbb{R}} T_1(v)\, \Gamma_0(v; q)\, dv.$$

Le noyau T_0 est donc le projecteur isotrope de trace, tandis que T_1 est le projecteur isotrope du défaut résiduel sans trace. Ainsi, le retour fondamental dépend de la densité scalaire commune, alors que le premier seuil non trivial q_2 dépend de l'invariant résiduel $\|D_X\|^2$, et non de A^2 brut. Dans la branche bump, on allégera la notation en écrivant $r_i(q)$ pour $r_i^{(\mathrm{bump})}(q)$.

Pour la branche bump, on suppose $r_1^{(\mathrm{bump})}(q) > 0$ sur la branche admissible considérée, de sorte que le rapport

$$\varepsilon_{\mathrm{iso}}(q) := \frac{r_2(q)}{r_1(q)} \tag{6.28}$$

est bien défini. Ce rapport mesure, au rang meneur, le défaut relatif du retour principal isotrope lu par le coeur.

2. Fermeture isotrope réduite du premier seuil

Le seuil fondamental $q_1 = 1$ correspond à un unique retour principal par période réduite. On travaille donc sur la phase réduite

$$\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z},$$

où le retour principal est centré en $\theta = 0$.

Lemme 6.8 (Cellule fondamentale de retour)**.** *Dans la phase réduite $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, la cellule de retour associée au retour principal $\theta = 0$ est l'intervalle de Voronoï*

$$\mathcal{I}_1 = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]. \tag{6.29}$$

Sa demi-largeur est donc

$$\delta_1 = \frac{1}{2}. \tag{6.30}$$

Démonstration. Les retours équivalents du mode fondamental sont les points entiers

$$\theta = n, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

dans le relèvement $\mathbb{R}$ de la phase réduite. La cellule attachée au retour principal 0 est l'ensemble des points plus proches de 0 que des retours voisins -1 et $+1$. Les frontières sont donc les médiatrices

$$\theta = -\frac{1}{2}, \qquad \theta = \frac{1}{2}.$$

Ainsi

$$\mathcal{I}_1 = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right],$$

et la demi-largeur du retour fondamental est

$$\delta_1 = \frac{1}{2}.$$

□

La fermeture du bloc fondamental est donc

$$\boxed{\delta_1 = \frac{1}{2}.} \tag{6.31}$$

Comptage isotrope réduit. Le seuil isotrope de rang q est lu sur une chaîne réduite de q cellules de retour. Entre ces q cellules, on compte $q-1$ interfaces internes. Chaque interface interne porte le défaut isotrope relatif

$$\varepsilon_{\text{iso}}(q) = \frac{r_2(q)}{r_1(q)}$$

défini en (6.28).

Les deux extrémités de la chaîne ne sont pas des interfaces complètes. Elles portent chacune une demi-cellule de bord, de poids δ_1 par rapport à une interface interne. Le comptage effectif des contributions isotropes est donc

$$\boxed{N_{\text{iso}}(q) = (q-1) + 2\delta_1.} \tag{6.32}$$

Avec $\delta_1 = 1/2$, ce comptage se réduit à

$$N_{\text{iso}}(q) = q.$$

Condition d'ouverture isotrope. Au LO, l'ouverture isotrope est atteinte lorsque le défaut isotrope cumulé par la chaîne compense les deux contributions scalaires de bord du bloc fondamental. La condition de compensation s'écrit donc

$$\boxed{(q - 1 + 2\delta_1)\,\frac{r_2(q)}{r_1(q)} + 2 \simeq_{\text{LO}} 0.} \tag{6.33}$$

Cette équation ne pose pas un facteur numérique indépendant : elle combine le comptage des $q-1$ interfaces internes, les deux demi-cellules de bord δ_1, et le résidu isotrope relatif $\varepsilon_{\text{iso}} = r_2/r_1$.

En isolant q, on obtient

$$q_{2,\text{LO}} \simeq_{\text{LO}} 1 - 2\delta_1 - 2\,\frac{r_1(q_2)}{r_2(q_2)}. \tag{6.34}$$

En réinjectant (6.31), il vient

$$\boxed{q_{2,\mathrm{LO}} \simeq_{\mathrm{LO}} -2\,\frac{r_1(q_2)}{r_2(q_2)} = -\frac{2}{r_2(q_2)/r_1(q_2)}.} \tag{6.35}$$

Ainsi, une valeur élevée de q_2 correspond à un défaut isotrope résiduel faible. La positivité du seuil impose, sur la branche retenue,

$$\boxed{\frac{r_2(q_2)}{r_1(q_2)} < 0.} \tag{6.36}$$

Stabilité de bord. La seule part de bord de (6.33) est le terme $2\delta_1$. Une variation symétrique admissible du partage de bord modifie donc le comptage effectif selon

$$N_{\mathrm{iso}}(q) = q - 1 + 2\delta_1.$$

L'effet relatif sur le défaut isotrope extrait est d'ordre $1/q$. Pour le premier seuil isotrope élevé, cette dépendance de bord est subdominante devant le terme volumique $q-1$. La fermeture (6.33) est donc une fermeture LO régularisée du bord isotrope.

3. Réduction au paramètre isotrope de maille

Dans le modèle isotrope minimal de maille, le rapport précédent n'est pas identifié directement à un paramètre scalaire nu. Il est relié à la maille par un fonctionnel isotrope réduit

$$\mathcal{G}^{(\mathrm{iso})}_{\mathrm{mesh}}(\chi_{\mathrm{mesh}}), \qquad \chi_{\mathrm{mesh}} := \frac{\Xi_{\tan}}{\Xi_r}.$$

Ce fonctionnel encode la réponse isotrope effective de la maille. Sa forme détaillée dépend du modèle discret de maille choisi ; la présente section n'utilise que son signe et son inversibilité locale sur la branche considérée. On écrit donc

$$\boxed{\frac{r_2(q_2)}{r_1(q_2)} = \mathcal{G}^{(\mathrm{iso})}_{\mathrm{mesh}}(\chi_{\mathrm{mesh}}).} \tag{6.37}$$

La relation de compatibilité isotrope entre le seuil structurel et la réponse réduite de maille prend alors la forme

$$\boxed{q_{2,\mathrm{LO}} \simeq_{\mathrm{LO}} -\frac{2}{\mathcal{G}^{(\mathrm{iso})}_{\mathrm{mesh}}(\chi_{\mathrm{mesh}})}.} \tag{6.38}$$

La condition $q_{2,\mathrm{LO}} > 0$ impose donc

$$\boxed{\mathcal{G}^{(\mathrm{iso})}_{\mathrm{mesh}}(\chi_{\mathrm{mesh}}) < 0.} \tag{6.39}$$

Ainsi, au niveau théorique retenu ici,

q_2 n'est pas introduit comme une constante numérique nouvelle,	q_2 étiquette le seuil structurel dont la m

La relation (6.38) ne doit donc pas être lue comme une détermination numérique autonome de q_2. Elle fixe la contrainte de compatibilité entre le seuil structurel considéré et la réponse isotrope réduite de maille. Pour un seuil q_2 retenu par la branche, le paramètre isotrope de maille χ_{mesh} est déterminé par inversion locale de cette relation lorsque $\mathcal{G}^{(\mathrm{iso})}_{\mathrm{mesh}}$ est inversible sur la branche considérée.

4. Source anisotrope réduite et projection minimale

Au premier ordre anisotrope, on définit la source quadrupolaire locale par

$$\mathcal{S}_2(v;q) = -\left.\frac{\partial \mathcal{L}_q^{(\varepsilon_2)}}{\partial \varepsilon_2}\right|_{\varepsilon_2=0} \Gamma_0(v;q),$$

où $\mathcal{L}_q^{(\varepsilon_2)}$ est l'opérateur local du retour sur l'HS faiblement anisotrope.

On décompose alors

$$\mathcal{S}_2(v;q) = s_2(q)\,\Gamma_0(v;q) + \mathcal{S}_2^{\perp}(v;q), \qquad \int_{\mathbb{R}} \mathcal{S}_2^{\perp}(v;q)\,\Gamma_0(v;q)\,dv = 0,$$

avec

$$s_2(q) := \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathcal{S}_2(v;q)\,\Gamma_0(v;q)\,dv}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \Gamma_0(v;q)^2\,dv}.$$

Dans la fermeture minimale retenue ici, seul le coefficient projeté $s_2(q)$ est gardé.

La quantité $s_2(q)$ est donc le coefficient projeté de la réponse anisotrope du retour sur la composante principale Γ_0. Elle est définie par projection, mais elle n'est pas séparée ici en contributions microscopiques de maille.

5. Fermeture anisotrope minimale du second seuil

On introduit alors le produit anisotrope effectif

$$\boxed{\Pi_{\text{aniso}}(q) := \varepsilon_2\, s_2(q).}$$

Le second seuil q_3 est le premier seuil pour lequel ce produit effectif rend accessible une seconde orientation admissible du retour. Ainsi, au stade présent,

q_3 ne ferme pas encore ε_2 seul,	q_3 paramètre le bloc anisotrope effectif $\Pi_{\text{aniso}}(q) = \varepsilon_2 s_2(q)$.

6. Hiérarchie finale

La hiérarchie complète se lit donc comme suit :

$q_1 = 1$,	q_2 : seuil isotrope paramétrant χ_{mesh},	q_3 : seuil anisotrope paramétrant Π_{aniso}.

Dans cette écriture, la structure du filtre fixe la hiérarchie des seuils et les variables réduites à contrôler. Les valeurs numériques des seuils ou des résidus de maille nécessitent l'évaluation explicite des fonctionnels $T_0, T_1, \mathcal{G}_{\text{mesh}}^{(\text{iso})}$ et s_2, ainsi que la spécification interne de la branche considérée.

6.6.7 Pont spectral 2DOF et forme EBK absorbée

Angle–action (forme absorbée) et même variable de phase. Pour les solutions 2DOF (bump/NSL) partageant la même variable de phase ϕ et le même indice de Maslov, on utilise la convention EBK absorbée (6.1)–(6.2). On la rappelle localement sous la forme

$$\boxed{\mathcal{J} \;=\; \frac{E}{\omega} \;=\; h_{\text{eff}}.} \tag{6.40}$$

L'indice spectral $q \in \mathbb{N}$ n'apparaît donc pas explicitement dans $\mathcal{J}$: il est porté par la fréquence observée.

Échelle spectrale. La réduction mono–anneau impose

$$\varepsilon(q) = \frac{\varepsilon(1)}{q}, \qquad \varepsilon(q) = \frac{\lambda(q)}{R_0}.$$

On en déduit

$$\lambda(q) = \frac{\lambda(1)}{q}.$$

Or, pour la réduction locale 2DOF au rang meneur, on a

$$\Omega = \frac{1}{\lambda} = \frac{\omega}{c_t}.$$

Ainsi,

$$\omega(q) = \frac{c_t}{\lambda(q)} = q\,\frac{c_t}{\lambda(1)} = q\,\omega_0, \qquad \omega_0 := \omega(1).$$

On obtient donc

$$\boxed{\omega(q) = q\,\omega_0}, \tag{6.41}$$

avec corrections $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ hors du rang LO.

Corollaire 6.9 (Énergie spectrale EBK)**.** *En combinant* (6.40) *et* (6.41)*, on obtient*

$$\boxed{E_{\mathrm{tot}}^{(\mathrm{bump})}(q) \;=\; h_{\mathrm{eff}}\,\omega(q) \;=\; h_{\mathrm{eff}}\,q\,\omega_0}. \tag{6.42}$$

En particulier, pour le fondamental $q = 1$,

$$E_{\mathrm{tot}}^{(\mathrm{bump})}(1) = h_{\mathrm{eff}}\,\omega_0.$$

Compatibilité avec la forme intégrale LO. Au LO, dans la réduction locale avec raccord, la fermeture intégrale donne

$$E_0^{(\mathrm{bump})}(q) \;=\; \kappa_{\mathrm{core}}\,T\,\lambda(q)^2\,R_0, \qquad \varepsilon(q) = \frac{\lambda(q)}{R_0} = \frac{\varepsilon(1)}{q}. \tag{6.43}$$

Ici, κ_{core} désigne le facteur de cœur normalisé du profil bump :

$$\kappa_{\mathrm{core}} := I_0 := \int_{\mathbb{R}} A^2(u)\,du. \tag{6.44}$$

La relation (6.43) décrit la contribution de cœur au rang LO pour le profil normalisé de la branche considérée, tandis que (6.42) fixe la loi spectrale globale. Il ne s'agit donc pas de deux lois concurrentes : la compatibilité entre (6.43) et (6.42) contraint la normalisation interne effective de la branche pour tout q admissible.

En particulier, pour $q = 1$,

$$E_0^{(\mathrm{bump})}(1) = \kappa_{\mathrm{core}}\,T\,\lambda(1)^2\,R_0.$$

La largeur transverse fondamentale $\lambda(1)$ n'est pas identifiée à ℓ_0 : elle constitue une échelle émergente du canal considéré, fermée ultérieurement par la carte DtN correspondante. .

Constantes tridimensionnelles du profil. Pour le profil canonique $a(\xi) = \operatorname{sech}\xi$, les constantes de forme tridimensionnelles utilisées dans les projecteurs de canal sont définies par

$$J_0 := 4\pi \int_0^\infty \xi^2 a(\xi)^2\,d\xi, \qquad J_2 := 4\pi \int_0^\infty \xi^2 \big(a'(\xi)\big)^2\,d\xi. \tag{6.45}$$

Pour $a(\xi) = \operatorname{sech}\xi$, on obtient

$$J_0 = \frac{\pi^3}{3}, \qquad J_2 \simeq 7.6339320582. \tag{6.46}$$

Fermeture spectrale LO régularisée du bump 2DOF. Le coefficient additif régularisé de fermeture de la branche bump 2DOF est noté $b_0^{(2),\mathrm{LO\text{-}reg}}$. Il intervient dans la combinaison de largeur

$$\mathcal{C}_2(\Delta) = \frac{J_0 + J_2}{\Delta^2} + b_0^{(2),\mathrm{LO\text{-}reg}}.$$

Il s'agit d'un nombre pur propre à la fermeture effective de bord de cette branche. La notation abrégée $b_0^{(2)}$ sera introduite après l'évaluation régularisée, uniquement pour alléger les formules qui suivent.

Lemme 6.10 (Cellule spectrale élémentaire du bump 2DOF)**.** *La cellule spectrale élémentaire utilisée dans la fermeture de bord du bump 2DOF est la cellule isotrope de rang projectif unitaire* $r = 1$ *dans un espace local tridimensionnel. Son angle* $\psi_c^{(\mathrm{cell})}$ *vérifie*

$$\boxed{\sin^2 \psi_c^{(\mathrm{cell})} = \frac{1}{3}, \qquad \psi_c^{(\mathrm{cell})} = \arcsin\!\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0.6154797086703874\ldots.} \tag{6.47}$$

Démonstration. Au LO isotrope, le poids quadratique d'un projecteur de rang r dans l'espace local tridimensionnel est

$$\eta(P) = \frac{\operatorname{tr} P}{\operatorname{tr} \mathbf{1}_3} = \frac{r}{3},$$

cf. (9.6). La cellule spectrale élémentaire correspond au rang unitaire $r = 1$, donc à

$$\eta_{\mathrm{cell}} = \frac{1}{3}.$$

Dans la coordonnée conique du filtre zonal, la fraction portée par la cellule est $\sin^2 \psi_c^{(\mathrm{cell})}$. On impose donc

$$\sin^2 \psi_c^{(\mathrm{cell})} = \eta_{\mathrm{cell}} = \frac{1}{3}.$$

Le cas $r = 0$ serait vide, tandis que $r = 2$ correspondrait à une cellule composite de rang deux, et non à la cellule élémentaire de bord du bump 2DOF. □

Filtre de cellule. On note $C_\ell^{(1)}$ les Gegenbauer zonaux sur $\mathbb{S}^3$, avec

$$C_\ell^{(1)}(\cos\theta) = \frac{\sin((\ell+1)\theta)}{\sin\theta}, \qquad C_\ell^{(1)}(1) = \ell + 1.$$

On définit le filtre de cellule normalisé par la mesure zonale $\sin^2\theta\, d\theta$:

$$\boxed{F_\ell^{(\mathrm{cell})}(\psi_c) := \frac{\displaystyle\int_0^{\psi_c} C_\ell^{(1)}(\cos\theta)\, \sin^2\theta\, d\theta}{\displaystyle\int_0^{\psi_c} \sin^2\theta\, d\theta}.} \tag{6.48}$$

Ainsi

$$\boxed{F_0^{(\mathrm{cell})} = 1, \qquad F_{\ell\geq 1}^{(\mathrm{cell})}(\psi_c) = \frac{\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\sin(\ell\psi_c)}{\ell} - \dfrac{\sin((\ell+2)\psi_c)}{\ell+2}\right]}{\dfrac{\psi_c}{2} - \dfrac{\sin(2\psi_c)}{4}}.} \tag{6.49}$$

Poids spectraux. Pour une échelle de masse adimensionnée

$$s := mR_0,$$

le propagateur spectral massif réduit est

$$\boxed{G_\ell(s) = \frac{1}{\ell(\ell+2) + s^2}.} \tag{6.50}$$

Les poids spectraux de cellule sont alors

$$\boxed{a_\ell(s) = G_\ell(s) \left| F_\ell^{(\mathrm{cell})}(\psi_c^{(\mathrm{cell})}) \right|^2.} \tag{6.51}$$

Projection de coeur au plateau local. Dans la limite locale du bump 2DOF, la projection radiale du profil canonique $a(\xi) = \operatorname{sech} \xi$ donne

$$\boxed{B_\ell^{(0)} = J_0\,(\ell+1), \qquad J_0 = \frac{\pi^3}{3}.} \tag{6.52}$$

La quantité spectrale réduite est donc

$$\boxed{\widehat{U}(s) := \frac{\displaystyle\sum_{\ell=0}^{L_{\max}} a_\ell(s)\, B_\ell^{(0)}}{a_0(s)} = J_0\, \frac{\displaystyle\sum_{\ell=0}^{L_{\max}} a_\ell(s)\,(\ell+1)}{a_0(s)}.} \tag{6.53}$$

À échelle finie, la fermeture spectrale associée est

$$\boxed{b_0^{(2)}(s) := J_0\, \widehat{U}(s).} \tag{6.54}$$

Autrement dit,

$$\boxed{b_0^{(2)}(s) = J_0^2\, \frac{\displaystyle\sum_{\ell=0}^{L_{\max}} a_\ell(s)\,(\ell+1)}{a_0(s)}.} \tag{6.55}$$

Définition 6.11 (Fermeture LO régularisée de bord)**.** La somme spectrale associée au cap abrupt n'est pas utilisée comme une limite brute $s \to \infty$. La fermeture numérique retenue est une fermeture LO régularisée du bord canonique :

$$s \in \{80, 120, 160, 200\}, \qquad L_{\max} = 12s, \qquad x = s^{-2}.$$

Pour chaque s, on calcule $b_0^{(2)}(s)$ par (6.55), puis on ajuste les quatre valeurs par une loi affine

$$b_0^{(2)}(s) = A + B\,x, \qquad x = \frac{1}{s^2}.$$

La fermeture LO régularisée est définie par

$$\boxed{b_0^{(2),\mathrm{LO\text{-}reg}} := \mathrm{Reg}_{\mathrm{LO}}^{(12)}\,[b_0^{(2)}(s)] := A.} \tag{6.56}$$

Statut de la régularisation. Le cap abrupt est une idéalisation LO du bord de la cellule. Ses coefficients spectraux portent une queue de bord qui ne doit pas être interprétée comme une limite canonique brute de $b_0^{(2)}(s)$. La prescription $\mathrm{Reg}_{\mathrm{LO}}^{(12)}$ est donc une fermeture effective de bord : elle régularise les modes non résolus du raccord canonique et fournit une valeur stable de branche à utiliser avec une incertitude de régularisation.

Ainsi, $b_0^{(2),\text{LO-reg}}$ n'est pas une constante exacte issue d'une limite stricte. C'est une constante effective LO de fermeture, admise lorsque la stabilité sous variation raisonnable de la fenêtre spectrale est contrôlée et que l'incertitude associée est propagée aux quantités aval.

La notation abrégée $b_0^{(2)}$ désigne, dans la suite de cette branche, la valeur régularisée $b_0^{(2),\text{LO-reg}}$. Cette abréviation ne change pas le statut de la quantité : il s'agit d'une fermeture effective LO du bord non résolu, contrôlée par une régularisation spectrale stable et accompagnée d'une incertitude de régularisation.

Proposition 6.12 (Évaluation numérique de la fermeture LO régularisée)**.** *La valeur centrale de $b_0^{(2),\text{LO-reg}}$ est obtenue par la procédure suivante :*

1. *utiliser la cellule spectrale* (6.47) *;*
2. *calculer les filtres $F_\ell^{(\mathrm{cell})}$ par* (6.48)–(6.49) *;*
3. *choisir la grille*
$$s \in \{80, 120, 160, 200\};$$
4. *pour chaque s, prendre*
$$L_{\max} = 12s;$$
5. *calculer $G_\ell(s)$, puis $a_\ell(s)$ par* (6.50)–(6.51) *;*
6. *évaluer $\widehat{U}(s)$ par* (6.53)*, puis $b_0^{(2)}(s)$ par* (6.54) *;*
7. *ajuster les quatre valeurs de $b_0^{(2)}(s)$ en fonction de $x = 1/s^2$ par une loi affine $A + Bx$, puis définir la valeur centrale de la fermeture régularisée par* (6.56)*.*

Les valeurs intermédiaires sont

s	$\widehat{U}(s)$	$b_0^{(2)}(s)$
80	1425.8687910812	14736.9607486894
120	1560.7736553129	16131.2599306515
160	1656.3874925251	17119.4696276737
200	1730.5170477351	17885.6301273496

et la prescription (6.56) *fournit la valeur centrale*

$$\boxed{b_0^{(2),\text{LO-reg}} = 1.8092069643818934 \times 10^4.} \tag{6.57}$$

En tenant compte de la dispersion observée sous variation de fenêtres spectrales raisonnables, on retient pour les propagations LO l'enveloppe

$$\boxed{b_0^{(2),\text{LO-reg}} \simeq (1.80 \pm 0.04) \times 10^4.} \tag{6.58}$$

Démonstration. La cellule spectrale est fixée par (6.47). Les filtres de cellule sont donnés par (6.48)–(6.49). Les poids spectraux sont donnés par (6.50) et (6.51). Enfin, la somme de bord à échelle finie est donnée par (6.55). L'évaluation aux quatre valeurs prescrites de s, suivie de l'ajustement affine en $x = s^{-2}$, donne l'ordonnée à l'origine affichée dans (6.57). La dispersion indiquée dans (6.58) encode le statut LO régularisé de la fermeture et limite la précision des prédictions absolues qui en dépendent. □

Distinction avec la normalisation cap du canal EM–like. Le filtre $F_\ell^{(\mathrm{cell})}$ défini dans (6.48) est le filtre de cellule utilisé dans la construction spectrale de $b_0^{(2),\mathrm{LO\text{-}reg}}$. Il ne doit pas être confondu avec la normalisation du projecteur cap $\ell = 1$ utilisée dans la fermeture EM–like.

Scaling de la fermeture de largeur. La largeur réduite Δ agit par dilatation locale du coeur dans les coordonnées réduites de la branche bump 2DOF. À profil de forme fixé, le changement de variables local donne un facteur de mesure

$$d^3u = \Delta^3\, d^3\xi.$$

Les contributions de coeur portant deux dérivées spatiales se renormalisent comme Δ^{-2}. Avec les moments canoniques du profil, elles donnent le coefficient

$$A_2 := J_0 + J_2.$$

La contribution de bord/massique propre à la fermeture bump 2DOF ne porte pas de dérivée de coeur à ce niveau LO ; elle fournit donc un terme additif indépendant de Δ, noté $b_0^{(2)}$. La combinaison réduite de largeur est ainsi

$$\boxed{\mathcal{C}_2(\Delta) = \frac{J_0 + J_2}{\Delta^2} + b_0^{(2)}.} \tag{6.59}$$

Fonctionnelle réduite de largeur. Dans la réduction LO, l'énergie de fermeture dépend du carré de la combinaison réduite $\mathcal{C}_2(\Delta)$. Le facteur de volume local issu de la dilatation du coeur fournit alors

$$\boxed{\mathcal{F}_2(\Delta) = \Delta^3 \left[\frac{J_0 + J_2}{\Delta^2} + b_0^{(2)}\right]^2} \tag{6.60}$$

à un facteur positif global près. Ce facteur global ne modifie pas la condition de stationnarité en Δ.

La condition $\partial_\Delta \mathcal{F}_2(\Delta) = 0$ donne

$$\frac{d}{d\Delta}\left[\Delta^3 \left(\frac{J_0 + J_2}{\Delta^2} + b_0^{(2)}\right)^2\right] = 0.$$

En posant $A_2 = J_0 + J_2$, cette dérivée s'écrit

$$-\frac{A_2^2}{\Delta^2} + 2A_2 b_0^{(2)} + 3\big(b_0^{(2)}\big)^2 \Delta^2 = 0.$$

La racine positive est

$$\boxed{\Delta_*^2 = \frac{J_0 + J_2}{3\, b_0^{(2)}}.} \tag{6.61}$$

Conséquences numériques. Dans la suite de cette section, sauf mention explicite contraire, on note

$$b_0^{(2)} := b_0^{(2),\mathrm{LO\text{-}reg}}$$

pour alléger les formules. Avec

$$J_0 = \frac{\pi^3}{3} \approx 10.33542556009994, \qquad J_2 \approx 7.6339320581530377,$$

on a

$$J_0 + J_2 \approx 17.96935761825298.$$

La largeur réduite de la fermeture bump 2DOF est donc donnée par (6.61), soit

$$\frac{d}{d\Delta}\left[\Delta^3\left(\frac{J_0+J_2}{\Delta^2}+b_0^{(2)}\right)^2\right]_{\Delta=\Delta_*}=0,$$

ce qui donne

$$\boxed{\Delta_*=\sqrt{\frac{J_0+J_2}{3\,b_0^{(2)}}}.} \tag{6.62}$$

En reportant la valeur centrale (6.57), on obtient

$$\boxed{\Delta_*\approx 1.819539647205362\times 10^{-2}.} \tag{6.63}$$

Puis

$$\boxed{\kappa_\omega=\frac{1}{\Delta_*}.} \tag{6.64}$$

Donc

$$\boxed{\kappa_\omega\approx 54.9589563237.} \tag{6.65}$$

On en déduit enfin

$$\boxed{\Delta_*^6\approx 3.628851020855722\times 10^{-11}.} \tag{6.66}$$

Convention de fermeture. La convention de fermeture utilisée dans les expressions 1–corps est donc

$$\boxed{\Delta_*=\kappa_\omega^{-1},\qquad \frac{\Delta_*^2}{b_0^{(2)}}=\frac{1}{\kappa_\omega^2\,b_0^{(2)}}.} \tag{6.67}$$

Les prédictions absolues qui dépendent de $b_0^{(2)}$ héritent de l'incertitude de régularisation indiquée dans (6.58). En particulier, les résultats qui contiennent des puissances élevées de $b_0^{(2)}$ ne doivent pas être affichés avec une précision supérieure à celle autorisée par cette fermeture LO régularisée.

6.6.8 Fermeture spectrale LO de la masse 1–corps du bump 2DOF

Objet. On ferme ici l'écriture spectrale 1–corps du bump 2DOF dans la convention EBK absorbée

$$E_{\mathrm{tot}}^{(\mathrm{bump})}=h_{\mathrm{eff}}\,\omega_{\mathrm{obs}}.$$

Dans cette convention, la quantification angle–action ne fournit plus un facteur EBK multiplicatif supplémentaire. Le seul facteur 2π restant dans la réduction 1–anneau est la moyenne de phase mono–anneau.

Séparation LO des facteurs. Au LO, la réduction 1–corps est séparée en quatre contributions adimensionnées indépendantes :

$$\mathcal{C}_{\mathrm{bump2}}=\Pi_{\mathrm{proj}}\,Z_{\mathrm{ann}}\,Z_{\mathrm{proj}}\,\frac{\Delta_*^2}{b_0^{(2)}}.$$

Chaque facteur provient d'une étape différente de la réduction : projection massique du canal, moyenne de phase mono–anneau, projection cinétique transverse, puis fermeture spectrale de plateau.

Projection massique du canal. La projection massique du canal 2DOF est obtenue par projection de Galerkin du mode radial de coeur sur le canal spectral normalisé. Le point important est que la fermeture spectrale est bilinéaire : elle contient une projection d'injection dans le coeur et une projection de lecture du coeur vers le canal observé. Ces deux projections ne sont pas deux chemins physiques distincts ; ce sont les deux faces d'un même coefficient quadratique.

On note

$$\langle f, g\rangle_0 := 4\pi \int_0^\infty \xi^2 f(\xi) g(\xi)\, d\xi,$$

et, pour le profil de coeur $a(\xi) = \operatorname{sech} \xi$,

$$J_0 = \langle a, a\rangle_0, \qquad J_2 = \langle a', a'\rangle_0.$$

Lemme 6.13 (Forme quadratique réduite du mode radial)**.** *La restriction de l'énergie quadratique LO au mode radial $A\,a(\xi)$ porte, à un facteur dimensionnel commun près, la norme réduite*

$$\boxed{\|a\|^2_{\mathrm{red}} = J_0 + J_2.} \tag{6.68}$$

Démonstration. Au rang LO quasi-plan, la partie quadratique locale du coeur contient la contribution de coeur et la contribution de gradient radial. Pour le mode $A\,a(\xi)$, on obtient

$$E_2[A] = \frac{\mathcal{N}_{\mathrm{core}}}{2} A^2 \left(\langle a, a\rangle_0 + \langle a', a'\rangle_0\right),$$

où $\mathcal{N}_{\mathrm{core}}$ est le facteur dimensionnel commun du coeur. En utilisant les définitions de J_0 et J_2,

$$E_2[A] = \frac{\mathcal{N}_{\mathrm{core}}}{2} A^2 (J_0 + J_2).$$

La norme quadratique réduite associée au mode radial est donc

$$\|a\|^2_{\mathrm{red}} = J_0 + J_2.$$

□

Lemme 6.14 (Projection d'amplitude sur le coeur)**.** *La projection d'amplitude d'un mode radial réduit-normalisé sur le coeur normalisé vaut*

$$\boxed{\gamma_{\mathrm{core}} = \sqrt{\frac{J_0}{J_0 + J_2}}.} \tag{6.69}$$

Démonstration. Le mode normalisé par la norme réduite est

$$e_{\mathrm{red}} = \frac{a}{\sqrt{J_0 + J_2}},$$

tandis que le même profil normalisé par la norme de coeur est

$$e_0 = \frac{a}{\sqrt{J_0}}.$$

L'amplitude du mode réduit lue dans le canal de coeur est donc

$$\gamma_{\mathrm{core}} = \langle e_0, e_{\mathrm{red}}\rangle_0 = \frac{\langle a, a\rangle_0}{\sqrt{J_0}\sqrt{J_0 + J_2}} = \frac{J_0}{\sqrt{J_0}\sqrt{J_0 + J_2}} = \sqrt{\frac{J_0}{J_0 + J_2}}.$$

□

Lemme 6.15 (Rapport Galerkin gradient/coeur)**.** *La projection de Galerkin de l'opérateur radial linéarisé sur le mode $a(\xi)$ sélectionne le rapport*

$$\boxed{R_{\nabla/0} = \frac{J_2}{J_0}.} \tag{6.70}$$

Démonstration. Dans le secteur radial linéarisé, la contribution active de gradient est obtenue par projection Galerkin sur le mode test a. À facteur dimensionnel commun près, le quotient de Rayleigh du gradient radial est

$$R_{\nabla/0} = \frac{\langle a', a' \rangle_0}{\langle a, a \rangle_0}.$$

Avec les définitions de J_0 et J_2, cela donne

$$R_{\nabla/0} = \frac{J_2}{J_0}.$$

□

Lemme 6.16 (Projection des densités quadratiques de coeur)**.** *Soient*

$$e_{\mathrm{red}} := \frac{a}{\sqrt{J_0 + J_2}}, \qquad e_0 := \frac{a}{\sqrt{J_0}}.$$

On associe aux deux modes les densités quadratiques normalisées

$$Q_{\mathrm{red}} := e_{\mathrm{red}} \otimes e_{\mathrm{red}}, \qquad Q_0 := e_0 \otimes e_0.$$

Alors la projection de densité quadratique du mode réduit sur le coeur vaut

$$\boxed{\langle Q_0, Q_{\mathrm{red}} \rangle_{\mathrm{HS}} = \big(\langle e_0, e_{\mathrm{red}} \rangle_0\big)^2 = \gamma_{\mathrm{core}}^2.} \tag{6.71}$$

Démonstration. Par définition du produit de Hilbert–Schmidt induit par $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$,

$$\langle e_0 \otimes e_0,\, e_{\mathrm{red}} \otimes e_{\mathrm{red}} \rangle_{\mathrm{HS}} = \langle e_0, e_{\mathrm{red}} \rangle_0^2.$$

Le Lemme 6.14 donne

$$\langle e_0, e_{\mathrm{red}} \rangle_0 = \gamma_{\mathrm{core}},$$

d'où

$$\langle Q_0, Q_{\mathrm{red}} \rangle_{\mathrm{HS}} = \gamma_{\mathrm{core}}^2.$$

□

Lemme 6.17 (Poids bilinéaire du canal massique)**.** *La fermeture spectrale massique 1–corps porte le poids bilinéaire*

$$\boxed{\Pi_{\mathrm{mass}} = \gamma_{\mathrm{core}}^4 = \left(\frac{J_0}{J_0 + J_2}\right)^2.} \tag{6.72}$$

Démonstration. La fermeture massique 1–corps ne couple pas directement deux amplitudes linéaires de coeur ; elle couple deux densités quadratiques de mode. La source injectée dans le canal massique est donc représentée, au rang LO réduit, par $Q_{\mathrm{red}} = e_{\mathrm{red}} \otimes e_{\mathrm{red}}$, et la lecture de coeur par $Q_0 = e_0 \otimes e_0$.

D'après le Lemme 6.16, une projection de densité quadratique du mode réduit sur le coeur apporte le facteur

$$\langle Q_0, Q_{\mathrm{red}} \rangle_{\mathrm{HS}} = \gamma_{\mathrm{core}}^2.$$

La fermeture massique est bilinéaire injection–lecture sur ces densités : une projection de densité intervient du côté source, et une projection de densité intervient du côté lecture. Le poids total est donc

$$\Pi_{\mathrm{mass}} = \left(\langle Q_0, Q_{\mathrm{red}}\rangle_{\mathrm{HS}}\right)^2 = (\gamma_{\mathrm{core}}^2)^2 = \gamma_{\mathrm{core}}^4.$$

En utilisant

$$\gamma_{\mathrm{core}}^2 = \frac{J_0}{J_0 + J_2},$$

on obtient

$$\Pi_{\mathrm{mass}} = \gamma_{\mathrm{core}}^4 = \left(\frac{J_0}{J_0 + J_2}\right)^2.$$

Ainsi, la puissance quatre ne provient pas d'un comptage verbal de faces : elle provient du fait que la fonctionnelle de masse est bilinéaire sur les densités quadratiques normalisées du mode. □

Proposition 6.18 (Projection massique du canal 2DOF)**.** *La projection du canal 2DOF sur la composante massique effective vaut*

$$\boxed{\Pi_{\mathrm{proj}} = R_{\nabla/0}\,\Pi_{\mathrm{mass}} = \Big(\frac{J_2}{J_0}\Big)\Big(\frac{J_0}{J_0 + J_2}\Big)^2.} \tag{6.73}$$

Démonstration. Le quotient de Galerkin du gradient radial donne, par (6.70),

$$R_{\nabla/0} = \frac{J_2}{J_0}.$$

Le poids bilinéaire de projection massique donne, par (6.72),

$$\Pi_{\mathrm{mass}} = \left(\frac{J_0}{J_0 + J_2}\right)^2.$$

Ces deux facteurs portent sur deux opérations différentes : le premier est le quotient de Rayleigh du canal radial actif, le second est la projection bilinéaire injection–lecture du canal massique normalisé. Au rang LO, la séparation de Galerkin rend ces opérations multiplicatives. On obtient donc

$$\Pi_{\mathrm{proj}} = R_{\nabla/0}\Pi_{\mathrm{mass}} = \Big(\frac{J_2}{J_0}\Big)\Big(\frac{J_0}{J_0 + J_2}\Big)^2.$$

□

Moyenne mono–anneau. La réduction 1–corps porte sur un seul paramètre de phase annulaire $\theta \in [0, 2\pi]$. La moyenne normalisée sur cette phase donne

$$Z_{\mathrm{ann}} := \frac{1}{2\pi}. \tag{6.74}$$

Ce facteur est une moyenne mono–anneau. Il ne doit pas être compté comme une seconde normalisation EBK, puisque la relation $E = h_{\mathrm{eff}}\omega$ est déjà écrite en convention absorbée.

Projection cinétique transverse. La fonctionnelle de masse ci-dessus fournit le coefficient spectral associé aux densités quadratiques de coeur. La coordonnée 1–corps quantifiée, elle, est la coordonnée transverse réduite du mode 2DOF. Le passage de la coordonnée de coeur normalisée à cette coordonnée transverse réduite porte une projection linéaire de mode :

$$\boxed{Z_{\mathrm{proj}} := \langle e_0, e_{\mathrm{red}}\rangle_0 = \gamma_{\mathrm{core}} = \sqrt{\frac{J_0}{J_0 + J_2}}.} \tag{6.75}$$

Ce facteur est distinct de la projection bilinéaire $\Pi_{\mathrm{mass}} = \gamma_{\mathrm{core}}^4$. Le poids Π_{mass} provient de la fermeture massique bilinéaire sur les densités quadratiques, tandis que Z_{proj} provient de la normalisation linéaire de la coordonnée transverse 1–corps. Il ne constitue donc ni une troisième face de couplage ni un double comptage. La fonctionnelle 1–corps porte alors

$$\boxed{\Pi_{\mathrm{mass}} Z_{\mathrm{proj}} = \Big[\big(\langle Q_0, Q_{\mathrm{red}}\rangle_{\mathrm{HS}}\big)^2\Big]\,\langle e_0, e_{\mathrm{red}}\rangle_0 = (\gamma_{\mathrm{core}}^2)^2\gamma_{\mathrm{core}} = \gamma_{\mathrm{core}}^5.} \tag{6.76}$$

Ce facteur est également distinct de la projection conique 3DOF $\sigma = \sin^2\alpha$.

Fermeture spectrale de plateau. La fermeture spectrale introduit

$$\frac{\Delta_*^2}{b_0^{(2)}} = \frac{1}{\kappa_\omega^2\, b_0^{(2)}}. \tag{6.77}$$

Proposition 6.19 (Coefficient spectral 1–corps du bump 2DOF)**.** *Le coefficient adimensionné de la fermeture spectrale 1–corps est*

$$\mathcal{C}_{\mathrm{bump2}} = \Pi_{\mathrm{proj}}\, Z_{\mathrm{ann}}\, Z_{\mathrm{proj}}\, \frac{1}{\kappa_\omega^2\, b_0^{(2)}}. \tag{6.78}$$

Démonstration. Au LO, la jauge tubulaire sépare la variable de phase annulaire, le profil radial et la normalisation transverse. La moyenne sur la phase annulaire donne (6.74). La projection massique du canal radial est dérivée dans la Prop. 6.18 et donne (6.73). Sa partie de projection massique est la fermeture bilinéaire sur les densités quadratiques, cf. (6.72). La normalisation transverse linéaire de la coordonnée 1–corps donne (6.75). L'origine de la puissance totale γ_{core}^5 est explicitée dans (6.76). Enfin la fermeture de plateau donne (6.77). Les contributions portent sur des opérations séparées au LO — densité massique bilinéaire, coordonnée transverse linéaire, moyenne annulaire et fermeture spectrale —; leur produit donne (6.78). □

Proposition 6.20 (Masse spectrale 1–corps du bump 2DOF)**.** *La masse spectrale LO du bump 2DOF vérifie*

$$m_{\mathrm{bump}}^{(\mathrm{spec})} := \frac{E_{\mathrm{bump}}^{(\mathrm{spec})}}{c_t^2}. \tag{6.79a}$$

$$\boxed{m_{\mathrm{bump}}^{(\mathrm{spec})} c_t^2 = \Big(\frac{h_{\mathrm{eff}} c_t}{\ell_0}\Big)\Pi_{\mathrm{proj}}\, Z_{\mathrm{ann}}\, Z_{\mathrm{proj}}\, \frac{1}{\kappa_\omega^2\, b_0^{(2)}}}. \tag{6.79b}$$

De façon équivalente,

$$m_{\mathrm{bump}}^{(\mathrm{spec})} c_t^2 = \Big(\frac{h_{\mathrm{eff}} c_t}{\ell_0}\Big)\Pi_{\mathrm{proj}}\, Z_{\mathrm{ann}}\, Z_{\mathrm{proj}}\, \frac{\Delta_*^2}{b_0^{(2)}}. \tag{6.80}$$

Démonstration. La convention EBK absorbée donne l'échelle d'énergie

$$E = h_{\mathrm{eff}}\omega_{\mathrm{obs}}.$$

La réduction spectrale 1–corps écrit la fréquence observée sous la forme

$$\omega_{\mathrm{obs}} = \frac{c_t}{\ell_0}\,\mathcal{C}_{\mathrm{bump2}}.$$

En injectant (6.78), on obtient

$$E_{\mathrm{spec}} = \Big(\frac{h_{\mathrm{eff}} c_t}{\ell_0}\Big)\Pi_{\mathrm{proj}}\, Z_{\mathrm{ann}}\, Z_{\mathrm{proj}}\, \frac{1}{\kappa_\omega^2\, b_0^{(2)}}.$$

Puisque $E_{\mathrm{spec}} = m_{\mathrm{bump}}^{(\mathrm{spec})} c_t^2$, on obtient (6.79b). La forme (6.80) suit directement de (6.77). □

6.6.9 Fermeture LO de la largeur transverse effective du bump

But. On ferme ici la grandeur λ_e, définie comme largeur transverse effective de la branche bump 1–corps. Cette grandeur caractérise le canal transverse interne associé à cette branche. Elle ne doit pas être interprétée comme une longueur d'onde modale, ni être identifiée à l'échelle micro ℓ_0.

Carte de bord réduite. La fermeture transverse est lue par une carte de bord projetée du canal EM-like. On note

$$\Delta_{\mathrm{DtN}}^{(\mathrm{EM})}$$

le décalage de bord réduit, défini comme l'admittance inverse normalisée du canal plateau/bord. Cette quantité est sans dimension.

Lemme 6.21 (Mode plateau normalisé du raccord transverse)**.** *Dans la couche de raccord transverse au LO, le mode plateau normalisé $B(y)$ du canal EM-like vérifie le problème réduit*

$$-B''(y) + b_0^{(2)} B(y) = 0, \qquad B(0) = B_\partial, \qquad B(y) \to 0 \quad (y \to +\infty). \tag{6.81}$$

Sa solution décroissante est

$$B(y) = B_\partial \exp\left[-\sqrt{b_0^{(2)}}\, y\right], \tag{6.82}$$

et la valeur propre DtN réduite du plateau est

$$\boxed{\Lambda_{\mathrm{plat}}^{(\mathrm{EM})} = -\frac{B'(0)}{B(0)} = \sqrt{b_0^{(2)}}.} \tag{6.83}$$

Démonstration. L'équation caractéristique associée à

$$-B'' + b_0^{(2)} B = 0$$

est

$$r^2 = b_0^{(2)}.$$

La solution compatible avec la décroissance pour $y \to +\infty$ est donc

$$B(y) = B_\partial e^{-\sqrt{b_0^{(2)}}\, y}.$$

On obtient

$$-B'(0) = \sqrt{b_0^{(2)}}\, B_\partial,$$

d'où

$$-\frac{B'(0)}{B(0)} = \sqrt{b_0^{(2)}}.$$

□

Lemme 6.22 (Normalisation cap du flux EM-like)**.** *La lecture EM-like du flux de bord utilise la normalisation cap monopolaire*

$$\boxed{\mathcal{N}_{\mathrm{cap}}^{(\mathrm{EM})} = \frac{1}{4\pi}.} \tag{6.84}$$

Démonstration. Au LO quasi-plan, la lecture de bord du canal EM-like est monopolaire sur la section angulaire locale. Le flux total porté par une densité de bord uniforme est

$$\Phi_\partial = \int_{\mathbb{S}^2} j_\partial \, d\Omega = 4\pi \, j_\partial.$$

La densité normalisée par flux unitaire est donc

$$j_\partial^{\mathrm{norm}} = \frac{\Phi_\partial}{4\pi}.$$

La conversion d'un flux total vers la densité de bord normalisée porte donc le facteur

$$\mathcal{N}_{\mathrm{cap}}^{(\mathrm{EM})} = \frac{1}{4\pi}.$$

□

Proposition 6.23 (Décalage de bord EM-like normalisé)**.** *Le décalage de bord réduit du canal EM-like vaut*

$$\boxed{\Delta_{\mathrm{DtN}}^{(\mathrm{EM})} = \frac{1}{4\pi\sqrt{b_0^{(2)}}}.} \tag{6.85}$$

Démonstration. La valeur propre DtN réduite du plateau est, par (6.83),

$$\Lambda_{\mathrm{plat}}^{(\mathrm{EM})} = \sqrt{b_0^{(2)}}.$$

La fermeture de largeur utilise le décalage de bord, c'est-à-dire l'admittance inverse du plateau :

$$(\Lambda_{\mathrm{plat}}^{(\mathrm{EM})})^{-1} = \frac{1}{\sqrt{b_0^{(2)}}}.$$

La lecture EM-like est ensuite normalisée par le cap monopolaire (6.84), soit un facteur $1/(4\pi)$. Ainsi

$$\Delta_{\mathrm{DtN}}^{(\mathrm{EM})} = \mathcal{N}_{\mathrm{cap}}^{(\mathrm{EM})} (\Lambda_{\mathrm{plat}}^{(\mathrm{EM})})^{-1} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{b_0^{(2)}}}.$$

□

Fermeture de la largeur effective. L'amplification spectrale interne du coeur bump est portée par

$$\kappa_\omega = \Delta_*^{-1},$$

cf. (6.67). La largeur transverse effective est la longueur obtenue en appliquant cette amplification interne à l'échelle ℓ_0, puis en divisant par le décalage de bord :

$$\boxed{\lambda_e = \frac{\kappa_\omega \, \ell_0}{\Delta_{\mathrm{DtN}}^{(\mathrm{EM})}} = 4\pi \, \kappa_\omega \, \sqrt{b_0^{(2)}} \, \ell_0.} \tag{6.86}$$

Statut dimensionnel. Les facteurs

$$\Delta_{\mathrm{DtN}}^{(\mathrm{EM})}, \qquad 4\pi, \qquad \sqrt{b_0^{(2)}}, \qquad \kappa_\omega$$

sont sans dimension. La seule grandeur dimensionnée dans (6.86) est ℓ_0. La fermeture produit donc bien une longueur transverse effective.

6.6.10 Capacité radiale du coeur et facteurs de forme

Cadre géométrique : jauge tubulaire autour du mono–anneau. Le coeur du bump est localisé dans un tube mince d'épaisseur $\mathcal{O}(\lambda)$ autour d'un grand cercle de $\mathbb{S}^3$ (longueur $2\pi R_0$). On introduit la coordonnée tubulaire transverse ϱ centrée sur ce cercle (en décalant la géodésique polaire selon $s = \frac{\pi}{2}R_0 + \varrho$) et l'enveloppe adimensionnée $A(u) = \operatorname{sech} u$ avec $u = \varrho/\lambda$. Au voisinage du mono–anneau ($|\varrho| \lesssim \lambda$), le jacobien

$$J(s) = R_0^2 \sin^2\Big(\frac{s}{R_0}\Big)$$

se développe en

$$J\Big(\tfrac{\pi}{2}R_0 + \varrho\Big) = R_0^2 \cos^2\Big(\tfrac{\varrho}{R_0}\Big) = R_0^2\Big[1 + \mathcal{O}\Big(\tfrac{\varrho^2}{R_0^2}\Big)\Big] = R_0^2\Big[1 + \mathcal{O}\Big(\tfrac{\lambda^2}{R_0^2}\Big)\Big]. \tag{6.87}$$

Ainsi, au LO dans la calotte quasi–plate ($\lambda \ll R_0$), la mesure radiale effective est simplement $R_0^2\, d\varrho$, avec des corrections $\mathcal{O}((\lambda/R_0)^2)$.

Distinction des moments de profil. Les constantes J_0 et J_2 introduites dans (6.45) sont des moments tridimensionnels pondérés par $4\pi\xi^2$. Les constantes I_0 et I_2 ci-dessous sont au contraire des moments transverses unidimensionnels du tube. Elles ne doivent donc pas être identifiées aux constantes J_0, J_2, même lorsqu'elles sont évaluées sur le même profil canonique sech.

Moments radiaux du coeur. La partie tangentielle LO de l'énergie s'obtient en intégrant $|\nabla_s \psi|^2$ à travers la section transverse du tube. Après séparation d'échelle ($\varrho = \lambda u$) et intégration angulaire rapide, les deux quantités

$$M_0 := \int_{\mathbb{R}} J\Big(\tfrac{\pi}{2}R_0 + \lambda u\Big)\, A^2(u)\, \lambda\, du, \qquad M_2 := \int_{\mathbb{R}} J\Big(\tfrac{\pi}{2}R_0 + \lambda u\Big)\, \Big|\partial_\varrho A\Big(\tfrac{\varrho}{\lambda}\Big)\Big|^2\, d\varrho \tag{6.88}$$

apparaissent naturellement : M_0 pèse la masse effective (poids A^2), tandis que M_2 pèse la raideur radiale (poids $|\partial_\varrho A|^2$). En remplaçant $\partial_\varrho A(\varrho/\lambda) = \lambda^{-1} A'(u)$ et en utilisant (6.87), on obtient

$$M_0 = R_0^2\, \lambda \underbrace{\int_{\mathbb{R}} A^2(u)\, du}_{=:I_0} \Big[1 + \mathcal{O}\Big(\tfrac{\lambda^2}{R_0^2}\Big)\Big], \qquad M_2 = \frac{R_0^2}{\lambda} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} A'^{\,2}(u)\, du}_{=:I_2} \Big[1 + \mathcal{O}\Big(\tfrac{\lambda^2}{R_0^2}\Big)\Big]. \tag{6.89}$$

Le quotient de moments vaut donc

$$\frac{M_2}{M_0} = \frac{1}{\lambda^2}\, \frac{I_2}{I_0}\Big[1 + \mathcal{O}\Big(\tfrac{\lambda^2}{R_0^2}\Big)\Big]. \tag{6.90}$$

Valeurs explicites pour le profil sech**.** Pour $A(u) = \operatorname{sech} u$, on a

$$I_0 = \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sech}^2 u\, du = 2, \qquad I_2 = \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sech}^2 u\, \tanh^2 u\, du = \frac{2}{3}. \tag{6.91}$$

En particulier,

$$\frac{I_2}{I_0} = \frac{1}{3}. \tag{6.92}$$

Contrôle d'erreur. Le passage coeur / extérieur avec raccord ajoute des corrections exponentiellement petites $\mathcal{O}(e^{-k})$, qui s'ajoutent aux corrections de courbure $\mathcal{O}((\lambda/R_0)^2)$.

Définition 6.24 (Capacité radiale LO du coeur)**.** La capacité radiale LO du coeur est définie par

$$C_\ell^{(0)} := \frac{1}{4\pi} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{M_0}{\lambda R_0^2} = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} A^2(u)\, du. \tag{6.93}$$

Elle vérifie donc

$$4\pi\, C_\ell^{(0)} = \kappa_{\mathrm{core}}, \tag{6.94}$$

où κ_{core} est le facteur de cœur introduit plus haut en (6.44).

Justification. La limite de gauche existe par (6.89) et coïncide, au LO, avec l'intégrale de droite. Le facteur $1/(4\pi)$ retire l'intégrale angulaire $d\Omega_{S^2}$ absorbée dans M_0.

Conséquence pour le profil sech**.** En utilisant (6.91), on obtient

$$C_\ell^{(0)} = \frac{1}{2\pi}, \qquad \kappa_{\mathrm{core}} = 2. \tag{6.95}$$

Facteur fréquentiel (quotient de Rayleigh). La pulsation rapide du bump suit un quotient variationnel de type Rayleigh :

$$\omega^2 = c_t^2\, \kappa_{\mathrm{geom}}\, \frac{M_2}{M_0}, \qquad c_t^2 = \frac{T}{\rho}, \qquad \kappa_{\mathrm{geom}} = 1 + \mathcal{O}(e^{-k}) + \mathcal{O}\Big(\tfrac{\lambda^2}{R_0^2}\Big). \tag{6.96}$$

En utilisant (6.90), on obtient

$$\omega^2 = \frac{c_t^2}{\lambda^2}\, \kappa_{\mathrm{geom}}\, \frac{I_2}{I_0}\Big[1 + \mathcal{O}\Big(\tfrac{\lambda^2}{R_0^2}\Big)\Big].$$

On définit donc le facteur fréquentiel pur du bump par

$$\big(\chi_\omega^{(\mathrm{bump})}\big)^2 := \kappa_{\mathrm{geom}}\, \frac{I_2}{I_0}, \tag{6.97}$$

de sorte que

$$\omega_{\mathrm{bump}} = \chi_\omega^{(\mathrm{bump})}\, \frac{c_t}{\lambda}\Big[1 + \mathcal{O}\Big(\tfrac{\lambda^2}{R_0^2}\Big)\Big]. \tag{6.98}$$

Pour le profil sech, cela donne au rang meneur

$$\big(\chi_\omega^{(\mathrm{bump})}\big)^2 = \frac{\kappa_{\mathrm{geom}}}{3}, \qquad \chi_\omega^{(\mathrm{bump})} = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big[1 + \mathcal{O}(e^{-k}) + \mathcal{O}\Big(\tfrac{\lambda^2}{R_0^2}\Big)\Big]. \tag{6.99}$$

Remarque. La relation (6.98) concerne la dynamique interne rapide du coeur bump associée à la largeur λ apparaissant dans le profil $A(\varrho/\lambda)$. Cette largeur n'est pas, en général, la largeur transverse effective λ_e utilisée plus loin dans le secteur 1–corps.

Énergie modale du coeur. Au LO, la quantification EBK absorbée fixe l'énergie modale totale du bump sous la forme

$$E_{\mathrm{tot}}^{(\mathrm{bump})} = h_{\mathrm{eff}}\, \omega_{\mathrm{bump}} = h_{\mathrm{eff}}\, \chi_\omega^{(\mathrm{bump})}\, \frac{c_t}{\lambda}\Big[1 + \mathcal{O}\Big(\tfrac{\lambda^2}{R_0^2}\Big)\Big]. \tag{6.100}$$

Cette expression est la fermeture fréquentielle interne du coeur. Elle ne doit pas être confondue avec la fermeture 1–corps effective utilisée ci-dessous.

Masse mécanique du secteur 1–corps. Dans le secteur observable 1–corps, on introduit la *largeur transverse effective* λ_e du bump électron-like, fermée indépendamment par (6.86). La masse mécanique associée s'écrit

$$m_{\text{bump}}^{(\text{mech})} := \kappa_{\text{core}}\,\rho\,\lambda_e^2\,R_0. \tag{6.101}$$

Cette relation appartient à la fermeture effective 1–corps ; elle n'est pas obtenue en identifiant λ_e à la largeur fréquentielle interne λ du coeur.

Compatibilité spectrale–mécanique. Les deux écritures précédentes décrivent le même état 1–corps. La fermeture de compatibilité est donc

$$m_{\text{bump}}^{(\text{mech})} = m_{\text{bump}}^{(\text{spec})}. \tag{6.102}$$

En forme énergétique, cette compatibilité devient

$$\kappa_{\text{core}}\,\rho\,\lambda_e^2\,R_0\,c_t^2 = \Big(\frac{h_{\text{eff}}\,c_t}{\ell_0}\Big)\Pi_{\text{proj}}\,Z_{\text{ann}}\,Z_{\text{proj}}\,\frac{1}{\kappa_\omega^2\,b_0^{(2)}}. \tag{6.103}$$

Compatibilité structurelle. La section présente donc deux étages distincts :

1. la structure interne du coeur, décrite par M_0, M_2, κ_{core} et $\kappa_\omega^{(\text{bump})}$;
2. la fermeture 1–corps observable, qui utilise la largeur effective λ_e et mène à (6.101).

Ces deux étages sont reliés uniquement par la condition de compatibilité (6.102).

6.6.11 Remarque sur la courbure

Les corrections de courbure proviennent (i) du développement du jacobien $J(s) = R_0^2 \sin^2(s/R_0)$ au-delà de l'approximation quasi–plane, et (ii) des termes de bord dans la carte effective de canal (qui modifient les conditions de fermeture). Au LO, elles sont d'ordre

$$\mathcal{O}\Big(\frac{\lambda^2}{R_0^2}\Big)$$

sur la dynamique interne du coeur et n'affectent ni la fenêtre $u_*(6.20)$ ni la structure des branches admissibles du bump au rang meneur. En particulier, κ_{core} et $\chi_\omega^{(\text{bump})}$ restent inchangés au LO, les écarts étant absorbés dans

$$\kappa_{\text{geom}} = 1 + \mathcal{O}(e^{-k}) + \mathcal{O}\Big(\frac{\lambda^2}{R_0^2}\Big).$$

6.6.12 Élimination de $\Phi_\star$ (rappel)

Par la sélection de parité au centre, $\Phi_\star = 0$ et $A'(0) = 0$. Le raccord C^1 au bord (6.18) fixe ensuite la donnée

$$\frac{\partial_s A}{A}\Big|_{s=\lambda u_*}$$

au rang LO, et la coupure (6.25) borne l'amplitude de bord. Il ne subsiste donc aucun paramètre libre central.

Corollaire 6.25 (Disparition du paramètre libre)**.** *Les trois contraintes*

$$A(0) = 1, \qquad A'(0) = 0, \qquad \textit{(DtN au bord)} \quad \frac{\partial_s A}{A}\Big|_{s=\lambda u_*} = \textit{nombre pur (LO)}$$

déterminent entièrement le profil radial LO dans la réduction locale avec raccord. Il ne subsiste donc, au LO, aucune constante libre centrale : le paramètre $\Phi_\star$ est éliminé. En conséquence, κ_{core} et $\chi_\omega^{(\mathrm{bump})}$ sont entièrement fixés par les intégrales de forme et la géométrie du tube mince, et la fermeture

$$E_{\mathrm{tot}}^{(\mathrm{bump})} = h_{\mathrm{eff}}\,\omega_{\mathrm{bump}}$$

est indépendante de tout réglage de phase ou de flux au centre.

6.7 Fermeture du coeur pour la NSL 2DOF

Dans le régime LO quasi–plan sur $\mathbb{S}^3$, la branche NSL 2DOF est caractérisée par une structure à deux jambes tangentielles orthogonales, une fenêtre de coeur, une fermeture fréquentielle interne et une fermeture mécanique 1–corps. On adopte les mêmes conventions que pour le bump 2DOF :

$$\varepsilon := \frac{\lambda}{R_0} \ll 1, \qquad c_t^2 = \frac{T}{\rho}, \qquad J(s) = R_0^2 \sin^2\Big(\frac{s}{R_0}\Big), \qquad A(0) = 1 \quad (\text{la parité } A'(0) = 0 \text{ est établie en §6.6.2}). \tag{6.104}$$

La NSL est construite comme une décomposition opératoire à deux jambes tangentiellement orthogonales, iso–fréquences, partageant la même variable de phase ϕ et le même indice de Maslov (voir §6.7.6).

6.7.1 Ansatz NSL : amplitude modulée et rotation rapide

On considère l'ansatz modulé, jambe par jambe, dans la jauge tubulaire autour du mono–anneau (de longueur $2\pi R_0$) :

$$\psi_j(t, \mathbf{x}) = A\Big(\frac{\varrho}{\lambda}\Big)\,\cos(\mu t + \varphi_j)\,e^{i\omega t}, \qquad j = 1, 2, \qquad \varphi_2 = \varphi_1 + \tfrac{\pi}{2}, \tag{6.105}$$

avec $A(u) = \operatorname{sech} u$, $A(0) = 1$, $A'(0) = 0$ et $\omega \gg \mu$ (rotation rapide commune).

Cette écriture est la forme modulée, jambe par jambe, de l'ansatz NSL à deux jambes en quadrature introduit plus haut : le facteur $e^{i\omega t}$ porte la rotation rapide commune, tandis que $\cos(\mu t + \varphi_j)$ décrit la modulation lente relative de la jambe j. Au rang LO strict, on retrouve la description à une seule fréquence en gelant cette modulation lente.

6.7.2 Spin géométrique de la NSL

La NSL possède deux polarisations circulaires tangentielles indépendantes en quadrature, d'où

$$N_{\mathrm{pol}} = 2.$$

La fenêtre de raccord LO et le raccord C^1 imposent l'enroulement fondamental au rang meneur :

$$\boxed{w_{\mathrm{fund}} = 1.} \tag{6.106}$$

au rang meneur. Par la définition commune

$$s_g = \frac{w\,N_{\mathrm{pol}}}{2}, \qquad S = s_g\,h_{\mathrm{eff}},$$

on obtient

$$\boxed{S = h_{\mathrm{eff}}\,, \qquad s_g = 1}\,.$$

Remarque. L'orthogonalité $L^2(\mathbb{S}^3)$ des deux contributions intervient directement dans le test d'indépendance qui fixe $N_{\mathrm{pol}} = 2$.

6.7.3 Héritage de la fenêtre bump par la NSL (preuve jambe par jambe)

Principe. La fenêtre de coeur de la NSL ne doit pas être postulée indépendamment de celle du bump si le raccord LO est traité *jambe par jambe*. Le point à montrer est que, au rang meneur, chaque jambe de la NSL voit la même donnée intérieure et la même carte DtN projetée que le bump 2DOF.

Proposition 6.26 (Invariance LO du raccord par jambe)**.** *Considérons la NSL 2DOF écrite comme somme de deux jambes tangentielles orthogonales, iso–fréquences et en quadrature,*

$$\psi_{\mathrm{NSL}} = \psi_1 + \psi_2, \qquad \varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2},$$

avec, pour $j = 1, 2$,

$$\psi_j(t, \mathbf{x}) = A\Big(\frac{\varrho}{\lambda}\Big)\, \cos(\mu t + \varphi_j)\, e^{i\omega t}.$$

Au rang LO quasi–plan, le raccord intérieur/extérieur projeté sur chaque jambe coïncide avec le raccord du bump. En particulier, la variable de coupure u_* obéit, jambe par jambe, à la même équation de raccord que pour le bump.

Démonstration. (i) Même coeur local par jambe.) Par construction, les deux jambes portent la même enveloppe $A(\varrho/\lambda)$, la même largeur λ et la même géométrie tubulaire locale. En particulier, au bord du coeur $s_c = \lambda u_*$, la dérivée logarithmique intérieure vaut pour chaque jambe

$$\frac{\partial_s A}{A}\Big|_{s=s_c} = -\frac{1}{\lambda} \tanh u_*,$$

exactement comme pour le bump.

(ii) Découplage des jambes au LO.) Les deux jambes sont orthogonales en quadrature. Au rang LO, l'opérateur extérieur linéarisé sur $\mathbb{S}^3$ agit scalairement sur chaque composante tangentielle et préserve cette décomposition orthogonale. Il n'apparaît donc pas de terme croisé dans la projection sur une jambe : la carte DtN extérieure est diagonale dans la base (ψ_1, ψ_2).

(iii) Même carte DtN projetée.) Comme chaque jambe voit le même opérateur extérieur scalaire, la même géométrie mono–anneau et la même donnée de bord locale, la carte DtN projetée sur une jambe coïncide, au LO, avec la carte DtN du bump. Autrement dit, le décalage de bord porté par une jambe de la NSL est le même que celui du bump au rang meneur.

(iv) Conclusion.) Le raccord projeté sur chaque jambe prend donc la même forme que pour le bump : la donnée intérieure, la carte DtN projetée et la correction de couche coïncident au LO. La variable de coupure u_* vérifie ainsi, jambe par jambe, la même équation de raccord que le bump. □

Corollaire 6.27 (Fenêtre de coeur héritée par la NSL)**.** *Au rang LO, la fenêtre de coeur de la NSL 2DOF, entendue* jambe par jambe*, coïncide avec celle du bump établie en §6.6.1. En particulier,*

$$u_* \in [1.7, 2.1].$$

Démonstration. Par la Proposition 6.26, l'équation de raccord projetée sur chaque jambe est identique à celle du bump au rang meneur. La fenêtre admissible en u_* est donc la même. □

6.7.4 Fenêtre de coeur et coupure (par jambe)

Par le Corollaire 6.27, la fenêtre de coeur de la NSL 2DOF coïncide, jambe par jambe, avec celle du bump. Le raccord C^1 intérieur/extérieur sur $\mathbb{S}^3$ au LO s'écrit donc, pour chaque jambe,

$$y \cot y = 1 - u_* \tanh u_* + \delta\Lambda(u_*, \varepsilon), \qquad y = (n{+}1)\, u_*\, \varepsilon. \tag{6.107}$$

En effet, par la Proposition 6.26, la carte DtN projetée sur une jambe NSL coïncide au LO avec celle du raccord bump hérité. Aucun décalage de bord indépendant ne doit donc être introduit dans la projection jambe par jambe.

On travaille donc sur la même fenêtre admissible que pour le bump :

$$u_* \in [1.7, 2.1]. \tag{6.108}$$

La coupure locale est évaluée sur la fenêtre admissible héritée du bump :

$$\Sigma_{\text{eff}} := \sup_{u \in \mathcal{U}_{\text{adm}}} u^2 \Big(\tfrac{A(u)}{A(0)}\Big)^2, \qquad \mathcal{U}_{\text{adm}} := [u_-, u_+], \qquad u_- \approx 1.7085, \quad u_+ \approx 2.0653. \tag{6.109}$$

Pour le profil $A(u) = \operatorname{sech} u$, on obtient alors

$$0.266 \lesssim u_*^2 \operatorname{sech}^2 u_* \lesssim 0.359,$$

et

$$0.2495 \lesssim \varepsilon_* := \operatorname{sech} u_* \lesssim 0.3508,$$

soit, au centième près,

$$\varepsilon_* \in [0.25, 0.35].$$

Lemme 6.28 (Signe LO du raccord NSL 2DOF)**.** *Sur la fenêtre héritée $u_* \in [1.7, 2.1]$, le membre droit réduit du raccord NSL 2DOF projeté jambe par jambe est strictement négatif au LO :*

$$G_{\text{NSL}}(u_*; \varepsilon) = 1 - u_* \tanh u_* + \delta\Lambda(u_*, \varepsilon) < 0.$$

Démonstration. Par le Corollaire 6.27, la fenêtre NSL coïncide jambe par jambe avec la fenêtre du bump. Cette fenêtre est définie par (6.19), c'est-à-dire

$$-1 \le 1 - u_* \tanh u_* \le -\frac{3}{5}.$$

La correction de couche satisfait

$$\delta\Lambda(u_*, \varepsilon) = \mathcal{O}((u_*\varepsilon)^2), \qquad \varepsilon = \lambda/R_0 \ll 1.$$

Au rang LO, cette correction est sous-dominante devant la marge $3/5$ qui sépare le membre droit principal de zéro. Ainsi

$$1 - u_* \tanh u_* + \delta\Lambda(u_*, \varepsilon) < 0$$

sur toute la fenêtre admissible. □

Lemme 6.29 (Annulation du défaut isotrope résiduel pour la NSL 2DOF)**.** *Au rang LO, la NSL 2DOF possède la trace scalaire fondamentale, mais son défaut isotrope résiduel sans trace est nul. Les fonctionnels de retour qui ouvrent les seuils q_2 et q_3 dans la branche bump ne produisent donc pas d'ouverture admissible supplémentaire pour la NSL.*

Démonstration. On utilise la décomposition trace/sans-trace (6.27). Pour un bump mono-jambe, la matrice interne de polarisation est

$$M_{\text{bump}} = e_1 \otimes e_1, \qquad \operatorname{tr} M_{\text{bump}} = 1.$$

Il vient donc

$$D_{\text{bump}} = e_1 \otimes e_1 - \frac{1}{2} I_2 \neq 0, \qquad \|D_{\text{bump}}\|^2 = \frac{1}{2}.$$

Le bump possède donc un défaut isotrope résiduel non nul, capable d'alimenter la première ouverture q_2.

Pour une NSL 2DOF, les deux jambes ont même profil, sont orthogonales et sont équilibrées en quadrature. La matrice interne normalisée est alors

$$M_{\mathrm{NSL}} = \frac{1}{2}(e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2) = \frac{1}{2} I_2.$$

Ainsi

$$D_{\mathrm{NSL}} = M_{\mathrm{NSL}} - \frac{1}{2} I_2 = 0.$$

La densité scalaire portée par la NSL est donc bien non nulle :

$$|\mathcal{S}^{\mathrm{LO}}_{\mathrm{NSL}}|^2 = A^2,$$

mais cette densité scalaire appartient à la trace fondamentale déjà consommée par le niveau $q = 1$. Elle ne constitue pas le défaut résiduel sans trace qui ouvre q_2. D'après la définition des fonctionnels de retour isotrope,

$$r_2^{(\mathrm{NSL})}(q) = \|D_{\mathrm{NSL}}\|^2 \int_{\mathbb{R}} T_1(v)\, \Gamma_0(v; q)\, dv = 0.$$

Le mécanisme de scission anisotrope q_3 agit sur ce même défaut résiduel. Comme $D_{\mathrm{NSL}} = 0$, il n'existe pas non plus de scission anisotrope admissible de type bump pour la NSL au rang LO minimal. La NSL conserve donc seulement le niveau fondamental sélectionné par le raccord local. □

6.7.5 Filtre de signe NSL et unicité du niveau LO

On applique la règle de décision de la §6.5.5. Par le Lemme 6.28, le membre droit réduit du raccord NSL est strictement négatif au LO. Ainsi, pour tout $q \geq 2$, $y = u_*/q < \pi/2$ et $h(y) > 0$: aucune solution dans le filtre local nu.

Il reste à vérifier que la NSL ne réintroduit pas, par retour compact, les ouvertures q_2 et q_3 propres au bump. C'est précisément l'objet du Lemme 6.29 : la quadrature équilibrée des deux jambes annule le défaut isotrope résiduel sans trace D_X. La NSL possède donc la trace fondamentale, mais pas le défaut qui ouvre q_2, ni la scission anisotrope q_3 associée à ce défaut.

Pour $q = 1$, $y = u_* \in (\pi/2, \pi)$, et h étant décroissante, il existe une solution unique :

$$\boxed{q = 1 \text{ uniquement (NSL, LO)}}.$$

6.7.6 Pont spectral 2DOF et forme EBK absorbée (NSL)

Les familles 2DOF (bump/NSL) partagent la même variable de phase ϕ et le même indice de Maslov. On utilise la convention EBK absorbée (6.1)–(6.2), rappelée ici sous la forme

$$\boxed{\mathcal{J} = \frac{E}{\omega} = h_{\mathrm{eff}}.} \tag{6.110}$$

Dans le régime $R_0 \gg \lambda$, la loi d'échelle spectrale est

$$\omega(q) = q\, \omega_0, \qquad \omega_0 := \omega(1), \tag{6.111}$$

d'où l'énergie spectrale

$$E^{(\mathrm{NSL})}_{\mathrm{tot}}(q) = h_{\mathrm{eff}}\, \omega(q) = h_{\mathrm{eff}}\, q\, \omega_0. \tag{6.112}$$

Contrainte NSL. Pour la NSL (classe $\mathfrak{C}_-$), le filtre de §6.7.5 impose $\boxed{q=1}$ au LO. On utilisera donc

$$E_{\mathrm{tot}}^{(\mathrm{NSL})}(1) = h_{\mathrm{eff}}\,\omega_0.$$

6.7.7 Capacité radiale et facteurs de forme (somme des jambes)

Moments radiaux par jambe. Dans la jauge tubulaire, on définit, par jambe,

$$M_0^{(\mathrm{leg})} = R_0^2\,\lambda\int_{\mathbb{R}} A^2(u)\,du\Big[1+\mathcal{O}\Big(\tfrac{\lambda^2}{R_0^2}\Big)\Big],\qquad M_2^{(\mathrm{leg})} = \frac{R_0^2}{\lambda}\int_{\mathbb{R}} A'^2(u)\,du\Big[1+\mathcal{O}\Big(\tfrac{\lambda^2}{R_0^2}\Big)\Big]. \tag{6.113}$$

Additivité des deux jambes. Les deux jambes de la NSL sont orthogonales en quadrature. Après intégration sur l'angle interne, on a

$$\int_0^{2\pi}\cos^2\phi\,d\phi = \pi,\qquad \int_0^{2\pi}\sin^2\phi\,d\phi = \pi,$$

de sorte que les contributions des deux jambes s'ajoutent sans terme croisé au LO. On obtient donc

$$M_0^{(\mathrm{NSL})} = 2\,M_0^{(\mathrm{leg})},\qquad M_2^{(\mathrm{NSL})} = 2\,M_2^{(\mathrm{leg})},\qquad \Rightarrow\qquad \frac{M_2^{(\mathrm{NSL})}}{M_0^{(\mathrm{NSL})}} = \frac{M_2^{(\mathrm{leg})}}{M_0^{(\mathrm{leg})}}. \tag{6.114}$$

Intégrales de forme pour le profil sech**.** Pour $A(u)=\operatorname{sech} u$, on a

$$I_0 := \int_{\mathbb{R}} A^2(u)\,du = 2,\qquad I_2 := \int_{\mathbb{R}} A'^2(u)\,du = \frac{2}{3}. \tag{6.115}$$

Capacité radiale et facteur de coeur. On pose, par jambe,

$$C_{\ell,\mathrm{leg}}^{(0)} := \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}} A^2(u)\,du,\qquad \kappa_{\mathrm{core}}^{(\mathrm{leg})} := 4\pi\,C_{\ell,\mathrm{leg}}^{(0)}. \tag{6.116}$$

Avec (6.115), il vient

$$C_{\ell,\mathrm{leg}}^{(0)} = \frac{1}{2\pi},\qquad \kappa_{\mathrm{core}}^{(\mathrm{leg})} = 2.$$

Pour la NSL, par additivité des deux jambes,

$$C_{\ell,\mathrm{NSL}}^{(0)} = 2\,C_{\ell,\mathrm{leg}}^{(0)},\qquad \kappa_{\mathrm{core}}^{(\mathrm{NSL})} = 2\,\kappa_{\mathrm{core}}^{(\mathrm{leg})} = 4. \tag{6.117}$$

Facteur fréquentiel. Le quotient de Rayleigh total est inchangé par la somme des jambes :

$$\big(\chi_\omega^{(\mathrm{NSL})}\big)^2 = \kappa_{\mathrm{geom}}\,\frac{M_2^{(\mathrm{NSL})}}{M_0^{(\mathrm{NSL})}} = \kappa_{\mathrm{geom}}\,\frac{I_2}{I_0}\Big[1+\mathcal{O}\Big(\tfrac{\lambda^2}{R_0^2}\Big)\Big]. \tag{6.118}$$

Avec (6.115), on obtient donc

$$\big(\chi_\omega^{(\mathrm{NSL})}\big)^2 = \frac{\kappa_{\mathrm{geom}}}{3},\qquad \chi_\omega^{(\mathrm{NSL})} = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big[1+\mathcal{O}\Big(\tfrac{\lambda^2}{R_0^2}\Big)\Big]. \tag{6.119}$$

D'où

$$\omega_{\mathrm{NSL}} = \chi_\omega^{(\mathrm{NSL})}\,\frac{c_t}{\lambda}. \tag{6.120}$$

Fermeture énergétique LO du coeur. Par intégration radiale dans la jauge tubulaire, on obtient

$$E_0^{(\mathrm{NSL})} = \kappa_{\mathrm{core}}^{(\mathrm{NSL})}\, T\, \lambda^2 R_0. \tag{6.121}$$

En réécrivant (6.120) sous la forme

$$\lambda = \chi_\omega^{(\mathrm{NSL})}\, \frac{c_t}{\omega_{\mathrm{NSL}}}, \tag{6.122}$$

il vient

$$E_0^{(\mathrm{NSL})} = \kappa_{\mathrm{core}}^{(\mathrm{NSL})}\, T\, R_0 \left(\chi_\omega^{(\mathrm{NSL})} \frac{c_t}{\omega_{\mathrm{NSL}}}\right)^2. \tag{6.123}$$

Masse mécanique interne associée. On introduit alors la masse mécanique interne HSM associée à la NSL :

$$m_{\mathrm{NSL}}^{(\mathrm{mech})} := \frac{E_0^{(\mathrm{NSL})}}{c_t^2} = \kappa_{\mathrm{core}}^{(\mathrm{NSL})}\, \rho\, \lambda^2 R_0. \tag{6.124}$$

En réinjectant (6.122), on obtient

$$m_{\mathrm{NSL}}^{(\mathrm{mech})} = \kappa_{\mathrm{core}}^{(\mathrm{NSL})}\, \rho\, R_0 \left(\chi_\omega^{(\mathrm{NSL})} \frac{c_t}{\omega_{\mathrm{NSL}}}\right)^2 = \kappa_{\mathrm{core}}^{(\mathrm{NSL})} \left(\chi_\omega^{(\mathrm{NSL})}\right)^2 R_0\, \frac{T}{\omega_{\mathrm{NSL}}^2}. \tag{6.125}$$

Statut de la largeur λ. Dans la présente sous-section, λ désigne la largeur interne du coeur NSL, celle qui entre dans le profil $A(\varrho/\lambda)$ et dans la fermeture fréquentielle interne (6.120). Une éventuelle largeur transverse effective du secteur 1–corps, distincte de λ, ne fait pas l'objet de cette sous-section.

Compatibilité structurelle. La présente fermeture porte donc sur le coeur NSL lui-même :

1. la structure interne, décrite par $M_0^{(\mathrm{NSL})}$, $M_2^{(\mathrm{NSL})}$, $\kappa_{\mathrm{core}}^{(\mathrm{NSL})}$ et $\chi_\omega^{(\mathrm{NSL})}$;
2. la fermeture énergétique interne, donnée par (6.121) et (6.124).

Elle ne doit pas être confondue avec une fermeture effective 1–corps d'un canal transverse distinct, qui demanderait, le cas échéant, une largeur transverse effective propre au canal considéré.

6.7.8 Bloc local réduit du constituant NSL 2DOF

Origine. Le secteur radial fondamental porte le terme local

$$\mu_2\, r, \qquad \mu_2 = T\, \kappa_\mu, \qquad [\kappa_\mu] = \mathrm{m}^{-2}.$$

Dans la réduction de coeur NSL 2DOF, on travaille avec la variable adimensionnée

$$\boxed{u = \frac{\varrho}{\lambda}, \qquad A(u) = \operatorname{sech} u, \qquad A(0) = 1.} \tag{6.126}$$

Par invariance dimensionnelle au rang LO, le terme local radial intervient donc sous la seule combinaison sans dimension

$$\boxed{\kappa_\mu\, \lambda^2.}$$

Normalisation locale du coeur. Comme le profil est ici normalisé par $A(0) = 1$, la réduction locale ne porte pas sur une amplitude libre A_0, mais sur la combinaison sans dimension $\kappa_\mu \lambda^2$. On introduit le coefficient symbolique de raccord $C_{\text{cut}}^{(\text{NSL})}$ par

$$\boxed{1 = C_{\text{cut}}^{(\text{NSL})}\, \kappa_\mu\, \lambda^2, \qquad \text{soit} \qquad \kappa_\mu\, \lambda^2 = \frac{1}{C_{\text{cut}}^{(\text{NSL})}}.} \tag{6.127}$$

Le coefficient $C_{\text{cut}}^{(\text{NSL})}$ est un coefficient pur de raccord du coeur pour le profil canonique retenu. À ce stade, il fixe une écriture paramétrique de la réduction locale ; il n'est pas introduit comme une valeur numérique fermée.

Projection sur les moments de profil. Les contributions sans dérivée et avec dérivée sont portées respectivement par les moments de coeur

$$I_0 := \int_{\mathbb{R}} A^2(u)\, du, \qquad I_2 := \int_{\mathbb{R}} A'^{\,2}(u)\, du.$$

Pour une jambe élémentaire, le bloc réduit local prend donc la forme

$$\mathcal{B}_{\text{leg}}^{(\text{NSL})} = (\kappa_\mu \lambda^2)\, I_0 + I_2. \tag{6.128}$$

Avec la normalisation symbolique (6.127), la même expression s'écrit

$$\mathcal{B}_{\text{leg}}^{(\text{NSL})} = \frac{I_0}{C_{\text{cut}}^{(\text{NSL})}} + I_2. \tag{6.129}$$

Bloc commun du constituant NSL 2DOF. Dans la branche NSL 2DOF à deux jambes orthogonales, le bloc commun de constituant est obtenu par contraction Galerkin entre deux extrémités de canal. Une extrémité sans dérivée porte le moment de profil I_0, tandis qu'une extrémité où agit le terme radial différentiel porte le moment I_2. La contraction bilinéaire du bloc commun donne donc

$$K_0^{(2)} := I_0\, I_0 = I_0^2, \qquad K_2^{(2)} := I_0\, I_2.$$

Le carré I_0^2 ne représente pas une répétition du même facteur de normalisation : il provient des deux extrémités de la forme bilinéaire. Le terme $I_0 I_2$ correspond au même schéma de contraction avec une extrémité locale et une extrémité différentielle.

Le bloc commun s'écrit donc

$$\boxed{B_{\text{ch}}^{(\text{NSL})} = (\kappa_\mu \lambda^2)\, K_0^{(2)} + K_2^{(2)}.} \tag{6.130}$$

Avec la même normalisation symbolique, on obtient la forme paramétrée équivalente

$$B_{\text{ch}}^{(\text{NSL})} = \frac{K_0^{(2)}}{C_{\text{cut}}^{(\text{NSL})}} + K_2^{(2)}. \tag{6.131}$$

Statut. Le bloc (6.130) est le bloc local commun du constituant NSL 2DOF. Il provient uniquement du terme radial local du coeur NSL 2DOF après réduction sur le profil sech. Les formes (6.127), (6.129) et (6.131) sont des écritures paramétriques de la même réduction locale. Elles ne donnent pas, à elles seules, une valeur numérique fermée pour $C_{\text{cut}}^{(\text{NSL})}$.

Toute spécialisation ultérieure qui consomme $C_{\text{cut}}^{(\text{NSL})}$ comme grandeur numérique doit fournir, dans le développement concerné, soit son évaluation, soit son élimination par normalisation commune ou par ratio. À défaut, le bloc doit rester lu comme une écriture locale paramétrique.

6.7.9 Correctifs angulaires et noyaux internes

Dans les fermetures composées héritées du constituant NSL, la contribution de bord se décompose en un terme purement angulaire, dépendant du canal composé considéré, et un terme interne propre au coeur NSL. On écrit ainsi

$$\Delta_{\mathrm{DtN}}^{(X)} = \Delta_{\mathrm{cone}}^{(X)} + \Delta_{\mathrm{int}}^{(\mathrm{NSL})}(\kappa_r),$$

où X désigne l'étiquette du canal composé ultérieur, tandis que $\Delta_{\mathrm{int}}^{(\mathrm{NSL})}$ est le noyau interne porté par le coeur NSL lui-même.

Au rang LO, ce noyau interne est écrit sous la forme affine

$$\Delta_{\mathrm{int}}^{(\mathrm{NSL})}(\kappa_r) = A_2^{(\mathrm{NSL})}\Big(\frac{1}{\kappa_r} - 1\Big), \tag{6.132}$$

où $A_2^{(\mathrm{NSL})}$ désigne le coefficient pur associé à la projection jambe par jambe du noyau interne. Dans cette sous-section, il intervient comme coefficient symbolique de réduction interne ; aucune valeur numérique fermée ne lui est attachée ici.

Le terme $\Delta_{\mathrm{cone}}^{(X)}$ relève, lui, de la géométrie angulaire du canal composé et n'intervient pas dans la réduction locale du coeur NSL prise isolément. Toute spécialisation qui consomme $\Delta_{\mathrm{int}}^{(\mathrm{NSL})}$ comme grandeur numérique doit donc fournir l'évaluation de $A_2^{(\mathrm{NSL})}$, ou montrer que ce coefficient disparaît par normalisation commune ou par passage à un ratio.

Constantes coniques internes des filtres NSL 2DOF

Problème extérieur homogène. Les constantes coniques internes sont définies à partir du problème extérieur homogène associé au secteur radial NSL 2DOF. En variable angulaire $\psi = s/R_0$, sur l'intervalle

$$\psi \in [\psi_c, \pi - \psi_c],$$

on considère l'équation

$$\boxed{\partial_{\psi\psi} r + 2\cot\psi\,\partial_\psi r - \mu_{\mathrm{ext}}^2\, r = 0, \qquad \mu_{\mathrm{ext}} := \lambda_r R_0, \qquad \lambda_r^2 = \frac{\mu_2}{T\kappa_r}.} \tag{6.133}$$

Il s'agit ici du *problème extérieur homogène* : le terme source du coeur n'intervient pas dans la définition des constantes coniques.

Carte Dirichlet–Neumann. Pour toute solution de (6.133), on définit les données de bord

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} r(\psi_c) \\ r(\pi - \psi_c) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{n} = \begin{pmatrix} -\partial_\psi r(\psi_c) \\ +\partial_\psi r(\pi - \psi_c) \end{pmatrix}.$$

Par linéarité et par symétrie du problème extérieur, il existe une matrice de Dirichlet–Neumann de la forme

$$\boxed{\mathbf{n} = \mathsf{M}_{\mathrm{DN}}\,\mathbf{d}, \qquad \mathsf{M}_{\mathrm{DN}} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix},} \tag{6.134}$$

où a et b dépendent uniquement de ψ_c et de μ_{ext}.

Modes pair et impair. On introduit les vecteurs propres

$$\mathbf{e}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}_- = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

qui correspondent respectivement aux modes pair et impair du problème extérieur. Les valeurs propres associées sont

$$\boxed{\lambda_+ = a + b, \qquad \lambda_- = a - b.} \tag{6.135}$$

Constantes coniques de mode. Les constantes coniques sont des nombres purs associés aux modes propres de la carte DtN extérieure. On choisit le mode impair comme référence canonique de normalisation :

$$\boxed{\Delta_{\text{cone}}^{(-)} = 1.} \tag{6.136}$$

Le mode pair porte, de manière analogue, une constante conique interne $\Delta_{\text{cone}}^{(+)}$, obtenue à partir de la même carte M_{DN}. À ce stade, les signes + et − désignent seulement les deux parités propres du problème extérieur homogène ; ils ne constituent pas des identifications observationnelles.

Statut. Les quantités $\Delta_{\text{cone}}^{(-)}$ et $\Delta_{\text{cone}}^{(+)}$ sont des *nombres purs* du secteur NSL 2DOF. Elles ne dépendent pas des constantes de milieu (ρ, T, ℓ_0, R_0). Elles fournissent des données coniques internes qui peuvent être réinjectées dans une fermeture composée ultérieure, sans que la présente section ait à identifier ces modes à des canaux physiques externes.

6.7.10 Remarque sur la courbure

Comme pour le bump, les corrections de courbure proviennent (i) du développement de $J(s)$ au-delà du quasi–plan et (ii) des termes de bord dans la carte DtN. Elles sont d'ordre $\mathcal{O}((\lambda/R_0)^2)$ sur l'énergie et n'affectent pas les identités LO (6.110)–(6.124).

Synthèse. (i) La NSL 2DOF est formée de deux jambes orthogonales, iso–fréquences, partageant la même variable de phase ϕ. La fenêtre de coeur est héritée, jambe par jambe, de celle du bump. (ii) Le signe négatif du raccord NSL projeté jambe par jambe, établi au Lemme 6.28, exclut les niveaux $q \geq 2$ dans le filtre local nu. Le Lemme 6.29 montre en outre que la NSL possède une trace fondamentale mais aucun défaut isotrope résiduel sans trace : les seuils q_2 et q_3 de type bump ne s'ouvrent donc pas. La NSL admet ainsi $q = 1$ **uniquement** au LO.

(iii) La capacité radiale est additive : $\kappa_{\text{core}}^{(\text{NSL})} = 2\,\kappa_{\text{core}}^{(\text{leg})}$, tandis que le facteur fréquentiel reste inchangé : $\chi_\omega^{(\text{NSL})} = \chi_\omega^{(\text{leg})}$. (iv) La fermeture énergétique interne s'écrit

$$E_0^{(\text{NSL})} = \kappa_{\text{core}}^{(\text{NSL})}\, T\, \lambda^2 R_0, \qquad E_{\text{tot}}^{(\text{NSL})} = h_{\text{eff}}\, \omega_0.$$

(v) La masse mécanique interne associée vaut

$$m_{\text{NSL}}^{(\text{mech})} = \kappa_{\text{core}}^{(\text{NSL})}\, \rho\, \lambda^2 R_0.$$

Chapitre 7

Cinématique locale des solutions localisées massiques

7.1 Cadre général : cœur massique comobile

Objet. Les solutions localisées massiques sont construites dans un repère comobile : leur centre est au repos, leur impulsion longitudinale totale est nulle et leur énergie propre est finie. Le présent chapitre établit que, lorsqu'une telle branche issue des équations d'Euler–Lagrange HSM admet une réduction longitudinale hyperbolique locale, une solution comobile engendre une solution en mouvement uniforme dans un repère fixe.

La loi énergie–impulsion correspondante n'est pas postulée : elle résulte de la forme locale des équations du mouvement et de l'existence d'un repère comobile. Les modes non massifs, en particulier les branches photon–like, ne relèvent pas de cette construction : ils ne possèdent pas de repère de repos et doivent être traités par leur dispersion propre.

Forme réduite issue des équations du mouvement. Soit Ψ l'ensemble des degrés de liberté effectifs d'une branche localisée massique, après projection des coordonnées transverses et internes. Dans une fenêtre locale où les coefficients de fond sont constants au rang considéré, la réduction des équations d'Euler–Lagrange prend la forme

$$\boxed{\rho_{\mathcal{F}}\,\partial_t^2\Psi - \tau_{\mathcal{F}}\,\partial_s^2\Psi + \nabla_\Psi \mathcal{U}_{\mathcal{F}}(\Psi) = 0.} \tag{7.1}$$

On définit la vitesse caractéristique de la branche réduite par

$$\boxed{c_{\mathcal{F}}^2 := \frac{\tau_{\mathcal{F}}}{\rho_{\mathcal{F}}}.} \tag{7.2}$$

Universalité de la vitesse limite locale. Dans les branches localisées massiques considérées ici, la réduction longitudinale ne change pas le rapport entre l'inertie tangentielle et la raideur tangentielle héritées du secteur de fond. Les facteurs de projection propres à une famille peuvent modifier les coefficients effectifs $\rho_{\mathcal{F}}$ et $\tau_{\mathcal{F}}$, mais ils les multiplient par le même facteur dans la partie cinétique longitudinale. Par conséquent,

$$\boxed{\frac{\tau_{\mathcal{F}}}{\rho_{\mathcal{F}}} = \frac{T}{\rho} = c_t^2, \qquad c_{\mathcal{F}} = c_t.} \tag{7.3}$$

La notation $c_{\mathcal{F}}$ est conservée dans les identités de boost pour garder visibles les étapes de la réduction, mais la vitesse limite locale des branches massiques HSM est commune.

La fonction $\mathcal{U}_{\mathcal{F}}$ regroupe les termes locaux de cœur, de confinement, de courbure projetée et les contributions internes propres à la branche considérée. Elle ne dépend pas explicitement de s ni de t dans la fenêtre locale.

La branche est dite massique lorsque la solution comobile possède une énergie propre finie

$$E_0 > 0$$

et une impulsion longitudinale totale nulle

$$P_0 = 0.$$

Cette condition distingue les solitons localisés des modes propagatifs non massifs.

Proposition 7.1 (Solution comobile massive et solution en mouvement uniforme)**.** *Soit $\Psi_0(\xi,\tau)$ une solution localisée massique de* (7.1) *dans son repère comobile. Pour toute vitesse uniforme $|u| < c_{\mathcal{F}}$, on définit*

$$\Gamma_{\mathcal{F}}(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c_{\mathcal{F}}^2}},$$

et

$$\boxed{\xi = \Gamma_{\mathcal{F}}(s-ut), \qquad \tau = \Gamma_{\mathcal{F}}\left(t - \frac{u}{c_{\mathcal{F}}^2}s\right).} \tag{7.4}$$

Alors

$$\boxed{\Psi_u(s,t) := \Psi_0(\xi,\tau)} \tag{7.5}$$

est encore solution de l'équation réduite (7.1)*, écrite dans les variables fixes (s,t).*

Démonstration. Les dérivées associées à (7.4) sont

$$\partial_t = \Gamma_{\mathcal{F}}\,\partial_\tau - \Gamma_{\mathcal{F}} u\,\partial_\xi, \qquad \partial_s = -\Gamma_{\mathcal{F}}\frac{u}{c_{\mathcal{F}}^2}\,\partial_\tau + \Gamma_{\mathcal{F}}\,\partial_\xi.$$

On obtient alors

$$\partial_t^2 - c_{\mathcal{F}}^2\partial_s^2 = \Gamma_{\mathcal{F}}^2\left(\partial_\tau - u\partial_\xi\right)^2 - c_{\mathcal{F}}^2\Gamma_{\mathcal{F}}^2\left(-\frac{u}{c_{\mathcal{F}}^2}\partial_\tau + \partial_\xi\right)^2.$$

Les termes croisés s'annulent. Il reste

$$\partial_t^2 - c_{\mathcal{F}}^2\partial_s^2 = \Gamma_{\mathcal{F}}^2\left(1-\frac{u^2}{c_{\mathcal{F}}^2}\right)\partial_\tau^2 - c_{\mathcal{F}}^2\Gamma_{\mathcal{F}}^2\left(1-\frac{u^2}{c_{\mathcal{F}}^2}\right)\partial_\xi^2.$$

Comme

$$\Gamma_{\mathcal{F}}^2\left(1-\frac{u^2}{c_{\mathcal{F}}^2}\right) = 1,$$

on a l'identité

$$\boxed{\partial_t^2 - c_{\mathcal{F}}^2\partial_s^2 = \partial_\tau^2 - c_{\mathcal{F}}^2\partial_\xi^2.} \tag{7.6}$$

En utilisant $\tau_{\mathcal{F}} = \rho_{\mathcal{F}} c_{\mathcal{F}}^2$, l'équation réduite écrite en (s,t) se transforme exactement en l'équation réduite écrite en (ξ,τ). Comme Ψ_0 est solution dans le repère comobile, Ψ_u est solution dans le repère fixe. □

Proposition 7.2 (Énergie, impulsion et loi de boost des solutions massiques)**.** *Pour une branche réduite de la forme* (7.1)*, la densité lagrangienne locale s'écrit*

$$\mathscr{L}_{\mathcal{F}} = \frac{\rho_{\mathcal{F}}}{2}|\partial_t \Psi|^2 - \frac{\tau_{\mathcal{F}}}{2}|\partial_s \Psi|^2 - \mathcal{U}_{\mathcal{F}}(\Psi).$$

Les quantités conservées associées aux translations en t et en s sont

$$\boxed{E = \int \left[\frac{\rho_{\mathcal{F}}}{2}|\partial_t \Psi|^2 + \frac{\tau_{\mathcal{F}}}{2}|\partial_s \Psi|^2 + \mathcal{U}_{\mathcal{F}}(\Psi)\right] ds, \qquad P = -\int \rho_{\mathcal{F}}\, \partial_t \Psi \cdot \partial_s \Psi \, ds.} \tag{7.7}$$

Sous le changement de variables (7.4)*, elles vérifient*

$$\boxed{E(u) = \Gamma_{\mathcal{F}}(E_0 + uP_0), \qquad P(u) = \Gamma_{\mathcal{F}}\left(P_0 + \frac{u}{c_{\mathcal{F}}^2} E_0\right).} \tag{7.8}$$

Dans le repère comobile d'une solution localisée massique,

$$P_0 = 0, \qquad E_0 > 0.$$

On obtient donc

$$\boxed{E(u) = \Gamma_{\mathcal{F}} E_0, \qquad P(u) = \Gamma_{\mathcal{F}} \frac{u}{c_{\mathcal{F}}^2} E_0.} \tag{7.9}$$

Démonstration. La densité lagrangienne réduite dépend des dérivées longitudinales par la combinaison

$$|\partial_t \Psi|^2 - c_{\mathcal{F}}^2 |\partial_s \Psi|^2,$$

qui est préservée par (7.4). Les translations temporelle et longitudinale donnent donc les charges de Noether (7.7).

Le changement $(\tau, \xi) \mapsto (t, s)$ est linéaire et de déterminant unité. Le courant de Noether associé aux translations se transforme alors dans le plan (t, s) selon

$$\begin{pmatrix} E(u)/c_{\mathcal{F}} \\ P(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_{\mathcal{F}} & \Gamma_{\mathcal{F}} u/c_{\mathcal{F}} \\ \Gamma_{\mathcal{F}} u/c_{\mathcal{F}} & \Gamma_{\mathcal{F}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_0/c_{\mathcal{F}} \\ P_0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit

$$E(u) = \Gamma_{\mathcal{F}}(E_0 + uP_0), \qquad P(u) = \Gamma_{\mathcal{F}}\left(P_0 + \frac{u}{c_{\mathcal{F}}^2} E_0\right).$$

Pour une solution localisée massive dans son repère comobile, l'impulsion totale est nulle, $P_0 = 0$. La loi (7.9) suit. □

Dispersion effective des solutions massiques. L'invariant quadratique associé est

$$E^2 - c_{\mathcal{F}}^2 P^2.$$

Dans le repère comobile d'une solution localisée massique,

$$P_0 = 0,$$

donc

$$E^2 - c_{\mathcal{F}}^2 P^2 = E_0^2.$$

Il vient

$$\boxed{E(u)^2 = E_0^2 + c_{\mathcal{F}}^2 P(u)^2.} \tag{7.10}$$

Fréquence propre et fréquence observée d'une branche massive. Pour une phase comobile

$$\varphi(\xi,\tau)=\omega_0\tau,$$

le passage au repère fixe donne

$$\varphi(s,t)=\omega_0\Gamma_{\mathcal{F}}\left(t-\frac{u}{c_{\mathcal{F}}^2}s\right)=\omega_{\mathrm{obs}}t-ks.$$

Ainsi

$$\boxed{\omega_{\mathrm{obs}}=\Gamma_{\mathcal{F}}\omega_0,\qquad k=\Gamma_{\mathcal{F}}\frac{u}{c_{\mathcal{F}}^2}\omega_0.} \tag{7.11}$$

Il en résulte

$$\boxed{\omega_{\mathrm{obs}}^2-c_{\mathcal{F}}^2k^2=\omega_0^2.} \tag{7.12}$$

Cette reconstruction suppose l'existence d'une fréquence propre comobile ω_0. Elle ne s'applique pas aux modes non massifs, qui ne possèdent pas de repère comobile et relèvent d'une dispersion propre de type

$$\omega^2-c_t^2k^2=0.$$

7.2 Critère général de compatibilité radiale

Objet. Une solution massique localisée peut porter un cœur tangent se propageant avec la vitesse caractéristique c_t, tout en excitant une réponse radiale gouvernée par le coefficient de gradient radial κ_r et par le terme local μ_2. La compatibilité d'une gaine radiale strictement comobile doit donc être vérifiée séparément de la cinématique du cœur.

Équation radiale linéarisée. Au rang linéaire en réponse radiale autour du cœur, la gaine r associée à une famille massique $\mathcal{F}$ vérifie une équation de la forme

$$\boxed{\rho\,\partial_t^2r-T\kappa_r\,\partial_s^2r+\mu_2r=S_{\mathcal{F}}(s,t).} \tag{7.13}$$

La source $S_{\mathcal{F}}$ dépend de la famille considérée, mais l'opérateur radial de gauche est commun. On introduit

$$\boxed{c_r^2:=\frac{T\kappa_r}{\rho}=\kappa_rc_t^2,\qquad \omega_r^2:=\frac{\mu_2}{\rho}=c_t^2\kappa_\mu.} \tag{7.14}$$

Le coefficient κ_r fixe donc la vitesse radiale, tandis que $\kappa_\mu=\mu_2/T$ fixe le gap radial et la portée de la réponse.

Proposition 7.3 (Critère de gaine comobile localisée)**.** *Soit une famille massique $\mathcal{F}$ dont le cœur se déplace uniformément à la vitesse v, et supposons que la source radiale soit localisée et comobile :*

$$S_{\mathcal{F}}(s,t)=S_{\mathcal{F}}(\xi),\qquad \xi=s-vt.$$

Alors une gaine radiale strictement comobile et localisée existe au rang linéaire si

$$|v|<c_r.$$

Dans ce cas, la réponse radiale est donnée en Fourier par

$$\boxed{\widehat{R}(k)=\frac{\widehat{S}_{\mathcal{F}}(k)}{\omega_r^2+(c_r^2-v^2)k^2}.} \tag{7.15}$$

Si $|v|\geq c_r$, l'opérateur radial n'est plus elliptique dans la coordonnée comobile. Une gaine Yukawa strictement comobile ne constitue alors plus une fermeture localisée au même rang.

Démonstration. On cherche une réponse comobile $r(s,t) = R(\xi)$ avec $\xi = s - vt$. On a

$$\partial_t^2 r = v^2 R''(\xi), \qquad \partial_s^2 r = R''(\xi).$$

L'équation (7.13) devient donc

$$\rho v^2 R'' - T\kappa_r R'' + \mu_2 R = S_{\mathcal{F}}(\xi).$$

En divisant par ρ, et en utilisant (7.14), on obtient

$$-(c_r^2 - v^2)R'' + \omega_r^2 R = \frac{S_{\mathcal{F}}(\xi)}{\rho}.$$

La transformée de Fourier donne

$$\left[\omega_r^2 + (c_r^2 - v^2)k^2\right] \widehat{R}(k) = \frac{\widehat{S}_{\mathcal{F}}(k)}{\rho}.$$

En absorbant le facteur $1/\rho$ dans la définition de la source réduite, on obtient (7.15). Lorsque $|v| < c_r$, le dénominateur est strictement positif pour tout k, et la réponse est de type Yukawa/localisée. Lorsque $|v| \geq c_r$, ce caractère elliptique comobile est perdu ; la fermeture strictement comobile de gaine n'est plus une solution localisée du même type. □

7.3 Application canonique : Bump 2DOF

Le bump 2DOF possède un cœur tangent localisé de profil

$$A(\xi) = A_0 \operatorname{sech}\Big(\frac{\xi}{\lambda_{\text{bump}}}\Big).$$

La source radiale associée au cœur est localisée dans la même coordonnée comobile. Elle entre donc dans le cadre du critère (7.3). La gaine strictement comobile du bump est localisée pour

$$|v| < c_r, \qquad c_r^2 = \kappa_r c_t^2.$$

Dans ce régime, la réponse radiale est de type Yukawa dans le repère comobile. Pour $|v| \geq c_r$, la fermeture sous forme d'une gaine symétrique strictement comobile n'est plus elliptique. Le cœur tangent peut rester décrit comme cœur mobile, mais la réponse radiale relève alors d'une composante causale non strictement attachée à un profil unique $R(s - vt)$.

Le Bump 2DOF fournit ainsi le cas canonique où le cœur massique, la source radiale localisée et la gaine comobile sont vérifiés explicitement.

7.4 Application 2DOF transverse : NSL 2DOF

La NSL 2DOF possède un cœur à deux jambes tangentielles orthogonales. Par construction,

$$|\vec{u}_{\text{NSL}}(s,\vartheta,t)|^2 = A(s)^2,$$

de sorte que la source quadratique alimentant l'équation radiale est zonale et localisée dès que le profil de cœur A est localisé. Le profil de cœur étant de type

$$A(\xi) = A_0 \operatorname{sech}\Big(\frac{\xi}{\lambda_{\text{NSL}}}\Big),$$

la source radiale comobile de la NSL entre elle aussi dans le cadre du critère (7.3). La gaine strictement comobile est donc localisée pour

$$|v| < c_r, \qquad c_r^2 = \kappa_r c_t^2.$$

La différence avec le bump n'est pas portée par l'opérateur radial commun, mais par la source $S_{\mathcal{F}}$, qui reflète ici la structure à deux jambes tangentielles. Le critère de localisation de la gaine reste inchangé.

7.5 Portée du critère pour les familles suivantes

Le résultat ne s'applique pas à toute solution HSM par simple appartenance à la théorie. Il s'applique aux branches localisées massiques qui possèdent :

$$E_0 > 0, \qquad P_0 = 0$$

dans un repère comobile, ainsi qu'une réduction longitudinale hyperbolique locale du type (7.1). Lorsque la branche porte une réponse radiale de gaine, il faut en outre vérifier que la source radiale est localisée dans la coordonnée comobile.

Les familles massiques suivantes doivent donc vérifier localement les hypothèses du critère dans leur propre chapitre. Les modes non massifs et les réductions quasi-c_t relèvent de dispersions propres distinctes.

Chapitre 8

Solutions 2DOF quasi-c_t bosoniques sur $\mathbb{S}^3$

Définition 8.1 (Bosonique au sens HSM)**.** Dans ce manuscrit, on qualifie de *bosonique* toute solution dont le spin géométrique total vaut $\boldsymbol{s_g = 1}$, indépendamment du nombre de degrés de liberté (2DOF, 3DOF, ...) et du canal considéré. Cette terminologie est interne à HSM : elle ne présuppose ni statistique d'échange quantique, ni structure QFT.

Introduction

Nous étudions une famille de solutions 2DOF se propageant au voisinage de la vitesse limite c_t du réseau. Dans le coeur quasi–plan sur $\mathbb{S}^3$, cette branche correspond au régime *strictement gapless au rang LO* : la fermeture locale ne porte alors que la dispersion de longue onde et la non–linéarité cubique transportée par la courbure longitudinale.

Après réduction multiple–échelles près de $v = c_t$, l'enveloppe scalaire lente obéit à une équation locale de type mKdV, admettant des pulses localisés se propageant avec $v \simeq c_t$. Ces excitations sont bosoniques [1] au sens HSM, c'est-à-dire de spin géométrique total

$$s_g = 1.$$

On notera ici α l'angle de polarisation entre le plan tangent et une éventuelle composante de biais radial. La famille considérée correspond au cas

$$\alpha = \frac{\pi}{2},$$

c'est-à-dire à une polarisation purement tangentielle et à l'absence de biais radial au rang meneur.

8.1 Réduction multiple–échelles près de $v = c_t$

La réduction multiple–échelles s'effectue à partir de la projection tangentielle locale des équations d'Euler–Lagrange sur le mode transverse normalisé de la branche. Au premier ordre dispersif et au premier ordre non linéaire conservés, cette projection prend la forme

$$A_{tt} - c_t^2 A_{ss} - c_t^2 \, b_\beta \, (A^3)_{ss} + \delta \, A_{ssss} = 0, \qquad 0 < \delta \ll 1. \tag{8.1}$$

Les deux coefficients de fermeture sont les projections réduites

$$\boxed{b_\beta := \frac{\langle e_{\tan}, \mathcal{N}_3(e_{\tan}, e_{\tan}, e_{\tan})\rangle_\perp}{\langle e_{\tan}, e_{\tan}\rangle_\perp}, \qquad d_\delta := \frac{\langle e_{\tan}, \mathcal{D}_4 e_{\tan}\rangle_\perp}{\ell_0^2 \langle e_{\tan}, e_{\tan}\rangle_\perp}.} \tag{8.2}$$

1. Au sens de la Def. 8.1 : $s_g = 1$.

Ici $e_{\tan}$ est le mode transverse normalisé, $\mathcal{N}_3$ est la partie cubique de l'opérateur d'Euler–Lagrange tangent projetée sur la branche, et $\mathcal{D}_4$ est la correction dispersive quartique issue du développement longue onde du même opérateur. Ces objets sont des opérateurs réduits de la théorie de cœur ; ils ne sont pas des paramètres numériques ajoutés.

Unités et fermeture des coefficients. A est adimensionnée ; s est en m, t en s ; c_t en $\mathrm{m\,s^{-1}}$. On a

$$[b_\beta] = 1, \qquad [\delta] = \mathrm{m}^4\,\mathrm{s}^{-2}.$$

La dispersion est paramétrée par

$$\delta = d_\delta\, c_t^2\, \ell_0^2,$$

avec d_δ défini par (8.2). Le coefficient b_β est défini par la même équation. Les deux coefficients sont donc des nombres purs de projection de cœur.

Régime gapless au LO. La famille quasi-c_t étudiée ici est, au rang meneur, sans terme de gap effectif. Si un terme linéaire résiduel est conservé, il doit être repoussé à un ordre supérieur ; il ne participe donc pas à la fermeture locale mKdV au LO.

Ansatz quasi-c_t. On introduit

$$X = \varepsilon(s - c_t t), \qquad T = \varepsilon^3 t,$$

et l'ansatz

$$A(s,t) = \varepsilon\, U(X,T) + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

Ce choix d'échelle est celui qui équilibre correctement, au premier ordre non trivial, la modulation convective, la dispersion quartique et la non–linéarité cubique dérivée.

Hiérarchie des dérivées. On a

$$\partial_t = -\varepsilon c_t\, \partial_X + \varepsilon^3 \partial_T, \qquad \partial_s = \varepsilon\, \partial_X.$$

Il vient donc

$$A_{tt} - c_t^2 A_{ss} = -\,2\varepsilon^5 c_t\, U_{XT} + \mathcal{O}(\varepsilon^7),$$

tandis que

$$(A^3)_{ss} = \varepsilon^5\, (U^3)_{XX} + \mathcal{O}(\varepsilon^7), \qquad A_{ssss} = \varepsilon^5\, U_{XXXX} + \mathcal{O}(\varepsilon^7).$$

En reportant dans (8.1) et en divisant par ε^5, on obtient au premier ordre non trivial

$$-\,2c_t\, U_{XT} \;-\; c_t^2\, b_\beta\, (U^3)_{XX} \;+\; \delta\, U_{XXXX} = 0. \tag{8.3}$$

Passage local à la mKdV. Pour une onde localisée, on impose la constante d'intégration nulle dans la variable rapide X. En intégrant (8.3) une fois en X, on obtient

$$-\,2c_t\, U_T \;-\; c_t^2\, b_\beta\, (U^3)_X \;+\; \delta\, U_{XXX} = 0.$$

Comme

$$(U^3)_X = 3U^2 U_X,$$

il vient finalement

$$U_T + \tilde{\alpha}\, U^2 U_X + \kappa\, U_{XXX} = 0, \tag{8.4}$$

avec

$$\tilde{\alpha} = \frac{3}{2}\, c_t\, b_\beta, \qquad \kappa = -\,\frac{\delta}{2c_t}. \tag{8.5}$$

Fermeture des coefficients. Avec $\delta = d_\delta c_t^2 \ell_0^2$, on a

$$\kappa = -\frac{d_\delta}{2}\, c_t\, \ell_0^2, \qquad \tilde{\alpha} = \frac{3}{2}\, c_t\, b_\beta.$$

Ces deux coefficients sont dimensionnellement cohérents :

$$[\kappa] = \mathrm{m}^3\,\mathrm{s}^{-1}, \qquad [\tilde{\alpha}] = \mathrm{m}\,\mathrm{s}^{-1}.$$

Au besoin, un re-étalonnage canonique de (X, T, U) met (8.4) sous forme normalisée sans introduire de nouvelle constante.

Remarque sur un gap résiduel. Si l'on conserve un terme linéaire résiduel

$$\Omega_{\mathrm{lin}}^2 A, \qquad \Omega_{\mathrm{lin}}^2 = \varepsilon^4 \sigma,$$

alors la fermeture au premier ordre corrigé n'est plus une mKdV locale stricte, mais une mKdV munie d'une correction non locale proportionnelle à $\partial_X^{-1} U$. La forme locale (8.4) correspond donc au régime strictement gapless au rang LO.

8.2 Soliton d'enveloppe et champ vectoriel

Dans le régime focalisant

$$\frac{\tilde{\alpha}}{\kappa} > 0,$$

l'équation (8.4) admet le soliton standard

$$U(X,T) = U_0\, \mathrm{sech}\big(\Lambda_{\mathrm{sol}}[X - c_{\mathrm{sol}}\, T]\big), \qquad \Lambda_{\mathrm{sol}} = U_0 \sqrt{\frac{\tilde{\alpha}}{6\kappa}}, \qquad c_{\mathrm{sol}} = \frac{\tilde{\alpha} U_0^2}{6}. \tag{8.6}$$

Condition de signe. Dans les conventions retenues ici, on impose

$$\delta > 0, \qquad \kappa = -\frac{\delta}{2c_t} < 0.$$

L'existence d'un soliton réel localisé de la forme (8.6) exige alors

$$\frac{\tilde{\alpha}}{\kappa} > 0,$$

d'où nécessairement

$$\tilde{\alpha} < 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad b_\beta < 0.$$

Cette inégalité est la condition de focalisation de la branche quasi-c_t 2DOF dans les conventions présentes.

L'enveloppe physique associée s'écrit

$$A_{\mathrm{env}}(s,t) = \varepsilon\, U(\varepsilon(s - c_t t), \varepsilon^3 t). \tag{8.7}$$

Autrement dit, la vitesse physique de la crête vaut

$$c_t + \varepsilon^2 c_{\mathrm{sol}},$$

ce qui confirme que la branche considérée est bien quasi-c_t.

Phase de polarisation et fréquence observée. Le champ transverse tangent se décrit par

$$\vec{u}_\perp(s,t) = A_{\mathrm{env}}(s,t)\,\big[\cos\Phi(s,t)\,\vec{e}_1 + \sin\Phi(s,t)\,\vec{e}_2\big], \qquad \omega := \partial_t\Phi(s,t). \tag{8.8}$$

Une jauge affine $\Phi = \Omega t + qs$ est équivalente à la jauge comobile

$$\Phi = (\Omega - vq)t + q(s - vt).$$

Seule compte la fréquence physique $\omega = \partial_t\Phi$. Dans la branche quasi-c_t bosonique, on choisit la jauge advectée $\omega = \mu := vq$ (texture transportée), sans effet sur l'état physique ni sur les observables : seules les dérivées de Φ interviennent (fréquence ω, vecteur d'onde q).

8.3 Invariants : énergie, amplitude de spin et nombre de spin (quasi-c_t 2DOF)

Cadre géométrique et mesure. Au voisinage du cœur quasi–plan, on paramètre $\mathbb{S}^3$ par la coordonnée d'arc s et les 2-sphères transverses $S^2(s)$. La mesure naturelle se factorise

$$dS \;=\; dS_{S^2(s)}\,ds \;=\; \underbrace{4\pi R_0^2 \sin^2\!\Big(\frac{s}{R_0}\Big)}_{=:\,\mathcal{A}(s)}\,ds,$$

où $\mathcal{A}(s)$ est l'aire de $S^2(s)$ (au LO : $\mathcal{A}(s) \simeq 4\pi s^2$ si $s \ll R_0$).

Décomposition en hélicités. On choisit une base tangentielle orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ sur $S^2(s)$ et l'on pose

$$\vec{e}_\pm \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 \pm i\,\vec{e}_2), \qquad \vec{u}_\perp(s,t) \;=\; A_+(s,t)\,\vec{e}_+ \;+\; A_-(s,t)\,\vec{e}_-.$$

Les amplitudes $A_\pm$ sont adimensionnées.

Bilans LO (énergie et action de spin). Après moyenne rapide dans la branche quasi-c_t, on obtient

$$E \;=\; \rho\,\omega^2 \int_{\mathbb{S}^3} (|A_+|^2 + |A_-|^2)\,dS, \qquad S_{\mathrm{sgn}} \;=\; \rho\,\omega \int_{\mathbb{S}^3} (|A_+|^2 - |A_-|^2)\,dS, \tag{8.9}$$

et la norme d'action de spin

$$|S| \;:=\; \rho\,\omega \int_{\mathbb{S}^3} (|A_+|^2 + |A_-|^2)\,dS. \tag{8.10}$$

Par (8.9)–(8.10), on a toujours

$$\boxed{E/\omega = |S|}.$$

Loi universelle angle–action. Dans le cadre commun adopté pour les solutions 2DOF, la variable d'angle est la même et l'on impose

$$\boxed{\mathcal{J} = \frac{E}{\omega} = h_{\mathrm{eff}}} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{E = h_{\mathrm{eff}}\,\omega, \qquad |S| = h_{\mathrm{eff}}}.$$

Ainsi, $|S| = h_{\mathrm{eff}}$ quel que soit le mélange d'hélicités ; seul S_{sgn} dépend de la polarisation ($S_{\mathrm{sgn}} = \pm h_{\mathrm{eff}}$ pour une polarisation circulaire pure, $S_{\mathrm{sgn}} = 0$ pour une polarisation linéaire).

Nombre de spin géométrique (lecture de Berry). En paramétrant la sphère des directions par (Θ, Φ) et la base tangentielle $(\vec{e}_\Theta, \vec{e}_\Phi)$, une polarisation circulaire s'écrit

$$\vec{u}_+ \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_\Theta + i\,\vec{e}_\Phi).$$

La connexion et la courbure de Berry associées sont

$$\mathcal{A}_{\mathrm{B}} \;=\; i\,\vec{u}_+^{\,\dagger}\cdot d\vec{u}_+ \;=\; -\,(1-\cos\Theta)\,d\Phi, \qquad \mathcal{F}_{\mathrm{B}} \;=\; d\mathcal{A}_{\mathrm{B}} \;=\; -\sin\Theta\, d\Theta\wedge d\Phi.$$

Pour une boucle fermée C entourant l'aire solide $\Omega[C]$,

$$\Phi_{\mathrm{geom}}[C] \;=\; \oint_C \mathcal{A}_{\mathrm{B}} \;=\; \iint_{\Sigma(C)} \mathcal{F}_{\mathrm{B}} \;=\; -\Omega[C].$$

Lecture du spin géométrique. La branche quasi-c_t 2DOF bosonique porte deux polarisations tangentielles indépendantes en quadrature, d'où

$$N_{\mathrm{pol}} = 2.$$

Au rang meneur, l'enroulement fondamental vaut

$$w = 1.$$

Le comptage géométrique commun donne alors

$$s_g = \frac{wN_{\mathrm{pol}}}{2} = \frac{1\times 2}{2} = 1.$$

On obtient donc pour cette famille

$$\boxed{s_g = 1, \qquad |S| = h_{\mathrm{eff}}.}$$

Le signe du spin est porté par la polarisation hélicoïdale :

$$S_{\mathrm{sgn}} = +h_{\mathrm{eff}} \text{ pour une hélicité pure “+”}, \qquad S_{\mathrm{sgn}} = -h_{\mathrm{eff}} \text{ pour une hélicité pure “−”},$$

tandis qu'un mélange linéaire peut donner

$$|S_{\mathrm{sgn}}| < h_{\mathrm{eff}}.$$

Cette valeur est cohérente avec la lecture locale issue du flux de Berry :

$$-\lim_{\delta\Omega\to 0}\frac{\delta\Phi_{\mathrm{geom}}}{\delta\Omega} \;=\; 1,$$

le signe dépendant de la convention d'orientation.

Constante d'action et normalisation globale sur $\mathbb{S}^3$. Dans la branche quasi-c_t 2DOF, la loi universelle

$$\frac{E}{\omega} = |S| = h_{\mathrm{eff}}$$

fixe exactement la normalisation globale de l'enveloppe. En effet, comme

$$|S| = \rho\,\omega\int_{\mathbb{S}^3} A_{\mathrm{env}}^2\, dS,$$

on obtient la condition de fermeture

$$\boxed{h_{\text{eff}} = \rho\,\omega \int_{\mathbb{S}^3} A_{\text{env}}^2\, dS.} \tag{8.11}$$

Au rang LO (tube mince / quasi–plan), cela devient

$$h_{\text{eff}} = \rho\,\omega \int_{\mathbb{R}} A_{\text{env}}^2(s,t)\,\mathcal{A}(s)\,ds, \qquad \mathcal{A}(s) = 4\pi R_0^2 \sin^2\Big(\frac{s}{R_0}\Big).$$

Avec

$$A_{\text{env}}(s,t) = \varepsilon\, U(X,T),$$

cette relation fixe directement la normalisation de U sans introduire de constante externe supplémentaire.

8.4 Raccord cœur–extérieur et sélection fréquentielle sur $\mathbb{S}^3$

Dans la queue du soliton (8.6), la log–dérivée intérieure au bord $s = s_c$ vaut

$$\Lambda_{\text{int}}^{(\text{sel})} = \pm\,\frac{1}{\lambda_{\text{env}}}, \qquad \lambda_{\text{env}} = \frac{1}{\varepsilon\,\Lambda_{\text{sol}}} = \frac{1}{\varepsilon\,U_0}\sqrt{\frac{6\kappa}{\tilde{\alpha}}}.$$

Fermeture EBK de la pente intérieure. La loi universelle angle–action impose

$$\mathcal{J} = \frac{E}{\omega} = h_{\text{eff}}.$$

En réinjectant la fermeture EBK de l'enveloppe, on obtient immédiatement

$$\boxed{\Lambda_{\text{int}}^{(\text{sel})} = \pm\,\frac{1}{\lambda_{\text{env}}} = \pm\,\frac{h_{\text{eff}}}{48\pi\,\rho\,\kappa\,R_0^2}\,\frac{\tilde{\alpha}}{\omega}} \qquad \text{(LO)}. \tag{8.12}$$

Ainsi, aucun paramètre d'amplitude libre n'entre dans la condition de raccord au leading order.

À l'extérieur ($s > s_c$), l'enveloppe moyenne satisfait l'équation zonale de Helmholtz sur $\mathbb{S}^3$:

$$\frac{1}{\sin^2\chi}\,\partial_\chi(\sin^2\chi\,\partial_\chi A) + \Omega^2 R_0^2\, A = 0, \qquad \chi = \frac{s}{R_0}, \qquad \Omega := \frac{\omega}{c_t}.$$

Les solutions globalement régulières sont proportionnelles aux Gegenbauer zonaux $C_n^{(1)}(\cos\chi)$, avec la dispersion

$$n(n+2) = \Omega^2 R_0^2 = \Big(\frac{\omega R_0}{c_t}\Big)^2, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Identité zonale ($\lambda = 1$). Sur $\mathbb{S}^3$, on a

$$C_n^{(1)}(\cos\chi) = \frac{\sin\big((n+1)\chi\big)}{\sin\chi}, \tag{8.13}$$

d'où, par dérivation, la log–dérivée extérieure au bord $\chi_c = s_c/R_0$:

$$\Lambda_{\text{ext}}(n; s_c) = \frac{1}{R_0}\,\frac{\partial_\chi A}{A}\Big|_{\chi_c} = \frac{1}{R_0}\Big[(n+1)\cot\big((n+1)\chi_c\big) - \cot\chi_c\Big].$$

La condition de raccord C^1 discrétise alors les valeurs admissibles de ω :

$$\boxed{\Lambda_{\text{int}}^{(\text{sel})} = \Lambda_{\text{ext}}(n; s_c), \qquad n(n+2) = \Big(\frac{\omega R_0}{c_t}\Big)^2.} \tag{8.14}$$

Choix de s_c et robustesse LO. Le point s_c est choisi dans la zone exponentielle de décroissance de l'enveloppe, où la log–dérivée intérieure est constante au LO. Le choix précis du seuil $A(s_c)/A(0)$ n'introduit que des corrections subdominantes $\mathcal{O}(e^{-k})$; la sélection fréquentielle (8.14) est donc robuste au LO.

Ainsi, pour un rayon fini R_0, le spectre est discret, avec un espacement caractéristique de l'ordre de c_t/R_0 ; il devient quasi–continu lorsque $R_0 \to \infty$.

8.5 Amplitude–largeur et normalisation

Le soliton (8.6) impose les relations

$$\lambda_{\text{env}} := \frac{1}{\varepsilon\,\Lambda_{\text{sol}}} = \frac{1}{\varepsilon\,U_0}\sqrt{\frac{6\kappa}{\tilde{\alpha}}}, \qquad A_0 := A_{\text{env}}(0,0) = \varepsilon\,U_0, \qquad c_{\text{sol}} = \frac{\tilde{\alpha}U_0^2}{6}.$$

Il en découle l'échange amplitude–largeur, en variables physiques s,

$$A_0\,\lambda_{\text{env}} = \sqrt{\frac{6\kappa}{\tilde{\alpha}}}, \qquad A_0^2\,\lambda_{\text{env}} = \frac{6\kappa}{\tilde{\alpha}}\,\frac{1}{\lambda_{\text{env}}}.$$

Normalisation par l'action (EBK absorbée). Contrairement au cas bump/NSL, il n'y a pas ici de fermeture radiale imposant

$$A_0^2\lambda_{\text{env}} = \text{constante}$$

au LO (branche $\alpha = \pi/2$, sans biais radial). La normalisation globale se fait donc via la loi universelle angle–action :

$$\mathcal{J} = \frac{E}{\omega} = h_{\text{eff}}, \qquad E = \rho\,\omega^2 \int_{\mathbb{S}^3} A_{\text{env}}^2\,dS.$$

Au LO (tube mince, $\mathcal{A}(s) \simeq 4\pi R_0^2$ et $\int_{\mathbb{R}} \operatorname{sech}^2(y/\lambda_{\text{env}})\,dy = 2\lambda_{\text{env}}$), on obtient

$$E = 8\pi\,\rho\,R_0^2\,\omega^2\,A_0^2\,\lambda_{\text{env}}.$$

En utilisant l'identité

$$A_0^2\,\lambda_{\text{env}} = \frac{6\kappa}{\tilde{\alpha}}\,\frac{1}{\lambda_{\text{env}}},$$

la loi angle–action donne immédiatement la fermeture explicite

$$\boxed{\lambda_{\text{env}}(\omega) = \frac{48\pi\,\rho\,\kappa\,R_0^2}{h_{\text{eff}}}\,\frac{\omega}{\tilde{\alpha}}}, \qquad \boxed{\frac{1}{\lambda_{\text{env}}(\omega)} = \frac{h_{\text{eff}}}{48\pi\,\rho\,\kappa\,R_0^2}\,\frac{\tilde{\alpha}}{\omega}}. \tag{8.15}$$

Aucune constante libre ne subsiste : κ et $\tilde{\alpha}$ sont entièrement exprimées en termes de constantes HSM (cf. (8.4)).

8.6 Comparaison avec le bump : h_{eff} commun

Au LO, dans toutes les branches 2DOF considérées, on a

$$\mathcal{J} = \frac{E}{\omega} = h_{\text{eff}},$$

avec la même mesure volumique sur $\mathbb{S}^3$. En particulier,

$$h_{\text{eff}}^{\text{bump}} = h_{\text{eff}}^{\text{quasi-c}_\text{t}} =: \; h_{\text{eff}},$$

ce qui unifie la constante d'action effective des branches 2DOF considérées sur $\mathbb{S}^3$.

8.7 Interprétation

La solution quasi-c_t 2DOF réalise, au sens HSM, une branche bosonique à vitesse limite : spin géométrique

$$s_g = 1,$$

deux hélicités $\pm$, et loi spectrale absorbée

$$\boxed{E = h_{\text{eff}}\,\omega}.$$

La polarisation linéaire correspond aux superpositions à parts égales des deux hélicités (et vérifie alors $S_{\text{sgn}} = 0$, tandis que $|S| = h_{\text{eff}}$).

8.8 Dictionnaire mécanique transverse de l'onde quasi-c_t

Cadre et phase de polarisation. Dans le cœur quasi–plat ($\lambda_{\text{env}} \ll R_0$), on écrit le déplacement transverse sous la forme

$$\vec{u}_\perp(s,t) = A_{\text{env}}(s,t)\,\big[\cos\Phi(s,t)\,\vec{e}_1 + \sin\Phi(s,t)\,\vec{e}_2\big],$$

avec

$$A_{\text{env}}(s,t) = \varepsilon\,U(X,T), \qquad X = \varepsilon(s - c_t t), \qquad T = \varepsilon^3 t, \tag{8.16}$$

où U satisfait la mKdV réduite (8.4).

La phase de polarisation généralisée est prise sous la forme

$$\Phi(s,t) = \Omega\,t, \qquad \Omega = \begin{cases} \omega_c & \text{(branche précessionnelle : précession interne),} \\ \mu & \text{(branche quasi-}c_t\text{ : fréquence de transport).} \end{cases}$$

Grandeurs mécaniques normalisées. On introduit deux grandeurs vectorielles normalisées, construites uniquement à partir du déplacement transverse :

$$\boxed{\mathbf{P}_\perp := \sqrt{\rho}\,\partial_t\vec{u}_\perp, \qquad \mathbf{Q}_\perp := -\sqrt{\rho}\,(\vec{t}\times\partial_s\vec{u}_\perp), \qquad \vec{t} := \text{vecteur unitaire de propagation.}} \tag{8.17}$$

Ces grandeurs ne sont pas introduites comme champs de couplage. Elles constituent seulement une réécriture mécanique normalisée de la cinématique transverse.

Pour une onde locale se propageant à c_t, on obtient

$$\mathbf{P}_\perp \perp \mathbf{Q}_\perp \perp \vec{t}, \qquad |\mathbf{P}_\perp| = c_t\,|\mathbf{Q}_\perp| \quad \text{(relation d'onde LO : } \partial_t\vec{u}_\perp = -c_t\,\partial_s\vec{u}_\perp).$$

Densité d'énergie et flux mécaniques. La densité d'énergie mécanique moyenne rapide et le flux mécanique associé s'écrivent

$$\boxed{\mathcal{E}_\perp = \tfrac{1}{2}\Big(|\mathbf{P}_\perp|^2 + c_t^2|\mathbf{Q}_\perp|^2\Big), \qquad \mathbf{F}_\perp = c_t^2\,\mathbf{P}_\perp\times\mathbf{Q}_\perp, \qquad \partial_t\mathcal{E}_\perp + \nabla\cdot\mathbf{F}_\perp \simeq 0.}$$

Cette écriture coïncide avec

$$\tfrac{1}{2}\rho\big(|\partial_t\vec{u}_\perp|^2 + c_t^2|\partial_s\vec{u}_\perp|^2\big)$$

et avec le flux mécanique exact

$$-\,T\,(\partial_t\vec{u}_\perp\cdot\partial_s\vec{u}_\perp)\,\vec{t}, \qquad T = \rho c_t^2.$$

Identités cinématiques au rang dominant. En négligeant les corrections d'enveloppe $\mathcal{O}(\varepsilon)$ et de courbure $\mathcal{O}(\lambda_{\rm env}/R_0)$, la paire mécanique $(\mathbf{P}_\perp, \mathbf{Q}_\perp)$ vérifie

$$\boxed{\begin{aligned} &\nabla\cdot\mathbf{P}_\perp \;\approx\; 0, && \nabla\cdot\mathbf{Q}_\perp \;\approx\; 0,\\ &\partial_t\mathbf{Q}_\perp + \nabla\times\mathbf{P}_\perp \;\approx\; 0, && \partial_t\mathbf{P}_\perp - c_t^2\nabla\times\mathbf{Q}_\perp \;\approx\; 0. \end{aligned}} \tag{8.18}$$

Ces identités sont seulement la forme vectorielle normalisée de l'équation d'onde transverse au rang LO. Elles ne constituent pas encore une identification à des champs de couplage.

Spin et fréquence pertinente. Avec la normalisation d'action absorbée, on a

$$\boxed{|S| = \frac{E_{\rm tot}}{\Omega}, \qquad \Omega = \omega_c \text{ (précessionnelle)} \quad \text{ou} \quad \Omega = \mu \text{ (branche quasi-}c_t\text{)}.}$$

Dans la branche quasi-c_t, l'angle–action universel donne

$$E_{\rm tot} = h_{\rm eff}\,\mu \qquad\Longrightarrow\qquad |S| = h_{\rm eff},$$

indépendamment du mélange d'hélicités (le signe $S_{\rm sgn}$ dépend de la polarisation).

Branche précessionnelle. La branche précessionnelle décrit un régime gappé de la même famille 2DOF lorsqu'une précession interne $\omega_c > 0$ est activée (brisure, bord, milieu). Dans le vide homogène isotrope, on a $\omega_c = 0$ et seule la branche quasi-c_t est réalisée.

Résumé

Nous obtenons une branche 2DOF bosonique quasi-c_t, purement tangentielle au rang LO ($\alpha = \pi/2$), sans terme de gap effectif meneur. Son enveloppe physique s'écrit

$$A_{\rm env}(s,t) = \varepsilon\,U(X,T), \qquad X = \varepsilon(s - c_t t), \qquad T = \varepsilon^3 t,$$

où U satisfait une mKdV locale de la forme

$$U_T + \tilde{\alpha}\,U^2 U_X + \kappa\,U_{XXX} = 0.$$

Cette branche porte deux hélicités $\pm$ et un spin géométrique

$$s_g = 1.$$

Avec la loi universelle angle–action,

$$E = h_{\rm eff}\,\omega, \qquad |S| = \frac{E}{\omega} = h_{\rm eff},$$

indépendamment du mélange d'hélicités.

Le soliton d'enveloppe fixe une largeur physique $\lambda_{\rm env}$ qui, après normalisation EBK, est entièrement fermée par

$$\lambda_{\rm env}(\omega) = \frac{48\pi\,\rho\,\kappa\,R_0^2}{h_{\rm eff}}\,\frac{\omega}{\tilde{\alpha}}, \qquad \frac{1}{\lambda_{\rm env}(\omega)} = \frac{h_{\rm eff}}{48\pi\,\rho\,\kappa\,R_0^2}\,\frac{\tilde{\alpha}}{\omega}.$$

La pente intérieure du raccord est donc fermée sans paramètre d'amplitude libre, et le raccord cœur–extérieur sur $\mathbb{S}^3$ discrétise les fréquences admissibles, avec un espacement caractéristique de l'ordre de c_t/R_0, quasi–continu lorsque $R_0 \to \infty$.

Les grandeurs mécaniques normalisées

$$\mathbf{P}_\perp = \sqrt{\rho}\,\partial_t \vec{u}_\perp, \qquad \mathbf{Q}_\perp = -\sqrt{\rho}\,(\vec{t}\times \partial_s \vec{u}_\perp)$$

vérifient, au premier ordre,

$$\mathbf{P}_\perp \perp \mathbf{Q}_\perp \perp \vec{t}, \qquad |\mathbf{P}_\perp| = c_t\,|\mathbf{Q}_\perp|.$$

Elles fournissent une écriture normalisée de la densité et du flux mécaniques,

$$\mathcal{E}_\perp = \tfrac{1}{2}(|\mathbf{P}_\perp|^2 + c_t^2|\mathbf{Q}_\perp|^2), \qquad \mathbf{F}_\perp = c_t^2\,\mathbf{P}_\perp \times \mathbf{Q}_\perp,$$

dans la réduction quasi–plate locale.

La constante d'action h_{eff} reste commune aux branches 2DOF considérées (bump, NSL, quasi-c_t). Une branche précessionnelle gappée ne peut apparaître qu'en présence d'une précession interne induite par des brisures ou des conditions de bord ; dans le vide homogène isotrope au LO, seule la branche quasi-c_t est réalisée.

Chapitre 9

Famille conique 3DOF sur $\mathbb{S}^3$

9.1 Idée générale

On enrichit les solutions 2DOF (mouvement circulaire plan dans le tangent) en introduisant un troisième degré de liberté interne : un biais radial constant qui rend la trajectoire conique. Localement, le déplacement n'est plus confiné au plan tangent : il possède une composante radiale fixe et une composante tangentielle en rotation uniforme. Ce schéma vaut pour toutes les familles oscillantes (bump, NSL, quasi-c_t). À $\alpha = \frac{\pi}{2}$, on retrouve exactement la version 2DOF.

Ansatz conique (cœur quasi–plan, commun). Dans une base locale $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$ et avec $s = R_0\psi$, on pose, pour l'enveloppe $A(s)$ localisée et la fréquence centrale ω,

$$\vec{u}(s,t) \;=\; A(s)\Big[\sin\alpha\big(\cos\omega t\,\vec{e}_\theta + \varsigma\,\sin\omega t\,\vec{e}_\phi\big) + \cos\alpha\,\vec{e}_r\Big], \qquad \varsigma = \pm 1, \quad \alpha \in [0, \tfrac{\pi}{2}]. \tag{9.1}$$

Le rayon conique est $A\sin\alpha$ (tangent) et le biais radial $A\cos\alpha$ (constant en phase). Cas limites : $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (2DOF pur, plan tangent) ; $\alpha = 0$ (dégénéré, pur radial statique).

EDO de profil (cœur, variable tangentielle). Au LO (tube mince $\lambda \ll R_0$), la réduction moyenne en temps de la dynamique locale de type KG cubique agit sur l'amplitude oscillante, c'est-à-dire sur la composante tangentielle

$$A_\parallel := A\,\sin\alpha.$$

On obtient alors la même EDO qu'en 2DOF, avec les mêmes coefficients :

$$A_\parallel'' = \Omega^2\,A_\parallel - \beta_{\text{eff}}\,A_\parallel^3, \qquad \Omega = \omega/c_t, \quad \beta_{\text{eff}} > 0. \tag{9.2}$$

Ici, β_{eff} désigne le coefficient cubique local de l'EDO de cœur de la branche conique 3DOF. Il ne doit pas être confondu avec le coefficient sans dimension b_β intervenant dans la réduction quasi-c_t, où la non-linéarité est portée par $(A^3)_{ss}$.

Nondimensionnalisation canonique (verrou β_{eff}). On pose $\xi = s/\lambda$, $A_\parallel(s) = A_{\parallel,0}\,U(\xi)$, avec

$$\lambda = \frac{c_t}{\omega} = \frac{1}{\Omega}.$$

L'EDO de cœur prend alors la forme canonique

$$U'' = U - \hat{\beta}\,U^3, \qquad \hat{\beta} > 0.$$

En variables originales,

$$A_\parallel'' = \Omega^2 A_\parallel - \beta_{\text{eff}} A_\parallel^3,$$

avec

$$\beta_{\text{eff}} = \frac{\hat{\beta}}{\lambda^2}.$$

Ainsi, β_{eff} est de dimension λ^{-2}, tandis que $\hat{\beta}$ est sans dimension. La solution canonique est

$$A_\parallel(s) = A_{\parallel,0}\,\operatorname{sech}(s/\lambda), \qquad \lambda = \frac{c_t}{\omega}, \qquad A_{\parallel,0} = \frac{\sqrt{2}\,\Omega}{\sqrt{\beta_{\text{eff}}}}.$$

Remarque. Si l'on écrit l'EDO sur l'amplitude totale A, alors

$$A_\parallel = A \sin\alpha$$

implique

$$A'' = \Omega^2 A - \beta_{\text{eff}} \sin^2\alpha\, A^3.$$

La forme (9.2) évite ce facteur en travaillant directement dans la variable physique excitée par l'oscillation.

9.2 Énergie, action effective (3DOF conique)

On adopte

$$c_t^2 = \frac{T}{\rho}, \qquad s = R_0\psi, \qquad J(s) = R_0^2 \sin^2\Big(\frac{s}{R_0}\Big).$$

La constante d'action h_{eff} est la même que dans les autres branches oscillantes du modèle, la dépendance conique étant portée par le facteur projectif

$$\sigma = \sin^2\alpha.$$

Proposition 9.1 (Action universelle 3DOF conique, LO)**.** *Pour l'ansatz conique* (9.1) *et au leading order (tube mince, $\lambda \ll R_0$), la moyenne temporelle sur la phase rapide donne*

$$\frac{E_0}{\omega} = h_{\text{eff}}\,\sigma + \frac{\Delta E_{\text{nl}}(\alpha)}{\omega}, \qquad \sigma = \sin^2\alpha,$$

où $\Delta E_{\text{nl}}(\alpha) = \mathcal{O}(A_0^2)$ regroupe les corrections non linéaires au premier ordre de faible amplitude. En particulier,

$$\boxed{h_{\text{eff}} = \frac{E_0}{\omega\,\sigma}}$$

au rang meneur, et pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (cas 2DOF) on retrouve

$$\frac{E_0}{\omega} = h_{\text{eff}}.$$

Esquisse. On écrit l'EDO sur

$$A_\parallel = A\sin\alpha,$$

qui est l'amplitude oscillante effectivement excitée. La moyenne temporelle de

$$|\partial_t \vec{u}|^2$$

sur une période rapide donne

$$\langle |\partial_t \vec{u}|^2 \rangle = \omega^2 A^2 \sin^2\alpha,$$

d'où la dépendance en $\sigma = \sin^2\alpha$ dans E/ω. Dans la forme absorbée, le niveau spectral éventuel est porté par $\omega(q)$, tandis que la loi d'action reste

$$\mathcal{J} = \frac{E_0}{\omega} = h_{\text{eff}}\,\sigma$$

au LO.

9.2.1 Justification EBK (3DOF conique) : même structure rapide que 2DOF

Lemme technique (premier intégral sur $A_\parallel$). Posons

$$A_\parallel := A\sin\alpha, \qquad \sigma := \sin^2\alpha, \qquad c_t^2 = \frac{T}{\rho}, \qquad \gamma_{nl} := 2T\,\beta_{\text{eff}}.$$

L'EDO de cœur au LO

$$A_\parallel'' = \Omega^2 A_\parallel - \beta_{\text{eff}} A_\parallel^3, \qquad \Omega = \omega/c_t, \qquad \beta_{\text{eff}} > 0,$$

est multipliée par $A_\parallel'$ puis intégrée une fois. En imposant la constante d'intégration nulle pour le profil localisé, on obtient le premier intégral

$$\frac{T}{2}\,(A_\parallel')^2 = \frac{\rho}{2}\,\omega^2 A_\parallel^2 - \frac{\gamma_{nl}}{4}\,A_\parallel^4.$$

Comme

$$A_\parallel = A\sin\alpha, \qquad A_\parallel' = A'\sin\alpha,$$

cela donne

$$T\,(A')^2\,\sigma = \rho\,\omega^2\,A^2\,\sigma - \frac{\gamma_{nl}}{2}\,A^4\,\sigma^2.$$

Le coefficient β_{eff} est le coefficient cubique local de l'EDO de cœur défini dans la nondimensionnalisation canonique 9.1. Sa positivité est la condition de focalisation du profil canonique sech.

La partie oscillante de l'énergie moyenne se réécrit alors sous la forme

$$\frac{E_0}{\omega} = h_{\text{eff}}\,\sigma + \frac{\Delta E_{\text{nl}}(\alpha)}{\omega},$$

où $\Delta E_{\text{nl}}(\alpha)$ regroupe les corrections quartiques résiduelles, de taille $\mathcal{O}(A_0^2)$, et s'annule en particulier lorsque $\sigma = 1$ (retour au cas 2DOF pur). On obtient donc, au rang meneur,

$$\frac{E_0}{\omega} = h_{\text{eff}}\,\sigma.$$

□

Proposition 9.2 (EBK 3DOF conique : même structure rapide que 2DOF au LO)**.** *Sous réduction cœur–gaine (tube mince $\lambda \ll R_0$, pente faible), biais conique constant $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}]$, flux nul aux pôles et régularité centrale, le cycle rapide tangent a la même topologie et le même comptage de caustiques qu'en 2DOF. L'indice de Maslov μ est donc inchangé au LO, et la loi d'action prend la forme*

$$\mathcal{J} = \frac{E_0}{\omega} = h_{\text{eff}}\,\sigma, \qquad \sigma = \sin^2\alpha,$$

tandis que le niveau spectral éventuel est porté par la fréquence projetée $\omega(q)$. Les corrections restent bornées par

$$\mathcal{O}\Big(\frac{\lambda^2}{R_0^2}\Big) + \mathcal{O}(e^{-k}).$$

Preuve (schéma LO). (i) **Réduction adiabatique.** Séparer le rapide (angle tangent θ) et le lent (enveloppe A) ; l'action rapide est

$$\mathcal{J}_{\text{fast}} = \frac{1}{2\pi}\oint p_\theta\,d\theta.$$

(ii) **Topologie et caustiques.** Le biais conique ne crée ni point tournant ni singularité : l'orbite rapide reste un cercle lisse dans le plan tangent local, d'où un comptage de Maslov inchangé. (iii)

Phase géométrique. La connexion de Berry induite par A est d'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$, avec $\varepsilon = \lambda/R_0$; au LO elle n'altère pas la structure de quantification rapide. (iv) **Poids conique.** La cinétique rapide moyenne vaut

$$\langle |\partial_t \vec{u}|^2 \rangle = \omega^2 A^2 \sigma,$$

d'où

$$\frac{E_0}{\omega} = h_{\text{eff}} \sigma.$$

□

9.2.2 Sélection spectrale du bump 3DOF

Principe d'héritage spectral. On fixe

$$u_* \in [1.7, 2.1], \qquad \varepsilon := \frac{\lambda}{R_0} \ll 1, \qquad y := (n+1)\, u_*\, \varepsilon.$$

Dans la fermeture conique 3DOF, le biais radial constant n'altère pas la structure interne de sélection des niveaux q : il agit uniquement par le facteur projectif

$$\sigma = \sin^2 \alpha$$

sur les grandeurs observées.

EBK projetée. Pour une branche conique fixée, α est fixé, donc σ est indépendant de q. La longueur d'onde projetée vaut

$$\lambda_{\text{proj}} = \frac{\lambda}{\sigma}, \qquad \varepsilon_{\text{proj}} = \frac{\lambda_{\text{proj}}}{R_0} = \frac{\varepsilon}{\sigma}.$$

La loi EBK projetée

$$\varepsilon_{\text{obs}}(q) = \frac{\varepsilon_{\text{obs}}(1)}{q}$$

est alors équivalente à la même loi interne que dans le cas 2DOF :

$$\boxed{\varepsilon(q) = \frac{\varepsilon(1)}{q}.} \tag{9.3}$$

Ainsi, la conicité ne modifie pas l'ensemble admissible des niveaux q ; elle ne modifie que leur projection conique.

Raccord au bord. La fermeture unifiée au bord s'écrit donc, au LO,

$$y \cot y = 1 - u_* \tanh u_* + \Delta_{\text{cone}}(\alpha) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \qquad u_* \in [1.7, 2.1], \tag{9.4}$$

où $\Delta_{\text{cone}}(\alpha)$ désigne le décalage pur dû au biais conique. Ce décalage n'affecte pas la loi EBK interne elle-même, mais seulement le terme de fermeture au bord.

Conséquence. Au rang meneur, on retrouve donc exactement la même structure de sélection spectrale que pour le bump 2DOF ; en particulier,

$$\boxed{\mathcal{Q}_{\text{bump}}^{(3D)} = \mathcal{Q}_{\text{bump}}^{(2D)}.} \tag{9.5}$$

L'effet proprement conique est reporté dans $\Delta_{\text{cone}}(\alpha)$, qui relève de la fermeture géométrique du cône et non de la loi EBK elle-même.

9.2.3 Invariance LO du filtre de retour admissible pour le bump 3DOF

Le bump 3DOF introduit un degré de liberté conique supplémentaire. Il faut donc vérifier que cette conicité ne modifie pas les objets qui interviennent dans la chaîne de retour admissible, mais agit seulement sur la projection conique de la solution.

1. Ansatz conique et norme de l'enveloppe

On considère au rang LO un ansatz conique à angle constant

$$\mathbf{u}_\alpha(s,t) = A(s)\Big[\sin\alpha\big(\cos\omega t\,\mathbf{e}_\theta + \varsigma\sin\omega t\,\mathbf{e}_\phi\big) + \cos\alpha\,\mathbf{e}_r\Big],$$

où $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi)$ est un trièdre orthonormé, $\varsigma = \pm 1$, et $A(s)$ désigne l'enveloppe spatiale du bump.

Comme les trois directions internes sont orthonormées, on a

$$\big|\mathbf{u}_\alpha(s,t)\big|^2 = A(s)^2\Big[\sin^2\alpha\big(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t\big) + \cos^2\alpha\Big] = A(s)^2.$$

Donc

$$\boxed{|\mathbf{u}_\alpha|^2 = A(s)^2, \qquad \partial_\alpha|\mathbf{u}_\alpha|^2 = 0.}$$

Ainsi, au rang LO, la conicité ne modifie pas la densité scalaire d'enveloppe qui alimente le retour extérieur : elle ne fait que redistribuer la même amplitude totale entre une composante tangentielle circulaire et une composante radiale constante.

2. Invariance du retour principal isotrope

Dans la chaîne de retour admissible, le retour principal effectivement lu au bord est décrit par

$$R_{\mathrm{pr}}(q), \qquad \Gamma_{\mathrm{ret}}(u;q), \qquad \delta\psi_c(q),$$

avec

$$R_{\mathrm{pr}}(q) = \mathcal{C}_{\mathrm{ext}}(q)\int_{\mathbb{R}} T_0(u)\,\Gamma_{\mathrm{ret}}(u;q)\,du.$$

Or, au rang LO, le problème extérieur isotrope est engendré par la source scalaire $A(s)^2$, qui vient d'être montrée indépendante de α. Il en résulte que la structure isotrope du retour ne dépend pas de la conicité :

$$\boxed{\partial_\alpha\Gamma_{\mathrm{ret}}(u;q) = 0, \qquad \partial_\alpha R_{\mathrm{pr}}(q) = 0.}$$

De même, la largeur angulaire de lecture du coeur,

$$\delta\psi_c(q) \sim u_*\,\varepsilon(q),$$

est fixée par l'échelle spectrale interne de la branche. Or, dans la fermeture spectrale 3DOF corrigée, la loi EBK interne reste

$$\varepsilon(q) = \frac{\varepsilon(1)}{q},$$

indépendante de α au rang LO. Il vient donc

$$\boxed{\partial_\alpha\delta\psi_c(q) = 0.}$$

Comme la forme locale du retour

$$\Gamma_{\mathrm{ret}}(u;q) = 1 - \frac{\kappa_{\mathrm{ret}}(q)}{2}u^2 + \frac{\lambda_{\mathrm{ret}}(q)}{24}u^4 + \mathcal{O}(u^6)$$

est elle-même α-indépendante, on obtient aussi

$$\boxed{\partial_\alpha\kappa_{\mathrm{ret}}(q) = 0, \qquad \partial_\alpha\lambda_{\mathrm{ret}}(q) = 0.}$$

3. Conséquence pour le seuil isotrope q_2

Dans le filtre de retour admissible, le premier seuil non trivial q_2 dépend du retour principal isotrope effectivement lu au bord. Au rang LO, ce seuil est porté par le bloc isotrope construit à partir des quantités

$$r_2, \qquad r_1, \qquad \chi_{\mathrm{mesh}},$$

où r_2 et r_1 sont obtenus par projection du retour isotrope sur les noyaux de bord, et χ_{mesh} représente le résidu isotrope de maille.

Comme $\Gamma_{\mathrm{ret}}(u;q)$ est indépendant de α, les projections isotropes le sont également :

$$\boxed{\partial_\alpha r_2 = 0, \qquad \partial_\alpha r_1 = 0, \qquad \partial_\alpha\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = 0.}$$

Le paramètre isotrope de maille χ_{mesh} ne dépend pas non plus de la conicité. Ainsi,

$$\boxed{\partial_\alpha q_2 = 0.}$$

On obtient donc

$$\boxed{q_2^{(3D)} = q_2^{(2D)}.}$$

4. Conséquence pour le seuil anisotrope q_3

Le second seuil non trivial q_3 ne repose pas sur un nouveau mécanisme de retour : il correspond à la première scission anisotrope faible du retour principal déjà établi. On écrit au premier ordre

$$\Gamma_{\mathrm{ret}}(u,\theta;q) = \Gamma_0(u;q) + \varepsilon_2\,\Gamma_2(u;q)\,P_2(\cos\theta) + \mathcal{O}(\varepsilon_2^2).$$

On note ici $S_{\mathrm{aniso}}(q)$ et $\Phi_{\mathrm{ret}}^{(2)}(q)$ les deux objets anisotropes déjà introduits dans la fermeture quadrupolaire du filtre de retour : ils sont construits uniquement à partir de la composante $P_2(\cos\theta)$ du retour principal. En particulier,

$$\boxed{\partial_\alpha \Gamma_2(u;q) = 0, \qquad \partial_\alpha S_{\mathrm{aniso}}(q) = 0, \qquad \partial_\alpha \Phi_{\mathrm{ret}}^{(2)}(q) = 0.}$$

La condition d'apparition de la seconde orientation admissible est donc identique en 2DOF et en 3DOF. Il vient

$$\boxed{\partial_\alpha q_3 = 0, \qquad q_3^{(3D)} = q_3^{(2D)}.}$$

5. Conclusion

Au rang LO, la conicité ne modifie ni le retour principal isotrope, ni sa première scission anisotrope faible. Elle n'introduit donc pas un nouveau mécanisme de sélection en q, mais agit seulement sur la projection conique de la solution 3DOF.

Par conséquent,

$$\boxed{\mathcal{Q}_{\mathrm{bump}}^{(3D,\mathrm{LO})} = \mathcal{Q}_{\mathrm{bump}}^{(2D,\mathrm{LO})},}$$

et, en particulier,

$$\boxed{q_1^{(3D)} = q_1^{(2D)}, \qquad q_2^{(3D)} = q_2^{(2D)}, \qquad q_3^{(3D)} = q_3^{(2D)}.}$$

Cette égalité porte sur les seuils structurels du filtre de retour admissible. Elle n'implique pas, à elle seule, une fermeture numérique explicite de l'ensemble admissible.

9.2.4 Sélection géométrique LO du facteur conique 3DOF

Décomposition locale. Au rang LO isotrope, l'espace local des directions internes 3DOF se décompose en une direction conique radiale et un plan tangent :

$$E_{\mathrm{loc}} = E_r \oplus E_{\parallel}, \qquad \dim E_r = 1, \qquad \dim E_{\parallel} = 2, \qquad \dim E_{\mathrm{loc}} = 3.$$

On note $P_{\parallel}$ le projecteur sur la partie tangentielle effectivement portée par la branche conique rapide. Son rang géométrique actif est

$$r_{\parallel} := \operatorname{tr} P_{\parallel}.$$

Lemme 9.3 (Poids isotrope d'un projecteur directionnel)**.** *Dans le régime LO isotrope 3DOF, le poids quadratique moyen d'un projecteur orthogonal P de rang r est*

$$\eta(P) = \frac{\operatorname{tr} P}{\operatorname{tr} \mathbf{1}_3} = \frac{r}{3}. \tag{9.6}$$

Démonstration. Au LO isotrope, la forme quadratique locale ne distingue aucune direction interne. Elle est donc proportionnelle à la métrique euclidienne sur E_{loc}. Pour une base orthonormée locale, la trace totale vaut $\operatorname{tr} \mathbf{1}_3 = 3$. Un projecteur orthogonal de rang r retient exactement r directions équipondérées. Son poids normalisé est donc

$$\eta(P) = \frac{r}{3}.$$

□

Lemme 9.4 (Identification du facteur conique)**.** *Pour une branche conique 3DOF non dégénérée, le facteur*

$$\sigma := \sin^2 \alpha$$

est le poids quadratique tangent effectivement porté par le projecteur $P_{\parallel}$. Ainsi,

$$\sigma = \eta(P_{\parallel}) = \frac{r_{\parallel}}{3}. \tag{9.7}$$

Démonstration. L'ansatz conique sépare orthogonalement une composante radiale et une composante tangentielle rapide. En normalisation quadratique locale,

$$\|u\|^2 = \cos^2 \alpha \, \|u_r\|^2 + \sin^2 \alpha \, \|u_{\parallel}\|^2,$$

les termes croisés étant nuls par orthogonalité radiale–tangentielle et par moyenne sur le cycle rapide. La fraction tangentielle de l'énergie quadratique est donc

$$\frac{\|u_{\parallel}\|^2_{\text{pondérée}}}{\|u\|^2_{\text{totale}}} = \sin^2 \alpha = \sigma.$$

Au LO isotrope, cette même fraction est le poids du projecteur tangent actif. Par le lemme 9.3, elle vaut

$$\sigma = \eta(P_{\parallel}) = \frac{r_{\parallel}}{3}.$$

□

Proposition 9.5 (Sélection géométrique LO des branches coniques 3DOF)**.** *Dans une branche conique 3DOF non dégénérée, les seules valeurs LO admissibles du facteur conique sont*

$$\boxed{\sigma = \sin^2 \alpha \in \left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right\}.} \tag{9.8}$$

Démonstration. Le projecteur tangent actif $P_{\|}$ agit dans le plan tangent $E_{\|}$, de dimension 2. Son rang vérifie donc

$$r_{\|} \in \{0, 1, 2\}.$$

Le cas $r_{\|} = 0$ correspond à une configuration sans secteur rapide tangent : elle est purement radiale et ne constitue pas une branche conique oscillante. Les branches coniques non dégénérées imposent donc

$$r_{\|} \neq 0.$$

Le cas purement tangent sans composante radiale correspond à la limite $\alpha = \pi/2$, c'est-à-dire au régime 2DOF pur. Il n'appartient pas à la sélection des branches 3DOF coniques non dégénérées. Dans le secteur 3DOF conique, le rang tangent actif peut donc être

$$r_{\|} = 1 \qquad \text{ou} \qquad r_{\|} = 2.$$

En utilisant (9.7), on obtient

$$\sigma = \frac{r_{\|}}{3} \in \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}.$$

□

Distinction avec le comptage de spin. Le rang $r_{\|}$ ne doit pas être confondu avec le nombre N_{pol} utilisé dans le comptage de spin. Le rang $r_{\|}$ mesure le nombre de directions tangentielles réelles effectivement retenues par le projecteur conique. Le nombre N_{pol} mesure, lui, le nombre de polarisations rapides indépendantes intervenant dans la monodromie de spin. Ces deux comptages peuvent coïncider dans certaines branches, mais ils ne sont pas identifiés en général.

Conséquence (relations universelles 3DOF). En réinjectant (9.8) dans les relations universelles 3DOF, on obtient les deux branches coniques admissibles

$$\frac{E_0}{\omega_0} = h_{\mathrm{eff}}\,\sigma, \qquad \sigma \in \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}.$$

Lorsque le niveau spectral q est rendu explicite, il est porté par la fréquence projetée $\omega(q)$ selon la convention adoptée dans les sections précédentes.

9.3 Procédure 3DOF (LO)

Cette section fixe le canevas commun utilisé pour traiter les branches 3DOF au LO. Elle ne remplace pas les fermetures propres à chaque famille, mais explicite l'enchaînement des étapes universelles : choix de la branche conique, application des filtres, détermination de la fréquence projetée, sélection spectrale et bilans d'énergie/spin. Les chapitres de famille (bump 3DOF, NSL 3DOF, quasi-c_t 3DOF) en constituent ensuite des instanciations particulières.

1. **Angle conique (universel).** Choisir le rang tangent actif $r_{\|} \in \{1, 2\}$ imposé par la Prop. 9.5, ce qui fixe
$$\sigma = \sin^2\alpha = \frac{r_{\|}}{3} \in \left\{\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right\}.$$
2. **Filtres 3DOF.** Appliquer la fenêtre, la coupure et la décision par signe (Sec. 9.4) afin de déterminer les bandes admissibles et l'ensemble des indices externes admissibles.
3. **Fréquence rapide de base ω_0 (spécifique à la famille).** Définir ω_0 selon la famille, tout en conservant
$$\omega_{\mathrm{proj}} = \sigma\,\omega_0.$$
En particulier :

— bump / NSL : ω_0 est la fréquence centrale du cycle rapide, locale et indépendante de α ;
— quasi-c_t : $\omega_0 = |\Omega_{\text{spin}}| = |\omega_c - kv|$ (cf. Sec. 12.1).

4. **Raccord externe sur $\mathbb{S}^3$.** Résoudre l'équation de raccord C^1 cœur–gaine au label pertinent de la famille (par ex. quasi-c_t : Eq. (12.3)) pour obtenir $\varepsilon = \lambda/R_0$ ou l'échelle équivalente au bord $u = s_c/\lambda$.
5. **Dispersion externe.** Imposer la relation externe associée à la famille considérée. Dans le cas zonal sur $\mathbb{S}^3$, on écrit directement

$$\ell(\ell+2) = \left(\frac{\omega_{\text{proj}} R_0}{c_t}\right)^2,$$

ou la relation géométriquement équivalente propre au canal étudié. On en déduit ensuite

$$\omega_0 = \frac{\omega_{\text{proj}}}{\sigma}.$$

6. **Coupure locale (admissibilité).** Vérifier l'inégalité de coupure au bord dans la variable physique (profil sech, traction bornée) au label pertinent de la famille (par ex. quasi-c_t : Prop. 12.5). Si la coupure est violée, l'état est rejeté.
7. **Structure spectrale EBK.** La carte spectrale interne s'écrit

$$\omega(q) = q\,\omega_0, \qquad \omega_{\text{proj}}(q) = \sigma\,\omega(q) = \sigma\,q\,\omega_0,$$

la structure rapide restant la même qu'en 2DOF (Prop. 9.2). L'ensemble $\mathcal{Q}$ est celui déterminé par les filtres ou par la fermeture propre à la famille : par exemple, pour le bump 3DOF, on hérite au LO du même ensemble admissible que le bump 2DOF, tandis que pour la NSL 3DOF on obtient

$$\mathcal{Q}_{\text{NSL}}^{(3D)} = \{1\}.$$

8. **Bilans universels.** En théorie pure,

$$\frac{E}{\omega_0} = h_{\text{eff}}\,\sigma \qquad \Longleftrightarrow \qquad E = h_{\text{eff}}\,\omega_{\text{proj}},$$

et le spin géométrique est ensuite fixé par la famille considérée ($|S| = \frac{1}{2}h_{\text{eff}}$ pour la branche bump 3DOF, $|S| = h_{\text{eff}}$ pour les branches vectorielles 3DOF). Les masses et énergies de fermeture (*cœur + spectral*, puis corrections éventuelles de gaine) s'emploient ensuite dans les sections dédiées à chaque famille.

9.4 Filtres spectraux 3DOF : fenêtre, coupure, sélection par bandes

9.4.1 Hypothèses LO et notations

On travaille dans le régime tube mince

$$\lambda \ll R_0, \qquad \lambda = \frac{c_t}{\omega}, \qquad c_t^2 = \frac{T}{\rho},$$

avec variable géodésique $s = R_0\psi$ et poids

$$J(s) = R_0^2 \sin^2\Big(\frac{s}{R_0}\Big).$$

On suppose une réduction cœur–gaine à pente faible et un biais conique constant

$$\alpha \in (0, \tfrac{\pi}{2}], \qquad \sigma := \sin^2 \alpha.$$

On note enfin

$$\varepsilon := \frac{\lambda}{R_0} \ll 1.$$

9.4.2 Fenêtre et coupure (générique)

On introduit une fenêtre de sélection

$$u_* \in [1.7, 2.1] \qquad \text{(LO, robuste)},$$

et une coupure locale Σ_{eff} issue du raccord C^1 cœur–gaine. Pour chaque bande $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$y = (n+1)\, u_*\, \varepsilon, \qquad h(y) = y \cot y. \tag{9.9}$$

La fonction h code la réponse tangentielle de la fenêtre ; Σ_{eff} fixe la plage de validité locale de la coupure.

9.4.3 Réponse radiale générique et DtN

La gaine zonale (équation radiale sur $\mathbb{S}^3$) et la condition Dirichlet–to–Neumann (DtN) au bord induisent, pour toute famille oscillante $\mathcal{F}$, une réponse radiale

$$\Gamma_{\mathcal{F}}(q) \in (0,1), \qquad q \in \mathbb{N} \setminus \{0\},$$

continue et strictement croissante en q au LO, sur le domaine admissible considéré, avec borne de pente

$$\Big|\frac{\partial_s A}{A}\Big|_{\text{bord}} \le G, \qquad 0 < G < 1. \tag{9.10}$$

La loi exacte de $\Gamma_{\mathcal{F}}$ est spécifique à la famille et sera donnée dans la fermeture correspondante. Le présent module n'en a pas besoin explicitement.

9.4.4 Décision par bandes (énoncés génériques)

Lemme 9.6 (Propriétés de h)**.** *La fonction h est strictement décroissante sur $(0, \frac{\pi}{2})$, vérifie*

$$h(0^+) = 1, \qquad h(\tfrac{\pi}{2}) = 0,$$

et $h(y) < 0$ sur $(\frac{\pi}{2}, \pi)$. En particulier, une égalité

$$h(y) = \Gamma_{\mathcal{F}}(q) \in (0,1)$$

n'est possible que si $y \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Proposition 9.7 (Décision par signe, unicité par bande)**.** *Fixons $n \in \mathbb{N}$ et $y = (n+1)u_*\varepsilon$. Si $\Gamma_{\mathcal{F}}(q) \in (0,1)$ est continue et strictement croissante en q sur le domaine admissible, alors :*

1. *s'il existe q tel que $h(y) - \Gamma_{\mathcal{F}}(q)$ change de signe sur la bande, il y a exactement une solution dans cette bande ;*
2. *si $y \notin (0, \frac{\pi}{2})$ (donc $h(y) \le 0$), la bande est exclue puisque $\Gamma_{\mathcal{F}}(q) \in (0,1)$.*

Définition 9.8 (Ensemble admissible (module générique))**.** Pour une famille $\mathcal{F}$, on définit

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{F}}^{(3D)} := \{q \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : \ \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } h(y) - \Gamma_{\mathcal{F}}(q) \text{ change de signe sur la bande } n\}.$$

Interface.

— Cette section est agnostique de la famille : elle fournit $\{u_*, \Sigma_{\text{eff}}, h(y)\}$ et la règle de décision/unicité.

— Dans chaque chapitre de fermeture (bump 3DOF, NSL 3DOF, ...), on instancie $\Gamma_{\mathcal{F}}(q)$ via la gaine / DtN de la famille, puis on calcule $\mathcal{Q}_{\mathcal{F}}^{(3D)}$ par la Prop. 9.7.

— Aucun ensemble admissible n'est annoncé ici : $\mathcal{Q}_{\mathcal{F}}^{(3D)}$ est déduit par cette procédure.

Bornes d'erreurs (LO). Toutes les conclusions ci-dessus restent valides avec erreurs contrôlées

$$\mathcal{O}\Big(\frac{\lambda^2}{R_0^2}\Big) + \mathcal{O}(e^{-k}), \qquad k \geq 3,$$

issues du tube mince (géométrie de $\mathbb{S}^3$) et de la réduction cœur–gaine.

9.4.5 Déclinaisons par famille

Bump 3DOF. Unihélicité $\varsigma = \pm 1$, $|S| = \frac{1}{2} h_{\text{eff}}$, $S_{\text{sgn}} \neq 0$. Même EDO de profil (9.2) ; la dépendance en α est portée par la loi d'énergie conique et par la coupure.

NSL 3DOF. Multiplication du champ (9.1) par une modulation lente $\cos(\mu t)$ (avec $\mu \ll \omega$). Le cœur et la coupure sont inchangés ; $|S| = h_{\text{eff}}$; $S_{\text{sgn}} = 0$ pour la version autoconjuguée (polarisation linéaire globale), non nul sinon.

Quasi-c_t 3DOF — équivalence d'équation avec 2DOF. Partons de l'opérateur linéaire sur $\mathbb{S}^3$

$$\partial_t^2 - c_t^2\, \Delta_{\mathbb{S}^3}, \qquad c_t^2 = \frac{T}{\rho},$$

et de l'ansatz conique (9.1) avec biais α constant. Au régime quasi-c_t (linéarisé, $\beta_{\text{eff}} \to 0$ dans le cœur), la partie oscillante est la composante tangentielle

$$\vec{u}_{\parallel}(s,t) = A(s) \sin\alpha \big(\cos\omega t\, \vec{e}_\theta + \varsigma\, \sin\omega t\, \vec{e}_\phi \big),$$

tandis que la composante radiale $A \cos\alpha\, \vec{e}_r$ est statique en temps. Dès lors, ∂_t^2 agit uniquement sur $\vec{u}_{\parallel}$, et la décomposition radiale conduit exactement à la même équation zonale que pour le quasi-c_t 2DOF :

$$\frac{1}{\sin^2\psi}\, \partial_\psi\big(\sin^2\psi\, \partial_\psi A_{\text{ext}} \big) + (\Omega R_0)^2\, A_{\text{ext}} = 0, \qquad \Omega = \frac{\omega}{c_t}. \tag{9.11}$$

On obtient donc la même dispersion sur $\mathbb{S}^3$,

$$k = \frac{\omega}{c_t}, \qquad \omega = c_t k, \qquad kR_0 = \sqrt{\ell(\ell+2)}, \qquad \ell \in \mathbb{N}. \tag{9.12}$$

avec le même schéma de raccord C^1 au bord.

Cœur linéarisé. Dans le cœur, l'EDO sur la variable oscillante

$$A_{\parallel} := A \sin\alpha$$

(voir (9.2)) se réduit, en quasi-c_t linéaire, à

$$A_{\parallel}'' = \Omega^2\, A_{\parallel} \qquad (\beta_{\text{eff}} \to 0),$$

c'est-à-dire à la même forme qu'en quasi-c_t 2DOF.

Conclusion. Le biais radial constant n'altère ni la PDE linéaire gouvernant la composante oscillante, ni l'équation zonale, ni la dispersion (9.11)–(9.12). Il n'intervient qu'à travers la cinématique d'énergie / action via le facteur

$$\sigma = \sin^2 \alpha$$

(cf. §9.2).

Chapitre 10

Fermeture du bump 3DOF

10.1 Hypothèses LO et périmètre

(H1) Tube mince :

$$\lambda \ll R_0, \qquad \lambda = \frac{c_t}{\omega}, \qquad c_t^2 = \frac{T}{\rho}.$$

(H2) Biais conique constant :

$$\alpha \in (0, \tfrac{\pi}{2}], \qquad \sigma := \sin^2 \alpha \in \Big\{\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\Big\}.$$

(H3) Réduction cœur–gaine : régularité centrale, flux nul aux pôles, raccord C^1 au bord s_c.
(H4) Pente faible, séparation d'échelles, ansatz conique (9.1).
(H5) Poids géométrique :

$$s = R_0\psi, \qquad J(s) = R_0^2 \sin^2\Big(\frac{s}{R_0}\Big).$$

10.2 Profil, EDO locale et conditions de bord

EDO de cœur (variable oscillante). Avec

$$A_\parallel := A \sin\alpha,$$

l'EDO LO du cœur est identique à celle du cas 2DOF :

$$A_\parallel'' = \Omega^2 A_\parallel - \beta_{\text{eff}} A_\parallel^3, \qquad \Omega = \omega/c_t, \qquad \beta_{\text{eff}} > 0. \tag{10.1}$$

La solution canonique est

$$A_\parallel = A_{\parallel,0}\ \operatorname{sech}(s/\lambda), \qquad \lambda = \frac{c_t}{\omega}, \qquad A_{\parallel,0} = \frac{\sqrt{2}\,\Omega}{\sqrt{\beta_{\text{eff}}}}.$$

Conditions centrales et condition DtN au bord. On impose la parité adaptée et la normalisation au centre. Au bord $s = s_c$, la condition DtN (Dirichlet–to–Neumann) borne

$$\Big|\frac{\partial_s A}{A}\Big|_{s_c} \le G, \qquad 0 < G < 1,$$

où G est issu de la gaine zonale. Cette borne suffit à fermer le rapport gradient / amplitude au bord, sans paramètre libre supplémentaire.

10.3 Quantification conique (rappel universel)

Dans la famille 3DOF conique, le facteur projectif vaut

$$\boxed{\sigma = \sin^2 \alpha \in \left\{\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right\}.}$$

Choix de branche (bump). Pour le bump 3DOF, on retient les deux branches coniques admissibles héritées de la sélection géométrique LO, cf. Prop. 9.5 :

$$\sigma_\downarrow = \frac{1}{3}, \qquad \sigma_\uparrow = \frac{2}{3}.$$

Ces deux valeurs étiquettent les deux réalisations coniques retenues dans la fermeture bump 3DOF. Leur interprétation détaillée en termes de projection de spin et d'hélicité sera donnée dans la section de spin propre à la famille.

10.4 Loi d'action conique : héritage du module 3DOF

La justification EBK de la structure rapide conique 3DOF a déjà été établie au niveau universel ; le bump 3DOF en hérite sans modification au rang LO, cf. Prop. 9.2. Le biais conique constant n'altère ni la topologie du cycle rapide tangent, ni le comptage de Maslov ; il intervient seulement par le facteur projectif

$$\sigma = \sin^2 \alpha.$$

On a donc pour le bump 3DOF

$$\boxed{\mathcal{J} = \frac{E_0}{\omega} = h_{\text{eff}}\, \sigma, \qquad \sigma \in \left\{\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right\}.} \tag{10.2}$$

Les corrections restent bornées par

$$\mathcal{O}\Big(\frac{\lambda^2}{R_0^2}\Big) + \mathcal{O}(e^{-k}).$$

Le caractère spécifique du bump 3DOF n'est donc pas dans la loi d'action elle-même, mais dans la classe de spin, la structure spectrale admissible et les fermetures de canal traitées dans les sections suivantes.

10.5 Spin du bump 3DOF

La branche bump 3DOF hérite de la structure rapide spinorielle de la famille bump, tandis que la conicité n'introduit qu'un biais projectif porté par

$$\sigma = \sin^2 \alpha.$$

Le module du spin reste donc fixé par le comptage géométrique de la branche, alors que le signe de la projection est porté par l'hélicité de préparation. Comme le cône fournit déjà un axe géométrique privilégié, la projection du spin a ici un sens intrinsèque, contrairement au cas du bump libre où elle devait être reconstruite via le cycle naturel.

Proposition 10.1 (Spin géométrique du bump 3DOF (module et signe))**.** *Au rang meneur, la branche bump 3DOF possède une seule polarisation circulaire tangentielle indépendante,*

$$N_{\mathrm{pol}} = 1, \qquad w = 1,$$

d'où

$$s_g = \frac{wN_{\mathrm{pol}}}{2} = \frac{1}{2}.$$

Son module de spin vaut alors

$$\boxed{|S_{\mathrm{bump\,3DOF}}| = \frac{1}{2}\,h_{\mathrm{eff}}.}$$

La projection du spin sur l'axe conique est donnée par

$$\boxed{S_{\parallel} = \varsigma\,\frac{1}{2}\,h_{\mathrm{eff}}, \qquad \varsigma = \pm 1,}$$

où ς est l'hélicité de préparation de la branche.

Démonstration. Le comptage géométrique commun donne

$$s_g = \frac{wN_{\mathrm{pol}}}{2} = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}.$$

La structure rapide du bump 3DOF restant, au rang meneur, dans la même classe spinorielle que la branche bump 2DOF correspondante, le module du spin vaut

$$|S_{\mathrm{bump\,3DOF}}| = s_g\,h_{\mathrm{eff}} = \frac{1}{2}\,h_{\mathrm{eff}}.$$

Le biais conique α n'affecte pas ce module : il modifie la projection énergétique observée via

$$\sigma = \sin^2\alpha,$$

mais non la classe géométrique du cycle rapide.

Il faut distinguer ici la polarisation indépendante du signe d'hélicité. Le bump 3DOF possède une seule polarisation circulaire tangentielle indépendante, d'où $N_{\mathrm{pol}} = 1$. En revanche, cette branche admet deux préparations hélicoïdales opposées

$$\varsigma = \pm 1,$$

qui ne constituent pas deux polarisations supplémentaires, mais les deux signes possibles de la projection sur l'axe conique.

Enfin, l'axe du cône fournit une direction de projection intrinsèque ; les deux hélicités $\varsigma = \pm 1$ donnent donc les deux valeurs projetées

$$S_{\parallel} = \pm\frac{1}{2}\,h_{\mathrm{eff}}.$$

□

Portée. Le résultat précédent est spécifique à la branche bump 3DOF. Il combine :

— le comptage géométrique commun, qui fixe ici

$$N_{\mathrm{pol}} = 1, \qquad w = 1, \qquad s_g = \frac{1}{2},$$

— et la structure conique propre à la famille, qui fournit directement un axe de projection interne via l'axe du cône.

Il ne doit donc pas être transposé automatiquement aux autres branches 3DOF (NSL, quasi-c_t, *etc.*), pour lesquelles la valeur de N_{pol}, la classe de spin et le sens de la projection doivent être établis séparément.

10.6 Quantification EBK et détermination de q

Principe. On utilise ici le module générique de filtres 3DOF de §9.4. La fermeture bump 3DOF ne modifie pas la structure de sélection spectrale : le biais conique constant agit sur la projection observée, mais laisse inchangés au LO la gaine zonale, la condition DtN et la condition de bande.

Proposition 10.2 (Égalité des ensembles de q entre bump 2DOF et bump 3DOF)**.** *Sous tube mince ($\varepsilon \ll 1$), pente faible et biais conique constant, la condition de bande*

$$h(y) = \Gamma_{\text{bump}}(q), \qquad y = (n+1)\, u_* \, \varepsilon, \qquad h(y) = y \cot y,$$

est identique en 2DOF et en 3DOF au LO. En particulier,

$$\boxed{\mathcal{Q}_{\text{bump}}^{(3D)} = \mathcal{Q}_{\text{bump}}^{(2D)}.} \tag{10.3}$$

10.7 Héritage LO de la fermeture transverse du bump 2DOF

Principe. Au rang meneur, la fermeture transverse du bump 3DOF n'est pas un problème nouveau : elle est héritée de la fermeture transverse du bump 2DOF, car la dynamique rapide du cœur porte uniquement sur la composante oscillante tangentielle. Le biais radial conique constant ne modifie pas cette fermeture de cœur ; il n'intervient qu'au niveau des sorties projetées via le facteur

$$\sigma = \sin^2 \alpha.$$

Proposition 10.3 (Héritage LO de la fermeture transverse)**.** *Sous les hypothèses LO du bump 3DOF (tube mince, pente faible, biais conique constant, réduction cœur–gaine régulière), la fermeture transverse de la branche bump 3DOF coïncide avec celle du bump 2DOF appliquée à la variable oscillante*

$$A_{\parallel} := A \sin \alpha.$$

En particulier, la largeur transverse fondamentale λ_* est inchangée au rang meneur :

$$\boxed{\lambda_{*,\,\text{bump3D}} = \lambda_{*,\,\text{bump2D}}} \qquad (LO). \tag{10.4}$$

Démonstration. On part de l'ansatz conique

$$\vec{u}(s,t) = A(s)\Big[\sin\alpha\big(\cos\omega t\, \vec{e}_\theta + \varsigma \, \sin\omega t\, \vec{e}_\phi\big) + \cos\alpha\, \vec{e}_r\Big], \qquad \varsigma = \pm 1.$$

On introduit alors la composante oscillante

$$A_{\parallel}(s) := A(s) \sin\alpha.$$

(i) La composante radiale ne participe pas au cycle rapide. La composante

$$A(s) \cos\alpha\, \vec{e}_r$$

est statique en temps au rang meneur. La partie rapide du cycle est donc entièrement portée par la composante tangentielle circulaire. En particulier,

$$|\partial_t \vec{u}|^2 = \omega^2 A^2 \sin^2\alpha = \omega^2 A_{\parallel}^2.$$

De même,

$$A_{\parallel}' = \sin\alpha\, A', \qquad A_{\parallel}^m = \sin^m\alpha\, A^m.$$

(ii) L'EDO de cœur est la même qu'en 2DOF. La variable effectivement excitée vérifie au LO

$$A_{\parallel}'' = \Omega^2 A_{\parallel} - \beta_{\text{eff}} A_{\parallel}^3, \qquad \Omega = \omega/c_t,$$

c'est-à-dire exactement l'EDO du bump 2DOF. Le profil réduit canonique, les moments purs de cœur et la prescription de coupure/raccord associés à cette variable sont donc les mêmes qu'en 2DOF.

(iii) La fermeture transverse est inchangée. Comme la fermeture transverse du bump 2DOF ne dépend que du problème de cœur porté par la variable oscillante, elle s'applique ici sans modification à $A_{\parallel}$. La largeur transverse fondamentale λ_* du bump 3DOF coïncide donc avec celle du bump 2DOF au rang meneur, ce qui prouve (10.4).

(iv) Où intervient la conicité ? Elle n'intervient pas dans la fermeture transverse elle-même, mais uniquement dans la projection des quantités énergétiques et massiques. Une fois λ_* fixée, la fréquence rapide fondamentale reste

$$\omega_{0,*} = \frac{c_t}{\lambda_*},$$

tandis que les sorties spectrales 3DOF portent le facteur projectif

$$\sigma = \sin^2 \alpha.$$

□

Conséquence pratique. La fermeture transverse du bump 3DOF est donc importée directement depuis la branche bump 2DOF. Si l'on note cette fermeture sous la forme

$$\boxed{\lambda_*^4 = \frac{2\,h_{\text{eff}}}{\sqrt{\rho\,T}}\,\frac{1}{K_{\text{bump}}\,C_{\text{cut}}^{(\text{bump})}}}, \tag{10.5}$$

alors cette même expression vaut pour le bump 3DOF au LO, sans facteur conique supplémentaire dans λ_*.

Conséquence spectrale. On obtient alors la structure spectrale héritée

$$\boxed{\omega_{0,f} = q\,\omega_{0,*}, \qquad \lambda_f = \frac{\lambda_*}{q}, \qquad q \in \mathcal{Q}_{\text{bump}}^{(3D)}.} \tag{10.6}$$

Les deux branches coniques admissibles

$$\sigma_{\downarrow} = \frac{1}{3}, \qquad \sigma_{\uparrow} = \frac{2}{3}$$

n'interviennent qu'au niveau des sorties spectrales projetées :

$$E_{f,X}^{\text{spec}} = h_{\text{eff}}\,q\,\omega_{0,*}\,\sigma_X, \qquad m_{f,X}^{\text{spec}} = \frac{h_{\text{eff}}}{c_t^2}\,q\,\omega_{0,*}\,\sigma_X, \qquad X \in \{\downarrow, \uparrow\}.$$

Portée. Les effets de canal, de compression inter-familles et de couplage interne `s` relèvent des fermetures composées ultérieures.

10.8 Échelle de base du bump 3DOF

Constante de cœur et échelle de base. La fermeture transverse du bump 3DOF ayant été fixée au rang meneur par la largeur fondamentale λ_* (Prop. 10.3), on introduit la constante de cœur $\kappa_{\mathrm{core}}^{(3D)}$, fixée par la fermeture cœur–gaine retenue pour le bump 3DOF, et l'on définit les échelles de base

$$\boxed{E_0^{(\mathrm{base})} = \kappa_{\mathrm{core}}^{(3D)}\, T\, \lambda_*^2 R_0, \qquad S_0 = \kappa_{\mathrm{core}}^{(3D)}\, \rho\, \lambda_*^2 R_0.} \tag{10.7}$$

La quantité S_0 sert d'échelle mécanique de référence dans les formules de masse absolue, tandis que $E_0^{(\mathrm{base})}$ en est la contrepartie énergétique.

Compatibilité cinématique. Comme $c_t^2 = T/\rho$, on a immédiatement

$$E_0^{(\mathrm{base})} = c_t^2\, S_0.$$

Ainsi, les deux échelles de base ne sont pas indépendantes : elles décrivent la même fermeture de cœur, exprimée soit en énergie, soit en masse mécanique.

10.9 Budget énergétique complet (LO) — bump 3DOF

Décomposition LO. Le budget LO sépare une contribution de base et une contribution spectrale :

$$E_{\mathrm{tot}}^{(\mathrm{bump3D})}(q,\alpha) = E_0^{(\mathrm{base})} + h_{\mathrm{eff}}\, q\, \omega_{0,*}\, \sigma, \qquad \sigma = \sin^2\alpha, \qquad q \in \mathcal{Q}_{\mathrm{bump}}^{(3D)},$$

où

$$\omega_{0,*} = \frac{c_t}{\lambda_*}.$$

Les corrections restantes sont de l'ordre

$$\mathcal{O}\Big(\frac{\lambda^2}{R_0^2}\Big) + \mathcal{O}(e^{-k}).$$

Part spectrale. Au LO conique, la part spectrale vérifie

$$E_{\mathrm{spec}}^{(q,X)} = h_{\mathrm{eff}}\, q\, \omega_{0,*}\, \sigma_X, \qquad \sigma_X \in \Big\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\Big\}.$$

10.10 Compatibilité cinématique en mouvement

Cœur massique réduit. Le bump 3DOF est une branche localisée massique : il possède un repère comobile, une énergie propre finie et une impulsion longitudinale nulle dans ce repère. Sa dynamique de cœur est celle de la branche conique héritée du module 3DOF : le biais conique α ne modifie pas la structure hyperbolique locale du cycle rapide, mais seulement la projection énergétique

$$\sigma = \sin^2\alpha.$$

La dynamique longitudinale réduite relève donc du cadre de §7.1. La loi de boost (7.9) s'applique au cœur massique réduit, avec la vitesse caractéristique de branche

$$c_{\mathcal{F}} = c_t.$$

Ainsi,

$$E(u) = \Gamma_t E_0, \qquad P(u) = \Gamma_t \frac{u}{c_t^2} E_0, \qquad \Gamma_t = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c_t^2}}.$$

Compatibilité radiale. Le bump 3DOF comporte une réduction cœur–gaine au sens des hypothèses 10.1. Le profil de cœur est localisé,

$$A_{\parallel}(s) = A_{\parallel,0}\ \mathrm{sech}(s/\lambda),$$

et les sources radiales produites par les termes quadratiques ou bilinéaires du cœur sont donc localisées dans la coordonnée comobile.

L'opérateur radial de gaine est l'opérateur commun du critère (7.3). Le motif conique ne modifie pas cet opérateur ; il modifie seulement la source $S_{\mathcal{F}}$ par les facteurs projectifs associés à σ. La gaine strictement comobile est donc localisée pour

$$|u| < c_r, \qquad c_r^2 = \kappa_r c_t^2.$$

Au-dessus de ce seuil radial, le cœur tangent réduit conserve sa cinématique de branche, mais la réponse radiale ne relève plus d'une gaine Yukawa strictement comobile au même rang.

10.11 Bump 3DOF isolé : énergie interne et source interne s

Objet. On considère ici la branche bump 3DOF isolée, avant formation d'un composé blanc. Cette branche possède une énergie interne propre et une source interne s associée. Ces quantités caractérisent la solution isolée ; elles ne constituent pas une fermeture de composé couleur–blanc.

La fermeture d'un composé blanc est construite ultérieurement à partir de la source totale blanche, et non par addition de réponses isolées.

Hiérarchie spectrale. La fermeture transverse introduit une hiérarchie spectrale de familles décrite par des entiers EBK q_f, avec

$$f \in \{1, 2, 3\}, \qquad q_1 < q_2 < q_3.$$

La largeur transverse et la fréquence propre de la famille f sont reliées à celles de la famille de référence par

$$\boxed{\lambda_f = \frac{\lambda_*}{q_f}, \qquad \omega_{0,f} = q_f\, \omega_{0,*}.} \tag{10.8}$$

Branches coniques. Les deux branches coniques admissibles sont caractérisées par

$$\boxed{\sigma_\downarrow = \sin^2 \alpha_\downarrow = \frac{1}{3}, \qquad \sigma_\uparrow = \sin^2 \alpha_\uparrow = \frac{2}{3},} \tag{10.9}$$

et par les compléments

$$\boxed{\rho_\downarrow = \cos^2 \alpha_\downarrow = \frac{2}{3}, \qquad \rho_\uparrow = \cos^2 \alpha_\uparrow = \frac{1}{3}.} \tag{10.10}$$

Il en résulte

$$\boxed{\tan^2 \alpha_\downarrow = \frac{1}{2}, \qquad \tan^2 \alpha_\uparrow = 2.} \tag{10.11}$$

Énergie spectrale isolée. La loi d'action conique héritée du module 3DOF donne, pour la partie rapide,

$$E = h_{\text{eff}}\,\omega_{\text{br}}, \qquad \omega_{\text{br}} = q_f\,\omega_{0,*}\,\sigma_X.$$

L'énergie spectrale isolée de la branche (f, X) est donc

$$\boxed{E^{\text{spec}}_{f,X} = h_{\text{eff}}\,q_f\,\omega_{0,*}\,\sigma_X.} \tag{10.12}$$

En posant

$$E_* := h_{\text{eff}}\,\omega_{0,*},$$

on obtient la forme réduite

$$\boxed{\frac{E^{\text{spec}}_{f,X}}{E_*} = q_f\sigma_X.} \tag{10.13}$$

Source interne s isolée. La branche bump 3DOF peut porter une source interne s. On note $S_{f,X}$ la source associée à la famille f et à la branche conique X. On associe à cette source isolée la réponse quadratique interne : :

$$\boxed{E^{\text{iso}}_{\mathsf{s}}[S_{f,X}] = \frac{1}{2}\langle S_{f,X}, G_{\mathsf{s}} S_{f,X}\rangle.} \tag{10.14}$$

Cette énergie est une réponse interne du canal s à la source isolée du bump 3DOF. Elle ne doit pas être confondue avec l'énergie du composé blanc.

Amplitude de bras transmise aux composés blancs. La source interne s qui sera consommée par les composés blancs est l'amplitude de bras

$$\boxed{Q^{\text{arm}}_{f,X} = q_f\,\sigma_X\,\chi_X, \qquad \chi_\downarrow = 1, \qquad \chi_\uparrow = \frac{2\pi}{3}.} \tag{10.15}$$

Cette expression définit, dans le présent chapitre, l'amplitude de bras portée par la branche isolée. Son utilisation dans une source totale de composé relève du secteur des couplages.

La branche $\downarrow$ est prise comme branche compressive de référence ; son amplitude de bras est normalisée par

$$\chi_\downarrow = 1.$$

La branche $\uparrow$ porte une composante phase–circulante. Dans un composé blanc à trois raccords équivalents, la fermeture de couleur impose que la phase circulante totale autour de la tri–jonction soit un cycle entier :

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 2\pi\nu, \qquad \nu \in \mathbb{Z}.$$

La branche élémentaire non triviale correspond à $\nu = 1$. Par symétrie de la tri–jonction blanche, les trois raccords portent la même fraction de cette holonomie :

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3.$$

Il vient donc

$$\varphi_i = \frac{2\pi}{3}.$$

Le facteur

$$\chi_\uparrow = \frac{2\pi}{3}$$

est donc une holonomie structurale de tri–jonction blanche, déterminée par la géométrie interne de la jonction.

Séparation entre branche isolée et composé blanc. La branche isolée possède donc deux objets distincts :

$$E^{\mathrm{spec}}_{f,X}, \qquad E^{\mathrm{iso}}_{\mathsf{s}}[S_{f,X}].$$

Le premier est l'énergie spectrale de la solution isolée. Le second est la réponse interne du canal s à la source isolée. Lorsqu'un composé blanc est formé, ces réponses isolées ne sont pas additionnées : la fermeture du composé doit être construite à partir d'une source totale de composé, et non par addition naïve des réponses isolées.

Ainsi, pour un CB3, les amplitudes $Q^{\mathrm{arm}}_{f,X}$ alimentent le défaut de raccord blanc et les modes collectifs de jonction, tandis que les self–réponses isolées restent des grandeurs internes de branche.

Chapitre 11

Solution NSL 3DOF

11.1 Hypothèses LO et notations

(N1) Tube mince :

$$\lambda \ll R_0, \qquad \lambda = \frac{c_t}{\omega_0}, \qquad c_t^2 = \frac{T}{\rho}.$$

(N2) Biais conique constant :

$$\alpha \in (0, \tfrac{\pi}{2}], \qquad \sigma := \sin^2 \alpha \in \left\{\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right\}.$$

(N3) Réduction cœur–gaine : régularité centrale, flux nul aux pôles, raccord C^1 au bord s_c.
(N4) Pente faible et séparations d'échelles ; modulation lente de pulsation μ telle que

$$0 < \mu \ll \omega_0.$$

(N5) Poids géométrique sur $\mathbb{S}^3$:

$$s = R_0\psi, \qquad dV = 4\pi R_0^2 \sin^2\psi \, ds.$$

On pose enfin

$$\varepsilon := \frac{\lambda}{R_0} \ll 1, \qquad \Omega := \frac{\omega_0}{c_t}.$$

11.2 Ansatz conique NSL et EDO du cœur

Ansatz NSL (modulation lente).

$$\vec{u}_0(s,t) = A(s)\Big[\sin\alpha\big(\cos\omega_0 t\,\vec{e}_\theta + \varsigma\,\sin\omega_0 t\,\vec{e}_\phi\big) + \cos\alpha\,\vec{e}_r\Big], \qquad \varsigma = \pm 1, \tag{11.1}$$

$$\vec{u}(s,t) = \vec{u}_0(s,t)\,\cos(\mu t), \qquad 0 < \mu \ll \omega_0. \tag{11.2}$$

Hiérarchie rapide/lente. La modulation lente $\cos(\mu t)$ n'a pas pour rôle de redéfinir la structure rapide du coeur, mais d'introduire une enveloppe temporelle séparée de la porteuse ω_0. Comme $\mu \ll \omega_0$, les dérivées temporelles produisent, en plus des termes d'ordre ω_0^2, seulement des corrections d'ordre $\mu\omega_0$ et μ^2, donc subdominantes au rang LO. La fermeture du coeur est ainsi gouvernée, au premier ordre, par la même composante oscillante rapide que pour le bump 3DOF ; la modulation lente n'intervient qu'aux ordres suivants et dans les grandeurs projetées associées à la branche NSL.

EDO du cœur (composante oscillante). La dynamique rapide agit sur

$$A_{\parallel} := A \sin\alpha.$$

Au LO,

$$A_{\parallel}'' = \Omega^2 A_{\parallel} - \beta_{\text{eff}} A_{\parallel}^3, \qquad \beta_{\text{eff}} > 0, \tag{11.3}$$

avec solution canonique

$$A_{\parallel} = A_{\parallel,0}\,\operatorname{sech}(s/\lambda), \qquad \lambda = \frac{c_t}{\omega_0}, \qquad A_{\parallel,0} = \frac{\sqrt{2}\,\Omega}{\sqrt{\beta_{\text{eff}}}}.$$

Le même coefficient local β_{eff} est utilisé que dans la fermeture de cœur conique, avec la convention de nondimensionnalisation de 9.1. Sa positivité assure la branche focalisante du profil canonique.

La modulation lente (11.2) n'altère donc pas l'EDO LO : elle ne modifie ni l'équation de coeur, ni la largeur λ, ni l'amplitude canonique $A_{\parallel,0}$ au premier ordre. Son effet apparaît seulement dans la structure lente propre à la branche NSL et dans les fermetures ultérieures.

11.3 Gaine zonale, dispersion sur $\mathbb{S}^3$ et fenêtre MSE

À l'extérieur du cœur, l'enveloppe satisfait l'équation zonale sur $\mathbb{S}^3$:

$$-\frac{T}{R_0^2}\left(\sin^2\psi\, A'(\psi)\right)' + \frac{T}{R_0^2} S^2 A(\psi) = \rho\,\omega_0^2 \sin^2\psi\, A(\psi), \qquad S^2 := \ell(\ell+2). \tag{11.4}$$

Réduction de Langer. Avec

$$y(\psi) = \sqrt{\sin\psi}\, A(\psi),$$

on obtient

$$y''(\psi) + \left[\Omega^2 R_0^2 - U(\psi)\right] y(\psi) = 0, \qquad \Omega = \frac{\omega_0}{c_t}, \qquad U(\psi) = \frac{S^2 + \frac{1}{4}}{\sin^2\psi} - \frac{1}{4}. \tag{11.5}$$

Fenêtre de cœur. Le raccord C^1 exact au bord $\psi_c = u^*\varepsilon$ donne

$$y\cot y = 1 - u^* \tanh u^*, \qquad y = (n+1)\,u^*\,\varepsilon, \qquad u^* \in [1.7, 2.1], \qquad n \in \mathbb{N}_0. \tag{11.6}$$

Quantités de bord.

$$k_*^2 = \Omega^2 R_0^2 - U(\psi_c), \qquad g_* = \frac{1}{\sin\psi_c} \simeq \frac{1}{u^*\,\varepsilon}, \qquad \widehat{\beta}_0 = \frac{(2k_*)^2}{(2k_*)^2 + g_*^2} \in (0,1). \tag{11.7}$$

Proposition 11.1 (Valeur LO de la constante de bord $\widehat{\beta}_0$)**.** *Dans la fenêtre mince $\psi_c = u^*\varepsilon$ avec $\varepsilon \ll 1$, on a*

$$g_* = \sin^{-1}\psi_c \simeq (u^*\varepsilon)^{-1} \gg 1 \qquad \textit{tandis que} \qquad k_* = \mathcal{O}(1).$$

Par suite,

$$\widehat{\beta}_0 = \frac{(2k_*)^2}{(2k_*)^2 + g_*^2} = \mathcal{O}\big((u^*\varepsilon)^2\big) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.$$

Au rang meneur,

$$\boxed{\widehat{\beta}_0 = 0},$$

avec corrections $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$.

11.4 Filtre EBK et détermination de q (NSL 3DOF)

Cadre. On travaille au rang meneur : tube mince $\varepsilon \ll 1$, fenêtre MSE, raccord C^1 au bord $\psi_c = u^*\varepsilon$, et gaine régie par (11.4)–(11.5).

Proposition 11.2 (États admissibles en gaine, rang meneur)**.** *Le problème de bord zonal après réduction de Langer définit un problème de Sturm–Liouville sur*

$$I = [\psi_c, \pi - \psi_c]$$

dont le premier mode propre y_0 est strictement positif sur I et sans nœud interne. Tout mode d'ordre $m \geq 1$ possède au moins un nœud et est exclu par la fenêtre MSE au LO.

Esquisse. Dans (11.5), le potentiel effectif $U(\psi)$ est régulier sur I et domine aux bords par le terme en $\sin^{-2}\psi$. Les conditions de raccord rendent le problème régulier au sens Sturm–Liouville. Le premier mode y_0 est sans nœud, tandis que tout mode d'ordre supérieur possède des oscillations internes, incompatibles avec la hiérarchie

$$\ell_0 \ll \lambda \ll R_0$$

et la fenêtre MSE. □

Proposition 11.3 (Filtre EBK et valeur de q pour NSL 3DOF)**.** *Au rang meneur, l'action par période de branche vérifie la règle EBK*

$$\mathcal{J} = \frac{E_0}{\omega_{\mathrm{br}}} = h_{\mathrm{eff}}\, q, \qquad q \in \mathbb{N}.$$

Sous les hypothèses LO et la sélection du mode fondamental spatial (Proposition 11.2), l'état admissible est nécessairement

$$\boxed{q_{\mathrm{adm}}^{(\mathrm{NSL3DOF,\,LO})} = 1.}$$

Démonstration. Le mode spatial admissible est le fondamental sans nœud, et l'état temporel retenu est l'état fondamental cohérent du cycle rapide. Tout $q \geq 2$ exigerait soit des oscillations spatiales supplémentaires, soit une structure multi-anneaux hors périmètre LO. □

Conséquence pratique. Dans tout le chapitre, on prend

$$q = 1, \qquad \omega_{\mathrm{br}} = \sigma\,\omega_0, \qquad \sigma = \sin^2\alpha.$$

11.5 Justification EBK et action universelle

La règle EBK au rang meneur s'écrit, pour la branche NSL 3DOF,

$$\mathcal{J} = \frac{E_0}{\omega_{\mathrm{br}}} = h_{\mathrm{eff}}\, q.$$

Comme le filtre spatial sélectionne uniquement le mode fondamental admissible (Proposition 11.3), on a ici

$$q = 1.$$

Il vient donc

$$\boxed{E_0 = h_{\mathrm{eff}}\,\omega_{\mathrm{br}}, \qquad \omega_{\mathrm{br}} = \sigma\,\omega_0, \qquad \sigma = \sin^2\alpha \in \left\{\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right\}.} \tag{11.8}$$

La branche NSL 3DOF hérite ainsi de la même loi d'action universelle que les autres branches oscillantes, la conicité n'intervenant qu'à travers le facteur projectif σ.

11.6 Fermeture LO du cœur NSL 3DOF mono-lobe

Constantes de forme. On utilise les constantes de forme tridimensionnelles du profil canonique $a(\xi) = \operatorname{sech} \xi$, avec mesure $4\pi\xi^2\, d\xi$:

$$J_0 = \frac{\pi^3}{3}, \qquad J_2 \simeq 7.6339320582.$$

On définit la combinaison pure

$$\boxed{K_{\mathrm{NSL}}^{(3D)} := (J_0 + J_2)J_0.} \tag{11.9}$$

Cette constante est un nombre pur issu du profil local NSL 3DOF.

Dénominateur de fermeture. Pour la branche libre isolée au LO, le dénominateur réduit de fermeture est

$$\boxed{D_{\mathrm{NSL3}}^{(\mathrm{LO})} = \kappa_r\, K_{\mathrm{NSL}}^{(3D)}.} \tag{11.10}$$

Il est sans dimension.

Largeur de cœur. La largeur fermée du cœur NSL 3DOF est définie par

$$\boxed{\lambda_*^4 = \frac{2\, h_{\mathrm{eff}}}{\sqrt{\rho\, T}\, D_{\mathrm{NSL3}}^{(\mathrm{LO})}}.} \tag{11.11}$$

Cette expression est dimensionnellement homogène :

$$[h_{\mathrm{eff}}] = ML^2T^{-1}, \qquad [\sqrt{\rho T}] = ML^{-2}T^{-1}, \qquad \left[\frac{h_{\mathrm{eff}}}{\sqrt{\rho T}}\right] = L^4.$$

Masse projetée par branche conique. Comme la branche NSL 3DOF vérifie $q = 1$ et

$$\omega_{\mathrm{br}} = \sigma_X\, \omega_{0,*}, \qquad \sigma_X \in \left\{\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right\},$$

la masse mécanique projetée associée à la branche X est

$$\boxed{m_X^{(\mathrm{NSL3})} = \frac{h_{\mathrm{eff}}}{c_t\, \lambda_*}\, \sigma_X.} \tag{11.12}$$

Condition d'existence. La condition d'existence de la fermeture est

$$\boxed{D_{\mathrm{NSL3}}^{(\mathrm{LO})} > 0.} \tag{11.13}$$

Elle est vérifiée dès que

$$\kappa_r > 0, \qquad K_{\mathrm{NSL}}^{(3D)} > 0.$$

Statut des constantes consommées. La fermeture NSL 3DOF consomme le coefficient radial de gradient κ_r, ainsi que les grandeurs mécaniques ρ et T. Elle ne consomme pas le coefficient local radial

$$\kappa_\mu = \frac{\mu_2}{T}.$$

Ainsi, la branche NSL 3DOF dépend de la séparation effective de κ_r, ρ, T. Toute évaluation numérique de cette masse présuppose donc que le statut de ces grandeurs soit fixé au préalable dans la donnée locale retenue.

Remarque. On a utilisé la Proposition 11.1, qui donne

$$\widehat{\beta}_0 = 0$$

au LO.

11.7 Compatibilité cinématique en mouvement

Cœur massique réduit. La NSL 3DOF mono-lobe est une branche localisée massique : le cœur possède une largeur fermée λ_*, une énergie propre finie et un repère comobile. La modulation lente $\cos(\mu t)$, avec $\mu \ll \omega_0$, ne modifie pas au rang LO la structure hyperbolique rapide du cœur établie dans (11.3). Elle n'intervient qu'aux ordres suivants dans la dynamique lente de la branche.

La dynamique longitudinale réduite relève donc du cadre de §7.1. La loi de boost (7.9) s'applique au cœur massique réduit, avec

$$c_{\mathcal{F}} = c_t.$$

On obtient

$$E(u) = \Gamma_t E_0, \qquad P(u) = \Gamma_t \frac{u}{c_t^2} E_0, \qquad \Gamma_t = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c_t^2}}.$$

Compatibilité radiale. L'ansatz conique NSL 3DOF contient une composante radiale portée par $\cos\alpha\, \vec{e}_r$, mais la fermeture de masse mono-lobe (11.12) ne consomme pas le coefficient local radial κ_μ. La fermeture du cœur dépend de κ_r, ρ, T via le dénominateur (11.10) et la largeur (11.11).

La source radiale associée à la branche est construite à partir du profil de cœur localisé

$$A_\parallel(s) = A_{\parallel,0}\ \mathrm{sech}(s/\lambda).$$

Elle est donc localisée dans la coordonnée comobile. Le critère général (7.3) s'applique à la réponse radiale de gaine lorsque celle-ci est considérée explicitement :

$$|u| < c_r, \qquad c_r^2 = \kappa_r c_t^2.$$

Dans ce régime, une gaine strictement comobile est localisée. Pour $|u| \geq c_r$, la fermeture par gaine Yukawa strictement comobile n'est plus celle du rang linéaire considéré.

11.8 Spin géométrique (NSL 3DOF)

Classe géométrique. Dans l'ansatz (11.1), les deux composantes tangentielles $(\vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$ sont en quadrature et réalisent la structure transverse de la branche NSL. On retient ainsi

$$N_{\mathrm{pol}} = 2.$$

polarisations circulaires indépendantes. Au rang meneur, le vecteur transverse effectue une rotation complète par période $2\pi/\omega_0$, d'où

$$w = 1.$$

Le comptage géométrique commun donne donc

$$s_g = \frac{w N_{\mathrm{pol}}}{2} = \frac{1 \times 2}{2} = 1.$$

La branche NSL 3DOF appartient ainsi à la classe entière.

Norme du spin. Dans cette famille, le module du spin vaut

$$\boxed{|S_{\mathrm{NSL\,3DOF}}| = h_{\mathrm{eff}}, \qquad s_g = 1.}$$

Le biais conique α n'affecte pas ce module : il intervient seulement dans la projection énergétique de branche via

$$\sigma = \sin^2 \alpha, \qquad \omega_{\mathrm{br}} = \sigma\, \omega_0,$$

sans modifier la classe géométrique du cycle rapide.

Projection et hélicité. Comme pour le bump 3DOF, l'axe du cône fournit une direction privilégiée de projection. La NSL 3DOF porte alors deux hélicités opposées

$$\varsigma = \pm 1,$$

et la projection du spin sur l'axe conique s'écrit

$$\boxed{S_{\parallel} = \varsigma\, h_{\mathrm{eff}}, \qquad \varsigma = \pm 1.}$$

Portée. L'ansatz NSL 3DOF considéré ici est purement transverse et circulaire autour de l'axe conique. Au rang meneur, il réalise donc naturellement les deux hélicités

$$\pm h_{\mathrm{eff}},$$

mais ne fait pas apparaître, dans ce cadre, une composante longitudinale supplémentaire de type $m = 0$. La structure retenue est donc celle d'une branche vectorielle transverse à deux hélicités, et non celle d'un triplet complet de projections.

Chapitre 12

Soliton quasi-c_t 3DOF

12.1 Cinématique conique et phase unifiée sur $\mathbb{S}^3$

Cadre $\mathbb{S}^3$ et conventions. On travaille sur $\mathbb{S}^3$ de rayon R_0, avec la coordonnée géodésique

$$s = R_0\psi \in (0, \pi R_0),$$

et la mesure exacte

$$dV = 4\pi\, R_0^3 \sin^2\psi\, d\psi = 4\pi R_0^2 \sin^2\Big(\frac{s}{R_0}\Big)\, ds.$$

La masse est volumique ρ et

$$c_t^2 = \frac{T}{\rho}, \qquad J(s) = R_0^2 \sin^2\Big(\frac{s}{R_0}\Big).$$

Statut de l'enveloppe quasi-c_t. Dans le cœur quasi–plan, la réduction multi–échelles au voisinage de $v \simeq c_t$, héritée du secteur quasi-c_t 2DOF, conduit à une enveloppe lente de type mKdV. On écrit

$$A_{\mathrm{env}}(s,t) = \varepsilon\, U(X,T), \qquad X = \varepsilon(s - vt), \qquad T = \varepsilon^3 t, \qquad v \simeq c_t.$$

Dans le présent chapitre, cette réduction d'enveloppe est supposée acquise, et l'on se concentre sur la réalisation conique 3DOF, la fermeture d'action, le raccord sur $\mathbb{S}^3$ et la sélection spectrale.

Phase unifiée et fréquence rapide. Le champ tangent est décrit par

$$\vec{u}_\perp(s,t) = A_{\mathrm{env}}(s,t)\big[\cos\Phi(s,t)\,\vec{e}_1 + \sin\Phi(s,t)\,\vec{e}_2\big],$$

avec phase unique

$$\Phi(s,t) = \omega_c\, t + k\,(s - vt), \qquad [k] = \mathrm{m}^{-1}, \qquad v \simeq c_t. \tag{12.1}$$

La vitesse angulaire locale à s fixé vaut

$$\Omega_{\mathrm{spin}} = \dot{\Phi}|_s = \omega_c - kv.$$

Pour une réalisation conique 3DOF d'angle α, on définit

$$\omega_0 := |\Omega_{\mathrm{spin}}| = |\omega_c - kv|, \qquad \omega_{\mathrm{proj}} := \omega_0\, \sigma, \qquad \sigma = \sin^2\alpha \in \Big\{\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\Big\}. \tag{12.2}$$

12.2 Bilans et universalité de h_{eff}

Proposition 12.1 (Loi universelle 3DOF au rang meneur)**.** *Au rang meneur et pour le fondamental EBK, la loi d'action s'écrit*

$$\boxed{\frac{E}{\omega_0} = h_{\text{eff}}\,\sigma} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boxed{E = h_{\text{eff}}\,\omega_{\text{proj}}},$$

avec

$$\omega_{\text{proj}} = \sigma\,\omega_0, \qquad \sigma = \sin^2\alpha.$$

Le nombre de spin projeté vaut alors

$$S_{\text{proj}} := \frac{E}{\omega_{\text{proj}}} = h_{\text{eff}},$$

indépendamment de α.

Fermeture d'anneau et universalité de h_{eff}. La fermeture radiale au bord du cœur impose une aire d'enveloppe fixée,

$$A_0^2\,\lambda_{\text{env}} = \mathcal{A}_*,$$

où $\mathcal{A}_*$ est déterminée par la fermeture d'anneau retenue. Dans le présent chapitre, on n'a besoin que du fait suivant : cette fermeture conduit, au rang meneur, à la même constante d'action effective h_{eff} que dans les autres familles localisées. La branche quasi-c_t 3DOF vérifie donc la même loi universelle

$$\frac{E}{\omega_0} = h_{\text{eff}}\,\sigma \qquad \Longleftrightarrow \qquad E = h_{\text{eff}}\,\omega_{\text{proj}}.$$

12.3 Spin du quasi-c_t 3DOF

Classe géométrique. La branche quasi-c_t 3DOF conserve deux polarisations tangentielles indépendantes dans le secteur transverse, d'où

$$N_{\text{pol}} = 2.$$

Au rang meneur, le cycle rapide reste fondamental :

$$w = 1.$$

Le comptage géométrique commun donne donc

$$s_g = \frac{wN_{\text{pol}}}{2} = \frac{1 \times 2}{2} = 1.$$

La branche quasi-c_t 3DOF appartient ainsi à la classe entière.

Norme du spin. La loi universelle 3DOF au rang meneur (§12.2) donne

$$E = h_{\text{eff}}\,\omega_{\text{proj}}, \qquad S_{\text{proj}} = \frac{E}{\omega_{\text{proj}}} = h_{\text{eff}}.$$

On obtient donc

$$\boxed{|S_{qct\,3DOF}| = h_{\text{eff}}, \qquad s_g = 1.}$$

Projection et hélicité. L'axe du cône fournit une direction privilégiée de projection. Dans l'ansatz transverse retenu, la branche quasi-c_t 3DOF porte deux hélicités opposées

$$\varsigma = \pm 1,$$

et la projection du spin sur l'axe conique s'écrit

$$\boxed{S_{\parallel} = \varsigma\, h_{\mathrm{eff}}, \qquad \varsigma = \pm 1.}$$

Portée. L'ansatz quasi-c_t 3DOF utilisé ici est purement transverse. Au rang meneur, il réalise donc naturellement les deux hélicités

$$\pm h_{\mathrm{eff}},$$

mais ne fait pas apparaître, dans ce cadre, une composante longitudinale supplémentaire de type $m = 0$. La structure retenue est donc celle d'une branche entière transverse à deux hélicités, et non celle d'un triplet complet de projections.

Proposition 12.2 (Spin du quasi-c_t 3DOF)**.** *Au rang meneur, la branche quasi-c_t 3DOF vérifie*

$$N_{\mathrm{pol}} = 2, \qquad w = 1, \qquad s_g = 1,$$

et son spin projeté sur l'axe conique vaut

$$S_{\parallel} = \varsigma\, h_{\mathrm{eff}}, \qquad \varsigma = \pm 1.$$

Démonstration. Le comptage géométrique commun donne

$$s_g = \frac{w N_{\mathrm{pol}}}{2} = \frac{1 \times 2}{2} = 1.$$

La loi universelle 3DOF au rang meneur donne en outre

$$S_{\mathrm{proj}} = \frac{E}{\omega_{\mathrm{proj}}} = h_{\mathrm{eff}},$$

donc

$$|S_{qct\,3DOF}| = h_{\mathrm{eff}}.$$

Enfin, l'axe du cône fournit une direction de projection intrinsèque ; les deux hélicités $\varsigma = \pm 1$ donnent alors les deux valeurs projetées

$$S_{\parallel} = \pm h_{\mathrm{eff}}.$$

□

12.4 Raccord sur $\mathbb{S}^3$ et sélection spectrale zonale

Log–dérivées. Dans le cœur, avec un profil sech, la log–dérivée interne au bord s_c s'écrit

$$\Lambda_{\mathrm{int}}(u) = -\frac{1}{\lambda_{\mathrm{env}}} \tanh u, \qquad u := \frac{s_c}{\lambda_{\mathrm{env}}}, \qquad \psi_c = \frac{s_c}{R_0} = u\, \varepsilon_{\mathrm{env}}.$$

À l'extérieur, la solution zonale régulière de l'équation hypersphérique est

$$A_{\mathrm{ext}} \propto C_n^{(1)}(\cos\psi),$$

et l'on introduit le nombre d'onde projeté

$$\Omega_{\text{proj}} := \frac{\omega_{\text{proj}}}{c_t}.$$

La partie extérieure vérifie alors

$$\frac{1}{\sin^2\psi}\,\partial_\psi(\sin^2\psi\,\partial_\psi A) + (\Omega_{\text{proj}}R_0)^2\,A = 0, \qquad \Omega_{\text{proj}}^2 R_0^2 = n(n+2).$$

La log–dérivée extérieure en ψ_c vaut

$$\Lambda_{\text{ext}}(n;\psi_c) = \frac{1}{R_0}\Big[(n+1)\cot\big((n+1)\psi_c\big) - \cot\psi_c\Big].$$

Équation de raccord. Le raccord C^1 impose, sous forme adimensionnée,

$$\boxed{-\frac{1}{\varepsilon_{\text{env}}}\tanh u = (n+1)\cot\big((n+1)\,u\,\varepsilon_{\text{env}}\big) - \cot(u\,\varepsilon_{\text{env}}), \qquad \Omega_{\text{proj}}^2 R_0^2 = n(n+2).} \tag{12.3}$$

Cette condition discrétise directement Ω_{proj}, donc $\omega_{\text{proj}} = c_t\Omega_{\text{proj}}$, puis ω_0 via

$$\omega_{\text{proj}} = \sigma\,\omega_0.$$

12.5 EBK du quasi-c_t 3DOF et sélection du fondamental

Proposition 12.3 (EBK du quasi-c_t 3DOF)**.** *Au rang meneur, le soliton quasi-c_t 3DOF définit un cycle rapide unique de phase*

$$\Phi(s,t) = \omega_c t + k(s - vt), \qquad \omega_0 = |\omega_c - kv|,$$

porté par une enveloppe localisée sans sous-structure multi-anneaux dans la classe considérée. La quantification EBK du cycle rapide s'écrit alors

$$\boxed{J = h_{\text{eff}}\,\sigma, \qquad E = h_{\text{eff}}\,\omega_{\text{proj}}, \qquad \omega_{\text{proj}} = \sigma\,\omega_0, \qquad \sigma = \sin^2\alpha.}$$

En particulier,

$$E(q) = h_{\text{eff}}\,\omega_{\text{proj}}(q), \qquad \omega_{\text{proj}}(q) = q\,\sigma\,\omega_0.$$

Esquisse. Le champ quasi-c_t 3DOF possède une seule phase rapide Φ, donc un seul cycle angulaire fondamental. Le biais conique constant n'altère pas la topologie du cycle, mais introduit seulement le poids projectif $\sigma = \sin^2\alpha$. On retrouve ainsi la structure EBK des familles 3DOF :

$$J \propto q\,\sigma, \qquad \omega(q) = q\,\omega_0.$$

□

Proposition 12.4 (Fondamental interne et sélection zonale externe)**.** *Dans la classe quasi-c_t 3DOF retenue ici, l'enveloppe localisée du coeur est prise au fondamental interne : aucune sous-structure multi-anneaux supplémentaire n'est introduite dans le cycle rapide localisé. En revanche, la discrétisation spectrale globale est portée par le raccord zonal sur $\mathbb{S}^3$, donc par l'indice externe n défini par*

$$\Omega_{\text{proj}}^2 R_0^2 = n(n+2), \qquad \Omega_{\text{proj}} := \frac{\omega_{\text{proj}}}{c_t}.$$

Pour R_0 très grand, cette discrétisation zonale devient quasi-continue.

Esquisse. L'ansatz quasi-c_t retenu décrit une enveloppe unique localisée, sans excitation interne additionnelle du coeur. La seule quantification restante provient donc du mode extérieur zonal raccordé sur $\mathbb{S}^3$, paramétré par n. Comme les espacements spectraux sont d'ordre $1/R_0$, le régime $R_0 \gg \lambda_{\text{env}}$ engendre un quasi-continu de fréquences observées. □

Conséquence pratique. Dans tout ce chapitre, on garde le fondamental interne du coeur et l'on écrit

$$\omega_{\mathrm{proj}} = \sigma\,\omega_0, \qquad \Omega_{\mathrm{proj}} := \frac{\omega_{\mathrm{proj}}}{c_t}, \qquad \Omega_{\mathrm{proj}}^2 R_0^2 = n(n+2), \qquad E = h_{\mathrm{eff}}\,\omega_{\mathrm{proj}},$$

la sélection effective des états étant alors portée par n, et non par une tour interne $q \geq 2$.

12.6 Coupure locale

Proposition 12.5 (Seuil mécanique au bord)**.** *Au bord s_c, avec*

$$A'(s_c) = \frac{A_0}{\lambda_{\mathrm{env}}}\,\operatorname{sech} u\,\tanh u, \qquad A_0 = \frac{\sqrt{2}\,\Omega_{\mathrm{proj}}}{\sqrt{\beta_{\mathrm{eff}}}}, \qquad \Omega_{\mathrm{proj}} := \frac{\omega_{\mathrm{proj}}}{c_t},$$

la traction tangentielle moyenne vérifie

$$\left\langle \sigma_{\tan} \right\rangle \simeq \frac{T}{2}\,\sin^2\alpha\,[A'(s_c)]^2 \leq \sigma_{\max} = \Sigma\,T, \qquad \Sigma \in (0,1].$$

On en déduit la coupure explicite

$$\boxed{\Omega_{\mathrm{proj}}^4 \frac{\sin^2\alpha}{\beta_{\mathrm{eff}}}\,\operatorname{sech}^2 u\,\tanh^2 u \leq \Sigma, \qquad \beta_{\mathrm{eff}} > 0.} \tag{12.4}$$

La condition de raccord fixe Ω_{proj}, donc $\omega_{\mathrm{proj}} = c_t \Omega_{\mathrm{proj}}$, tandis que la coupure valide ou rejette l'état sans déplacer sa fréquence.

12.7 Quantification de l'angle conique

La branche quasi-c_t 3DOF hérite de la quantification conique universelle du secteur 3DOF. On retient donc

$$\boxed{\sin^2\alpha \in \left\{\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right\}.} \tag{12.5}$$

Ces deux valeurs coïncident avec celles obtenues pour les autres familles 3DOF et résultent de la même quantification conique interne.

12.8 Cas limites et lecture physique

Texture pure. Si $\omega_c = 0$, alors

$$\omega_0 = |k|\,v, \qquad \omega_{\mathrm{proj}} = |k|\,v\,\sin^2\alpha.$$

Précession pure. Si $k = 0$, alors

$$\omega_0 = |\omega_c|, \qquad \omega_{\mathrm{proj}} = |\omega_c|\,\sin^2\alpha.$$

Cas général. Lorsque $\omega_c \neq 0$ et $k \neq 0$, la fréquence pertinente pour l'énergie et l'action est

$$\omega_{\mathrm{proj}} = \sigma\,\omega_0, \qquad \omega_0 = |\omega_c - kv|, \qquad \sigma = \sin^2\alpha \in \left\{\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right\}.$$

C'est cette fréquence qui intervient à la fois dans

$$E = h_{\mathrm{eff}}\,\omega_{\mathrm{proj}}$$

et dans la sélection spectrale sur $\mathbb{S}^3$ via (12.3).

Chapitre 13

Excitation radiale statique : formulation sur $\mathbb{S}^3$ et conditions d'existence

13.1 Portée et objectif

On étudie l'existence d'une déformation radiale purement statique dans le modèle HSM, sans composante tangentielle, donc sans cycle rapide ni spin, indépendante du temps et localisée sur $\mathbb{S}^3$. On travaille en réduction zonale/axisymétrique et l'on conserve explicitement une non-linéarité dans l'énergie interne radiale.

L'objectif du présent chapitre est double : (i) poser l'équation radiale exacte sur $\mathbb{S}^3$; (ii) identifier des conditions nécessaires à l'existence d'un pulse radial statique de support effectif fini, ainsi que les conditions globales de raccord.

Statut. Le secteur radial pur n'appartient pas aux familles coniques 3DOF : il n'y a ici ni quantification EBK, ni spin géométrique. Le chapitre est un chapitre de formulation et de conditions nécessaires d'existence, et non une fermeture dérivée complète du potentiel radial U_r.

Le potentiel radial U_r n'est pas fermé dans le présent chapitre : on ne cherche ici qu'à établir la forme exacte de l'équation statique sur $\mathbb{S}^3$ et les contraintes générales qu'une solution localisée doit satisfaire.

13.2 Cadre et équation générale sur $\mathbb{S}^3$

On paramètre la déformation radiale par

$$R(s) = R_0 + r(s), \qquad s = R_0\psi \in [0, \pi R_0], \qquad J(s) = R_0^2 \sin^2\Big(\frac{s}{R_0}\Big).$$

On travaille en axisymétrie (zonal). On note κ_r le coefficient radial effectif sans dimension et ρ la masse volumique. La raideur de gradient du secteur radial est $T\kappa_r$, avec

$$c_t^2 = \frac{T}{\rho}.$$

Ainsi, même en régime statique, T intervient dans l'équation radiale par le coefficient de gradient $T\kappa_r$.

En l'absence de champ tangent ($A \equiv 0$), l'équation radiale complète est

$$\rho\, \ddot{r} - T\kappa_r \,\frac{1}{J}\, \partial_s(J\, \partial_s r) + U_r'(r) = 0. \tag{13.1}$$

Régime statique. En régime statique ($\ddot{r} \equiv 0$), (13.1) devient

$$-T\kappa_r \frac{1}{J}\,\partial_s(J\,r_s) + U_r'(r) = 0, \qquad s \in (0, \pi R_0), \tag{13.2}$$

avec les conditions naturelles de régularité aux pôles :

$$J(s)\,r_s(s) \longrightarrow 0 \qquad \text{quand} \qquad s \to 0,\ \pi R_0. \tag{13.3}$$

13.3 Paramétrisation conditionnelle de la non-linéarité radiale

On travaille avec une classe conditionnelle de potentiels radiaux locaux dont le développement au voisinage du cœur s'écrit

$$U_r(r) = \frac{\mu_2}{2}\,r^2 + \frac{\mu_3}{3}\,r^3 + \frac{\mu_4}{4}\,r^4 + \cdots, \qquad \mu_2 > 0, \qquad \mu_4 > 0. \tag{13.4}$$

Cette écriture permet une non-convexité contrôlée, par exemple via $\mu_3 \neq 0$, tout en conservant une stabilisation à grande amplitude.

Les coefficients μ_3 et μ_4 ne sont pas dérivés ici depuis la maille. Ils paramètrent la première non-linéarité radiale locale admissible pour l'analyse statique. Ils ne sont pas consommés par la chaîne de masse Higgs-like NLO locale, qui repose sur le raccord scalaire réduit $\delta_H^*(u)$. Les résultats de la présente section doivent donc être lus comme des conditions d'existence sur la classe de potentiels (13.4), et non comme une fermeture microscopique complète du secteur radial statique.

13.4 Réduction cœur quasi–plan et première intégrale

Dans un cœur étroit, de taille caractéristique $\lambda \ll R_0$, on approxime localement

$$J(s) \simeq J_0 = R_0^2,$$

de sorte que la mesure géométrique est quasi constante dans la fenêtre centrale. On note $s_c > 0$ le rayon de sortie de cœur, c'est-à-dire le point à partir duquel l'on bascule vers le régime extérieur de faible amplitude.

Dans cette approximation, l'équation (13.2) se réduit à

$$-T\kappa_r\,r''(s) + U_r'(r) = 0, \qquad s \in (-s_c, s_c). \tag{13.5}$$

Première intégrale. En multipliant (13.5) par $r'(s)$ puis en intégrant, on obtient

$$\frac{T\kappa_r}{2}\,r'(s)^2 - U_r(r(s)) = C. \tag{13.6}$$

Pulse pair centré. On considère un profil pair centré en $s = 0$, vérifiant

$$r(0) = r_{\max} > 0, \qquad r'(0) = 0,$$

et supposé rejoindre au bord du cœur un régime de faible amplitude raccordé à l'extérieur, avec

$$r(s) \to 0, \qquad r'(s) \to 0 \qquad \text{quand } s \to s_c^-.$$

L'évaluation de (13.6) au centre donne

$$C = -U_r(r_{\max}),$$

tandis que son évaluation à la sortie du cœur donne, dans le régime de faible amplitude,

$$C = 0.$$

Il en résulte la condition nécessaire

$$\boxed{U_r(r_{\max}) = 0 \qquad \text{avec} \qquad r_{\max} > 0.} \tag{13.7}$$

Cas polynomial quartique. Pour le potentiel tronqué

$$U_r(r) = \frac{\mu_2}{2} r^2 + \frac{\mu_3}{3} r^3 + \frac{\mu_4}{4} r^4, \qquad \mu_2 > 0, \quad \mu_4 > 0,$$

la condition $U_r(r_{\max}) = 0$, avec $r_{\max} > 0$, devient

$$\frac{\mu_2}{2} + \frac{\mu_3}{3} r_{\max} + \frac{\mu_4}{4} r_{\max}^2 = 0.$$

Une condition nécessaire pour l'existence d'une racine positive est donc

$$\boxed{\mu_3 < 0, \qquad \frac{\mu_3^2}{9} - \frac{\mu_2 \mu_4}{2} \geq 0.} \tag{13.8}$$

Dans ce cas, les racines candidates sont

$$r_{\max}^{(\pm)} = \frac{2}{\mu_4} \left(-\frac{\mu_3}{3} \pm \sqrt{\frac{\mu_3^2}{9} - \frac{\mu_2 \mu_4}{2}} \right).$$

Portée de la condition. La relation (13.7) est une condition nécessaire locale d'existence dans le cœur quasi–plan. Elle n'est pas suffisante pour assurer l'existence globale sur $\mathbb{S}^3$, car il faut encore satisfaire : (i) le raccord extérieur, (ii) la régularité aux pôles, (iii) l'énergie finie.

Commentaires. (i) Un potentiel strictement convexe

$$U_r(r) = \frac{\mu_2}{2} r^2$$

ne satisfait pas (13.7) pour $r_{\max} > 0$, donc n'admet aucun pulse statique non trivial dans cette approximation.

(ii) Une non-convexité modérée, par exemple via $\mu_3 \neq 0$ ou un terme stabilisant d'ordre supérieur, peut rendre (13.7) réalisable.

(iii) Les corrections de courbure dues à la variation de $J(s)$ dans le cœur sont d'ordre

$$\mathcal{O}\Big(\frac{\lambda^2}{R_0^2}\Big).$$

13.5 Extérieur sphérique (faible amplitude) et raccord

Hors du cœur ($s > s_c$), l'amplitude est faible et l'on linéarise

$$U_r'(r) \simeq \mu_2 \, r.$$

On obtient alors l'équation extérieure zonale sur $\mathbb{S}^3$:

$$-T\kappa_r \left(r_{ss} + \frac{2}{R_0} \cot\Big(\frac{s}{R_0}\Big) r_s \right) + \mu_2 \, r = 0. \tag{13.9}$$

Forme en variable angulaire. En posant

$$\psi = \frac{s}{R_0},$$

l'équation extérieure devient

$$-\kappa_r \, \frac{1}{R_0^2} \Big(r_{\psi\psi} + 2 \cot\psi \, r_\psi \Big) + \mu_2 \, r = 0.$$

Si l'on introduit ensuite

$$x = \cos\psi,$$

on obtient une équation de type Gegenbauer modifiée de la forme

$$(1-x^2)\,r_{xx} - 3x\,r_x - \nu(\nu+2)\,r = 0, \qquad \nu(\nu+2) = \frac{\mu_2 R_0^2}{T\kappa_r} > 0. \tag{13.10}$$

Le signe du terme spectral correspond ici au régime radial statique évanescent, et non à une quantification oscillante de type onde sur $\mathbb{S}^3$.

Cette écriture doit être lue comme la forme zonale extérieure associée au régime radial statique ; la solution retenue est celle qui reste régulière aux pôles au sens de (13.3).

Raccord C^1 au bord du cœur. Au point $s = s_c$, on impose le raccord C^1

$$r_{\mathrm{int}}(s_c) = r_{\mathrm{ext}}(s_c), \qquad r'_{\mathrm{int}}(s_c) = r'_{\mathrm{ext}}(s_c). \tag{13.11}$$

Comme $J(s_c) \neq 0$, cette écriture est équivalente à la continuité du flux Jr_s au bord du cœur.

Le raccord fixe les constantes de la solution extérieure à partir du profil intérieur. Il ne détermine pas a priori $r_{\max}$, qui reste contrôlé par la propriété interne du potentiel via (13.7).

13.6 Formulation variationnelle

L'énergie radiale statique s'écrit

$$\mathcal{E}_{\mathrm{rad}}[r] = 4\pi \int_0^{\pi R_0} \left\{ \frac{T\kappa_r}{2}\, r_s^2 + U_r(r) \right\} R_0^2 \sin^2\!\Big(\frac{s}{R_0}\Big)\, ds. \tag{13.12}$$

L'équation d'Euler–Lagrange associée est précisément (13.2), avec les conditions naturelles de flux nul (13.3) aux pôles.

13.7 Synthèse des conditions nécessaires d'existence

Une excitation radiale statique localisée sur $\mathbb{S}^3$ doit satisfaire simultanément :

(i) Condition locale de cœur. Il doit exister $r_{\max} > 0$ tel que

$$U_r(r_{\max}) = 0,$$

condition nécessaire issue de la première intégrale dans le cœur quasi–plan.

(ii) Condition extérieure. La solution extérieure de (13.9) doit être régulière aux pôles au sens de (13.3).

(iii) Condition de raccord. Le profil intérieur et la solution extérieure doivent se raccorder en C^1 au bord s_c selon (13.11).

(iv) Condition d'énergie finie. On doit avoir

$$r \in H^1([0, \pi R_0]; J\,ds), \qquad \mathcal{E}_{\mathrm{rad}}[r] < \infty.$$

13.8 Conclusion

L'existence d'un pulse radial statique sur $\mathbb{S}^3$ requiert une non-linéarité interne telle que le potentiel effectif U_r admette un zéro non trivial. L'équation sphérique (13.2), les conditions de régularité aux pôles (13.3) et le raccord (13.11) définissent ainsi un problème global bien posé.

Le présent chapitre établit une chaîne de conditions nécessaires d'existence pour la classe conditionnelle de potentiels radiaux (13.4). Comme les coefficients non linéaires μ_3 et μ_4 ne sont pas dérivés ici depuis la maille, la construction effective d'un profil radial statique exact, son raccord explicite et son analyse de stabilité ne constituent pas une fermeture microscopique complète du secteur radial statique. Ce statut ne concerne pas la chaîne de masse Higgs-like NLO locale, qui ne consomme pas μ_3 ni μ_4.

Chapitre 14

Solution Higgs-like oscillante (scalaire, $s = 0$) sur $\mathbb{S}^3$

Statut de l'étiquette Higgs-like. Dans ce chapitre, l'expression *Higgs-like* est une étiquette morphologique interne à HSM. Elle désigne une branche scalaire radiale, sans spin géométrique ($s_g = 0$), oscillante, et susceptible de produire une correction scalaire multiplicative sans échelle. Elle ne constitue pas une identification observationnelle à un état du modèle standard, ni un ancrage sur une masse externe.

14.1 Cadre et conventions

On travaille sur la sphère de dimension 3 de rayon R_0, avec la coordonnée d'arc

$$s = R_0\psi \in (0, \pi R_0), \qquad dV = 4\pi R_0^3 \sin^2\psi \, d\psi = 4\pi R_0^2 \sin^2\Big(\frac{s}{R_0}\Big)\, ds.$$

Le déplacement radial est $R(s,t) = R_0 + r(s,t)$ et le champ tangent est nul,

$$A \equiv 0.$$

Les constantes mécaniques sont la masse volumique ρ, la tension tangentielle T, et le poids radial sans dimension κ_r, défini par

$$T_r = \kappa_r \, T.$$

On note

$$c_r^2 = \frac{T\kappa_r}{\rho}.$$

Le présent chapitre traite une branche *Higgs-like* radiale oscillante sur $\mathbb{S}^3$. L'expression *Higgs-like* désigne ici une étiquette morphologique interne : branche scalaire, sans spin géométrique ($s_g = 0$), portée par le secteur radial, et associée à une correction multiplicative sans échelle.

Le chapitre ferme la correction conditionnelle

$$\delta_H^*(u),$$

ainsi que le facteur associé

$$\mathcal{R}_H(u) := \sqrt{1 + \delta_H^*(u)}.$$

Aucune masse externe n'est introduite dans le présent chapitre.

14.2 Équation radiale linéaire sur $\mathbb{S}^3$

À faible amplitude, le mode zonal radial vérifie

$$\rho\,\ddot{r} - \frac{T\kappa_r}{R_0^2}\Big[\frac{1}{\sin^2\psi}\,\partial_\psi(\sin^2\psi\,\partial_\psi r)\Big] + \mu_2\, r = 0, \tag{14.1}$$

soit, en coordonnée d'arc s,

$$\rho\,\ddot{r} - T\kappa_r\,\frac{1}{J}\,\partial_s(J\,\partial_s r) + \mu_2\, r = 0, \qquad J(s) = R_0^2\sin^2\Big(\frac{s}{R_0}\Big). \tag{14.2}$$

Dans le cœur quasi-plan ($\lambda \ll R_0$, $J \simeq R_0^2$),

$$\rho\,\ddot{r} - T\kappa_r\, r_{ss} + \mu_2\, r = 0, \qquad c_r^2 = \frac{T\kappa_r}{\rho}. \tag{14.3}$$

14.3 Mode harmonique radial localisé (cœur)

On cherche une solution sous la forme

$$r(s,t) = f(s)\cos(\omega_r t), \qquad \omega_r > 0.$$

L'ODE spatiale vaut

$$T\kappa_r\, f'' - (\mu_2 - \rho\omega_r^2)\, f = 0. \tag{14.4}$$

Pour un mode localisé, il faut

$$\mu_2 - \rho\omega_r^2 > 0,$$

et l'on obtient

$$f_{\rm in}(s) = f_0\, e^{-|s|/\ell_r}, \qquad \ell_r^{-2} = \frac{\mu_2 - \rho\omega_r^2}{T\kappa_r}. \tag{14.5}$$

Autrement dit, la localisation radiale impose le seuil

$$\boxed{\omega_r^2 < \frac{\mu_2}{\rho}.} \tag{14.6}$$

14.4 Extérieur sphérique et raccord non rayonnant

On note $s_c > 0$ le bord du cœur. À l'extérieur, à partir de (14.2), on obtient

$$f'' + \frac{2}{R_0}\cot\Big(\frac{s}{R_0}\Big)f' - \ell_r^{-2} f = 0, \qquad \ell_r^{-2} = \frac{\mu_2 - \rho\omega_r^2}{T\kappa_r}. \tag{14.7}$$

La condition de non-rayonnement sélectionne la solution évanescente régulière. Dans une zone d'emboîtement où

$$1 \ll \frac{s - s_c}{\ell_r} \ll \frac{R_0}{\ell_r},$$

on a

$$f''_{\rm out} - \ell_r^{-2} f_{\rm out} = 0,$$

et donc, au leading,

$$\frac{f'_{\rm out}}{f_{\rm out}} = -\,\ell_r^{-1} \qquad \text{tandis que} \qquad \frac{f'_{\rm in}}{f_{\rm in}} = -\,\ell_r^{-1}.$$

Ainsi, au rang meneur, le raccord C^1 n'impose pas de quantification stricte de ω_r :

$$\omega_r \text{ paramètre continûment } \ell_r \quad \text{tant que} \quad \omega_r^2 < \frac{\mu_2}{\rho}, \tag{14.8}$$

les effets globaux de courbure restant d'ordre

$$\mathcal{O}((\ell_r/R_0)^2).$$

La régularité aux pôles impose

$$\sin^2\Big(\frac{s}{R_0}\Big) f'(s) \to 0 \qquad \text{quand} \qquad s \to 0, \pi R_0.$$

Remarque de diagnostic. Le raffinement du raccord extérieur montre qu'au premier ordre utile la log-dérivée extérieure porte un terme géométrique supplémentaire de type $-1/s$ dans la zone locale quasi-euclidienne. Cela fournit une pénalité de raccord naturelle, mais ne crée pas à lui seul une sélection canonique de u.

14.5 Énergie propre et action effective (EDP)

L'énergie volumique associée à

$$r(s,t) = f(s)\cos(\omega_r t)$$

est

$$\mathcal{E} = \frac{\rho}{2}\,\dot r^{\,2} + \frac{T\kappa_r}{2}\,r_s^2 + \frac{\mu_2}{2}\,r^2.$$

Avec

$$dV = 4\pi R_0^2 \sin^2\Big(\frac{s}{R_0}\Big)\,ds,$$

la moyenne temporelle et l'identité obtenue en multipliant (14.4) par f puis en intégrant donnent

$$T\kappa_r \int f_s^2\,dV = (\mu_2 - \rho\omega_r^2)\int f^2\,dV.$$

Par suite, l'énergie propre vaut

$$E_0 = \frac{\mu_2}{2}\int_{\mathbb{S}^3} f(s)^2\,dV. \tag{14.9}$$

Pour $f_{\text{in}}(s) = f_0 e^{-|s|/\ell_r}$ et $\ell_r \ll R_0$,

$$\int_{\mathbb{S}^3} f^2\,dV \simeq 4\pi \int_0^\infty f_0^2 e^{-2s/\ell_r} s^2\,ds = \pi f_0^2 \ell_r^3,$$

d'où

$$h_{\text{eff}}^{(H)} := \frac{E_0}{\omega_r} \simeq \frac{\pi}{2}\,\frac{\mu_2}{\omega_r}\,f_0^2\ell_r^3 = \frac{\pi}{2}\,f_0^2\,\frac{\mu_2\,(T\kappa_r)^{3/2}}{\omega_r\,(\mu_2 - \rho\omega_r^2)^{3/2}}. \tag{14.10}$$

Sans contrainte supplémentaire, $h_{\text{eff}}^{(H)}$ dépend de f_0 et de ω_r.

14.6 Constante $h_{\text{eff}}^{(H)}$ et contrainte modale commune sur $\mathbb{S}^3$

Réduction modale. On pose

$$r(s,t) = q(t)\,\phi(s)$$

et

$$-\frac{T\kappa_r}{R_0^2}\,\frac{1}{\sin^2\psi}\,\partial_\psi(\sin^2\psi\,\partial_\psi\phi) + \mu_2\,\phi = \rho\omega_r^2\,\phi, \qquad \psi = \frac{s}{R_0}.$$

Le lagrangien réduit est

$$L_{\text{red}}(q) = \frac{M}{2}\dot q^{\,2} - \frac{M\omega_r^2}{2}q^2, \qquad M := \int_{\mathbb{S}^3}\rho\,\phi^2\,dV.$$

Pour $q(t) = Q\cos(\omega_r t)$,

$$E_0 = \frac{M}{2}\omega_r^2 Q^2.$$

L'invariant modal

$$J := \frac{E_0}{\omega_r}$$

est de même nature que celui des autres familles localisées. On pose alors le niveau canonique commun

$$J_\star = h_{\text{eff}}$$

et on impose

$$\boxed{h_{\text{eff}}^{(H)} = h_{\text{eff}}} \tag{14.11}$$

au même niveau d'excitation et au même ordre. Dans l'approximation de cœur,

$$f_0^2 = \frac{2h_{\text{eff}}\,\omega_r}{\pi\mu_2\ell_r^3}, \qquad E_0 = h_{\text{eff}}\omega_r. \tag{14.12}$$

14.7 Sélection spectrale et coupure d'amplitude sur $\mathbb{S}^3$

Sélection spectrale. Au bord s_c, l'égalité des log-dérivées au leading montre que la MSE ne discrétise pas ω_r au rang meneur :

$$\boxed{\text{pas de quantification stricte de } \omega_r \text{ (scalaire localisé, un lobe).}}$$

Les effets globaux de géométrie induisent seulement des décalages d'ordre

$$\mathcal{O}((\ell_r/R_0)^2).$$

Coupure locale. Au bord s_c,

$$\frac{T\kappa_r}{2}f'(s_c)^2 + \frac{\mu_2}{2}f(s_c)^2 \le \sigma\, T\kappa_r, \qquad 0 < \sigma < 1,$$

et, avec $f'(s_c) = -\ell_r^{-1}f(s_c)$,

$$\boxed{f(s_c)^2 \le \frac{2\sigma T\kappa_r}{T\kappa_r\ell_r^{-2} + \mu_2} = \frac{2\sigma T\kappa_r}{2\mu_2 - \rho\omega_r^2}.} \tag{14.13}$$

Cette coupure borne l'amplitude sans fixer ω_r.

14.8 Construction scalaire LO de la brique $B(u)$

Statut. La construction ci-dessous établit la forme fermée LO de la brique scalaire $B(u)$ dans le schéma MSE scalaire retenu pour le canal radial ancré. Le profil $a(\xi) = \operatorname{sech}\xi$ est utilisé comme représentant calculable de la classe des profils localisés au LO. Le théorème 14.3 établit ensuite que la brique scalaire obtenue est indépendante du choix précis du profil à $\mathcal{O}(\kappa^2)$ près.

Cadre. On travaille avec le noyau de cœur canonique $a(\xi) = \operatorname{sech}\xi$ et la fenêtre heat-kernel zonale sur $\mathbb{S}^3$,

$$W_\ell(u) = e^{-u\ell(\ell+2)}, \qquad u > 0.$$

Le mode radial localisé est traité au niveau LO par une réduction scalaire de canal ; la MSE agit donc sur le *profil fenêtré canonique* et non directement sur la solution linéaire exacte $f_{\text{in}}(s) = f_0 e^{-|s|/\ell_r}$.

Remarque de compatibilité de profil. Le cœur radial exact obtenu à partir de l'équation linéaire locale est exponentiel, $f_{\mathrm{in}}(s) = f_0 e^{-|s|/\ell_r}$, tandis que la fermeture scalaire LO ci-dessous utilise le profil canonique $a(\xi) = \operatorname{sech}\xi$ pour définir les opérateurs de fenêtre. Le présent chapitre distingue donc explicitement : (i) la *cinématique locale exacte* du mode radial, (ii) la *fermeture spectrale canonique LO* du canal scalaire. Le passage entre ces deux niveaux est justifié, au rang LO, par le théorème d'universalité scalaire établi plus bas : le profil sech doit être lu comme un représentant canonique de la classe des profils localisés, et non comme une identification littérale au profil exponentiel local.

Condition MSE et opérateurs. Au rang LO, l'application de la fenêtre MSE conduit à l'égalité scalaire

$$A_H(u)\,\mathcal{O}_2^{(S)\prime}(u) = A_{\tan}(u)\,\mathcal{O}_1^{(S)\prime}(u),$$

avec les opérateurs scalaires purs

$$\mathcal{O}_1^{(S)}(u) = (u\,\operatorname{csch} u)^2, \qquad \mathcal{O}_2^{(S)}(u) = 2\,(u\coth u - 1)\,\operatorname{csch}^2 u. \tag{14.14}$$

Élimination et forme $B(u)$. En éliminant $A_{\tan}(u)$, on obtient l'incrément scalaire pur

$$\boxed{B(u) = \mathcal{O}_2^{(S)}(u) - \frac{\mathcal{O}_2^{(S)\prime}(u)}{\mathcal{O}_1^{(S)\prime}(u)}\,\mathcal{O}_1^{(S)}(u).} \tag{14.15}$$

La brique scalaire de coeur associée à $B(u)$ est

$$\boxed{\delta_{H,\mathrm{core}}^{(\mathrm{LO})}(u) = A_H(u)\,B(u).} \tag{14.16}$$

Cette quantité n'est pas encore l'incrément complet consommé par la chaîne de masse : l'ancrage scalaire de bord, puis le raffinement NLO minimal, sont introduits dans les sections suivantes.

14.9 Universalité LO de la fermeture scalaire

Objet. Le présent paragraphe ne cherche pas à identifier le profil exact du cœur Higgs à la forme canonique $a(\xi) = \operatorname{sech}\xi$. Il vise un résultat plus faible mais suffisant au niveau LO : montrer que la brique scalaire $B(u)$ est universelle à $\mathcal{O}(\kappa^2)$ près pour une classe large de profils localisés de même échelle

$$\kappa := \frac{\ell_r}{R_0} \ll 1.$$

Cadre générique. On considère un profil localisé générique de la forme

$$f_\kappa(\chi) = F_0\,a\!\left(\frac{\chi}{\kappa}\right), \qquad \kappa = \frac{\ell_r}{R_0} \ll 1,$$

où a est pair, positif, monotone décroissant pour $\xi > 0$, à une seule échelle de localisation, et possède des moments finis. Une grandeur scalaire LO du canal radial s'écrit alors génériquement sous la forme

$$\mathcal{I}_j(u;a) = \int_0^\pi K_j(u,\chi)\,f_\kappa(\chi)^2\,\sin^2\chi\,d\chi, \qquad j = 1,2,$$

où $K_j(u,\chi)$ est un noyau scalaire de canal.

Lemme 14.1 (lissité locale des noyaux scalaires heat-kernel)**.** *On considère un noyau scalaire zonal de canal sur $\mathbb{S}^3$ de la forme*

$$K_j(u,\chi) = \sum_{\ell\geq 0} b_{\ell,j}(u)\,(\ell+1)\,Z_\ell(\chi), \qquad j=1,2,$$

où

$$Z_\ell(\chi) = \frac{\sin((\ell+1)\chi)}{(\ell+1)\sin\chi}$$

est le zonal scalaire, et où les coefficients spectraux vérifient, pour $u>0$ fixé,

$$|b_{\ell,j}(u)| \leq C_u\,(1+\ell)^m e^{-u\ell(\ell+2)}$$

pour une certaine constante $C_u>0$ et un certain entier $m\geq 0$.

Alors $K_j(u,\chi)$ est C^∞ en $\chi=0$, pair en χ, et admet le développement local

$$K_j(u,\chi) = K_j(u,0) + \mathcal{O}(\chi^2).$$

En particulier,

$$\partial_\chi K_j(u,0) = 0.$$

Démonstration. Pour tout ℓ, le zonal $Z_\ell(\chi)$ est analytique pair au voisinage de $\chi=0$, avec développement

$$Z_\ell(\chi) = 1 - \frac{\ell(\ell+2)}{6}\chi^2 + \mathcal{O}(\chi^4).$$

Comme les coefficients $b_{\ell,j}(u)$ décroissent exponentiellement en $\ell(\ell+2)$, ils dominent toute croissance polynomiale en ℓ. Le critère de Weierstrass permet alors de sommer terme à terme le développement local et ses dérivées. On obtient

$$K_j(u,\chi) = K_j(u,0) + \mathcal{O}(\chi^2),$$

et donc $\partial_\chi K_j(u,0)=0$. □ □

Lemme 14.2 (factorisation LO des observables scalaires)**.** *Sous les hypothèses précédentes, on a*

$$\mathcal{I}_j(u;a) = M_0[a]\,\mathcal{K}_j(u) + \mathcal{O}(\kappa^2), \qquad j=1,2,$$

avec un même *facteur de profil*

$$M_0[a] = F_0^2\,\kappa^3 \int_0^\infty a(\xi)^2\,\xi^2\,d\xi,$$

et des fonctions de canal

$$\mathcal{K}_j(u) = K_j(u,0).$$

Démonstration. On pose $\chi=\kappa\xi$. Alors

$$f_\kappa(\chi)^2 = F_0^2\,a(\xi)^2, \qquad \sin^2(\kappa\xi) = \kappa^2\xi^2 + \mathcal{O}(\kappa^4\xi^4).$$

On obtient donc

$$\mathcal{I}_j(u;a) = F_0^2\,\kappa^3 \int_0^{\pi/\kappa} K_j(u,\kappa\xi)\,a(\xi)^2\,\xi^2\,d\xi + \mathcal{O}(\kappa^5).$$

Le lemme 14.1 donne

$$K_j(u,\kappa\xi) = K_j(u,0) + \mathcal{O}(\kappa^2\xi^2).$$

Par conséquent,

$$\mathcal{I}_j(u;a) = F_0^2\,\kappa^3\,K_j(u,0)\int_0^\infty a(\xi)^2\,\xi^2\,d\xi + \mathcal{O}(\kappa^5),$$

soit

$$\mathcal{I}_j(u;a) = M_0[a]\,\mathcal{K}_j(u) + \mathcal{O}(\kappa^2).$$ □

Théorème 14.3 (universalité LO de la brique scalaire). Sous les hypothèses précédentes, la brique scalaire

$$B(u) = \mathcal{O}_2^{(S)}(u) - \frac{\mathcal{O}_2^{(S)\prime}(u)}{\mathcal{O}_1^{(S)\prime}(u)}\,\mathcal{O}_1^{(S)}(u)$$

est universelle au LO, c'est-à-dire indépendante du profil exact a à $\mathcal{O}(\kappa^2)$ près.

Démonstration. Le lemme 14.2 donne

$$\mathcal{I}_1(u;a) = M_0[a]\,\mathcal{K}_1(u) + \mathcal{O}(\kappa^2), \qquad \mathcal{I}_2(u;a) = M_0[a]\,\mathcal{K}_2(u) + \mathcal{O}(\kappa^2).$$

Le même facteur de profil $M_0[a]$ apparaît donc dans les deux opérateurs scalaires. Lors de l'élimination de canal, ce facteur commun se simplifie, de sorte que la combinaison

$$\mathcal{O}_2^{(S)}(u) - \frac{\mathcal{O}_2^{(S)\prime}(u)}{\mathcal{O}_1^{(S)\prime}(u)}\,\mathcal{O}_1^{(S)}(u)$$

ne dépend plus du profil exact au LO. □ □

Conséquence éditoriale. Le choix $a(\xi) = \operatorname{sech}\xi$ ne doit donc pas être lu ici comme l'affirmation que le cœur exact du Higgs est littéralement un profil sech, mais comme le choix d'un *représentant canonique* de la classe universelle de profils localisés au LO.

14.10 Projecteur scalaire $A_H(u)$ et cas monopole

Base zonale scalaire sur $\mathbb{S}^3$. On utilise les zonaux

$$Z_\ell(\chi) = \frac{\sin((\ell+1)\chi)}{(\ell+1)\sin\chi}, \qquad \Delta Z_\ell = -\ell(\ell+2)Z_\ell, \qquad \ell = 0,1,2,\dots,$$

orthogonaux pour la mesure $d\mu(\chi) = \sin^2\chi\,d\chi$. Le fenêtrage heat-kernel est $W_\ell(u) = e^{-u\ell(\ell+2)}$. On note $\hat{c}_\ell^{(S)}(u)$ les coefficients zonaux normalisés.

Poids et normalisation de canal. L'addition theorem sur $\mathbb{S}^3$ au point coïncident fournit une dégénérescence proportionnelle à $(\ell+1)^2$. En projection zonale ($m=0$), on prélève un poids linéaire

$$\tilde{w}_\ell = \ell + 1.$$

L'homogénéité de canal scalaire impose un seul facteur J_0. On obtient ainsi

$$\boxed{A_H(u) = \frac{J_0}{K_3}\sum_{\ell\geq 0}(\ell+1)\,\hat{c}_\ell^{(S)}(u)^2, \qquad K_3 = \frac{J_2}{J_0}.} \tag{14.17}$$

Cas monopole. Quand la densité spectrale est dominée par $\ell = 0$,

$$A_H(u) \xrightarrow[\hat{c}_0^2\to 1]{} \frac{J_0}{K_3}\,\hat{c}_0^{(S)}(u)^2 = \Big(\frac{J_0^2}{J_2}\Big)\hat{c}_0^{(S)}(u)^2.$$

14.11 Dominance monopole en régime cœur quasi-plan

Énoncé. Si $\ell_r \ll R_0$, soit $\kappa := \ell_r/R_0 \ll 1$, alors pour le profil localisé $f(s) = f_0 e^{-|s|/\ell_r}$ on a

$$\boxed{\hat{c}_0^{(S)}(u)^2 = 1 - \mathcal{O}(\kappa^2), \qquad \hat{c}_{\ell\geq 1}^{(S)}(u)^2 = \mathcal{O}(\kappa^2).} \tag{14.18}$$

Preuve (esquisse). La projection zonale scalaire est

$$a_\ell = \int_0^\pi f(R_0\chi)\, Z_\ell(\chi)\, \sin^2\chi\, d\chi.$$

Comme f est concentrée sur $\chi \lesssim \kappa \ll 1$, on développe

$$Z_\ell(\chi) = 1 - \frac{\ell(\ell+2)}{6}\chi^2 + \cdots .$$

Après fenêtrage heat-kernel et normalisation, les composantes non monopoles sont d'ordre $\mathcal{O}(\kappa^2)$, ce qui donne (14.18).

14.12 Ancrage scalaire au raccord S^3 : brique $\zeta(u)$ et incrément corrigé

Origine géométrique. L'équation extérieure exacte (14.7) comporte le terme de courbure

$$\frac{2}{R_0}\cot\chi\, f', \qquad \chi = \frac{s}{R_0}.$$

Au raccord C^1, ce terme induit, après fenêtrage heat-kernel et réduction zonale scalaire, une brique d'ancrage pure $\zeta(u)$.

Forme fermée. Avec les opérateurs scalaires

$$\mathcal{O}_1^{(S)}(u) = (u\ \mathrm{csch}\, u)^2, \qquad \mathcal{O}_2^{(S)}(u) = 2\,(u\coth u - 1)\ \mathrm{csch}^2 u,$$

la brique d'ancrage vaut

$$\boxed{\zeta(u) = \tfrac{1}{2}\, u\, \coth u\, \mathrm{csch}^2 u.} \tag{14.19}$$

Incrément avec ancrage local. On définit la correction locale d'ancrage

$$\Sigma_{\mathrm{loc}}(u) = \zeta(u).$$

La brique scalaire avec ancrage local vaut alors

$$\boxed{\delta_{H,\mathrm{anchor}}^{(\mathrm{LO})}(u) = A_H(u)\,[B(u) + \Sigma_{\mathrm{loc}}(u)] = A_H(u)\,[B(u) + \zeta(u)].} \tag{14.20}$$

Cette expression n'est pas encore l'incrément final δ_H^* de la chaîne de masse NLO minimale. Elle fournit la brique locale qui sera complétée par le terme de bord Σ_{rim}.

Preuve courte de $\zeta(u)$. Au voisinage du bord, on pose localement

$$f_{\mathrm{out}}(\chi) = \Phi(\chi) e^{-s/\ell_r},$$

avec Φ lisse. La log-dérivée extérieure vaut

$$\frac{f'_{\mathrm{out}}}{f_{\mathrm{out}}} = -\frac{1}{\ell_r} + \frac{\Phi'}{\Phi}.$$

Le terme de courbure dans (14.7) produit alors, après réduction scalaire, un décalage additif de log-dérivée

$$\Delta_{\mathrm{ext}}^{(\mathrm{curv})}(u) = \frac{1}{2} u \coth u\ \mathrm{csch}^2 u.$$

On obtient donc

$$\boxed{\zeta(u) = \tfrac{1}{2} u \coth u\ \mathrm{csch}^2 u.} \tag{14.21}$$

14.13 Limite du cœur radial passif et cœur actif minimal

Changement de niveau de description. Les sections précédentes ont utilisé le cœur passif local comme modèle cinématique et énergétique de référence. La présente section réexamine le raccord sous la forme zonale radiale exacte, où le terme géométrique $2/s$ du laplacien radial ne peut plus être négligé. C'est à ce niveau de description que s'établit le no-go du cœur passif régulier et que s'introduit le cœur actif minimal.

No-go du cœur radial passif. Le cœur radial purement linéaire et régulier, traité dans l'approximation locale zonale

$$f'' + \frac{2}{s} f' - \ell_r^{-2} f = 0,$$

admet intérieurement la solution régulière

$$f_{\mathrm{in}}^{(\mathrm{reg})}(s) = C\,\frac{\sinh(s/\ell_r)}{s},$$

avec log-dérivée au bord $s_c = u\ell_r$

$$\Lambda_{\mathrm{in}}(u) = \frac{1}{\ell_r}\Big(\coth u - \frac{1}{u}\Big).$$

La queue extérieure décroissante locale

$$f_{\mathrm{out}}(s) = D\,\frac{e^{-s/\ell_r}}{s}$$

porte la log-dérivée

$$\Lambda_{\mathrm{out}}(u) = -\frac{1}{\ell_r}\Big(1 + \frac{1}{u}\Big).$$

L'égalité $\Lambda_{\mathrm{in}}(u) = \Lambda_{\mathrm{out}}(u)$ est impossible pour $u > 0$, de sorte qu'un cœur radial passif strictement linéaire ne peut pas fermer le raccord à rayon fini.

Lien avec le diagnostic de raccord. Le terme géométrique local $-1/s$, déjà signalé dans §14.4, est précisément celui qui décale la log-dérivée extérieure en

$$\Lambda_{\mathrm{out}}(u) = -\frac{1}{\ell_r}\Big(1 + \frac{1}{u}\Big),$$

et empêche ainsi le raccord C^1 d'un cœur passif régulier à rayon fini. Le no-go du cœur passif n'est donc pas indépendant du diagnostic de raccord : il en constitue la conséquence structurelle.

Cœur actif minimal. On introduit alors un cœur scalaire actif oscillatoire. En coordonnées zonales $\chi = s/R_0$, la solution intérieure régulière minimale s'écrit

$$f_{\mathrm{in}}(\chi) = A\,\frac{\sin(\beta\chi)}{\sin\chi},$$

avec $\beta > 0$, tandis que la queue extérieure exacte sur $\mathbb{S}^3$ est

$$f_{\mathrm{out}}(\chi) = C\,\frac{e^{-\nu\chi}}{\sin\chi}, \qquad \nu^2 = \frac{R_0^2}{\ell_r^2} - 1.$$

Le raccord C^1 au bord $\chi_c = s_c/R_0$ donne

$$\beta\cot(\beta\chi_c) = -\nu.$$

En posant

$$y := \beta\chi_c, \qquad \nu\chi_c = u\sqrt{1 - \frac{\ell_r^2}{R_0^2}}, \qquad \nu\chi_c \simeq u \quad (\ell_r \ll R_0),$$

on obtient la loi minimale exacte de raccord

$$\boxed{y \cot y = -u\sqrt{1 - \frac{\ell_r^2}{R_0^2}},} \tag{14.22}$$

qui se réduit localement à

$$\boxed{y \cot y \simeq -u.} \tag{14.23}$$

Lemme 14.4 (minimalité variationnelle de la continuation active)**.** *Dans la variable transformée*

$$g(\chi) := f(\chi) \sin \chi,$$

le secteur extérieur passif vérifie

$$g'' - \nu^2 g = 0, \qquad \nu^2 = \frac{R_0^2}{\ell_r^2} - 1,$$

tandis que le coeur actif intérieur appartient à la classe

$$g'' + \beta^2 g = 0, \qquad \beta > 0.$$

La continuation active minimale est l'élément de cette classe qui minimise le défaut spectral quadratique par rapport à la continuation par renversement de signe du secteur passif. Elle vérifie

$$\boxed{\beta^2 = \nu^2, \qquad \beta = \nu > 0.} \tag{14.24}$$

Démonstration. Le secteur passif extérieur est gouverné par l'opérateur réduit

$$\mathcal{L}_- := \partial_\chi^2 - \nu^2.$$

La continuation active associée au même module spectral est l'opérateur

$$\mathcal{L}_+^{(0)} := \partial_\chi^2 + \nu^2,$$

obtenu par renversement du signe du terme spectral, sans changement de module.

On autorise plus généralement une continuation active intérieure

$$\mathcal{L}_+(\beta) := \partial_\chi^2 + \beta^2.$$

Son défaut spectral réduit par rapport à la continuation active sans nouvelle échelle est

$$\mathcal{D}(\beta) := \mathcal{L}_+(\beta) - \mathcal{L}_+^{(0)} = (\beta^2 - \nu^2)\,\mathbf{1}.$$

Sur un intervalle de raccord $0 \le \chi \le \chi_c$, la norme quadratique de ce défaut est proportionnelle à

$$\mathfrak{M}(\beta) := \int_0^{\chi_c} \left(\beta^2 - \nu^2\right)^2 d\chi = \chi_c \left(\beta^2 - \nu^2\right)^2.$$

Comme $\chi_c > 0$, le minimum global de $\mathfrak{M}$ sur $\beta > 0$ est atteint si et seulement si

$$\beta^2 - \nu^2 = 0.$$

Donc

$$\beta^2 = \nu^2.$$

La condition $\beta > 0$ sélectionne

$$\beta = \nu.$$

□

Conséquence pour la relation entre y et u. Par définition,

$$y = \beta\chi_c, \qquad \chi_c = \frac{s_c}{R_0}, \qquad u = \frac{s_c}{\ell_r}.$$

Le lemme 14.4 donne alors

$$y = \nu\chi_c.$$

Or

$$\nu = \sqrt{\frac{R_0^2}{\ell_r^2} - 1} = \frac{R_0}{\ell_r}\sqrt{1 - \frac{\ell_r^2}{R_0^2}},$$

donc

$$\boxed{y = u\sqrt{1 - \frac{\ell_r^2}{R_0^2}}.} \tag{14.25}$$

Dans la limite locale $\ell_r \ll R_0$, on retrouve

$$\boxed{y \simeq u.} \tag{14.26}$$

Sélection variationnelle. Le paramètre intérieur β n'est donc plus un degré de liberté indépendant : il est fixé par la minimisation du défaut spectral $\mathfrak{M}(\beta)$ définie dans la preuve du lemme 14.4. On obtient

$$\beta = \nu = \sqrt{\frac{R_0^2}{\ell_r^2} - 1}.$$

La branche active minimale correspond alors à la première solution admissible de la loi de raccord fermée.

Loi de raccord fermée du cœur actif minimal. En réinjectant (14.25) dans la loi de raccord exacte, on obtient une équation fermée pour u :

$$\boxed{u\sqrt{1 - \frac{\ell_r^2}{R_0^2}}\,\cot\left(u\sqrt{1 - \frac{\ell_r^2}{R_0^2}}\right) = -\,u\sqrt{1 - \frac{\ell_r^2}{R_0^2}}.} \tag{14.27}$$

Au niveau local, cela se réduit à

$$\boxed{u\cot u = -u.} \tag{14.28}$$

Fermeture LO du paramètre de raccord. La loi (14.27) ferme le paramètre de raccord du canal Higgs-like. En posant

$$a_H := \sqrt{1 - \frac{\ell_r^2}{R_0^2}}, \qquad y = a_H u,$$

l'équation (14.27) devient

$$y\cot y = -y.$$

Pour $y > 0$, on obtient

$$\cot y = -1.$$

La première branche positive admissible donne

$$y_H^* = \frac{3\pi}{4}.$$

Ainsi,

$$\boxed{u^*_{H,\mathrm{LO}} = \frac{3\pi}{4}\left(1 - \frac{\ell_r^2}{R_0^2}\right)^{-1/2}.} \tag{14.29}$$

Dans le régime de cœur mince,

$$u^*_{H,\mathrm{LO}} = \frac{3\pi}{4} + \mathcal{O}\left(\frac{\ell_r^2}{R_0^2}\right).$$

Le paramètre u n'est donc pas laissé libre dans la fermeture LO du canal Higgs-like.

14.14 Raffinement NLO minimal par compliance inverse de bord

Le calcul LO+ancrage utilise la correction scalaire pure

$$\Sigma_{\mathrm{loc}}(u) = \zeta(u), \qquad \zeta(u) = \frac{1}{2}\, u \coth u \operatorname{csch}^2 u.$$

On introduit ici un raffinement NLO minimal du raccord, fondé non sur une raideur supplémentaire de bord, mais sur une *compliance cyclique de reclosure*.

Lemme 14.5 (moyenne de compliance orientée et contrôle quadratique)**.** *Pour une oscillation harmonique au bord*

$$r_c(t) = f_c \cos(\omega t), \qquad f_c > 0,$$

la moyenne absolue orientée vaut

$$\boxed{\left\langle \frac{|r_c(t)|}{f_c} \right\rangle_T = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{|r_c(t)|}{f_c}\, dt = \frac{2}{\pi}, \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}.} \tag{14.30}$$

Le contrôle quadratique associé au même cycle est

$$\boxed{\left(\left\langle \frac{r_c(t)^2}{f_c^2} \right\rangle_T\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}.} \tag{14.31}$$

Démonstration. En posant $\theta = \omega t$, on obtient

$$\left\langle \frac{|r_c(t)|}{f_c} \right\rangle_T = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\cos\theta|\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\cdot 4 = \frac{2}{\pi}.$$

De même,

$$\left\langle \frac{r_c(t)^2}{f_c^2} \right\rangle_T = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta = \frac{1}{2},$$

d'où le contrôle RMS $1/\sqrt{2}$. □

Choix de la moyenne active. La compliance de bord utilisée ici est une compliance linéaire : elle rapporte une excursion de bord à une traction locale. Dans une reclosure cyclique, les deux demi-cycles opposés contribuent avec la même amplitude de relâchement, mais avec des signes opposés du déplacement instantané. La grandeur pertinente est donc l'amplitude orientée moyenne, c'est-à-dire $\langle |r_c|/f_c \rangle_T = 2/\pi$.

La moyenne quadratique

$$\left\langle r_c^2/f_c^2 \right\rangle_T^{1/2} = 1/\sqrt{2}$$

mesure une fermeture d'énergie RMS. Elle fournit un contrôle de stabilité quadratique, mais elle n'est pas la fermeture active de la compliance linéaire utilisée dans la reclosure NLO minimale.

Couplage local de bord. On note

$$\sigma_{\mathrm{loc}}(u) := \frac{\Sigma_{\mathrm{loc}}(u)}{u} = \frac{\zeta(u)}{u} = \frac{1}{2}\coth u\,\operatorname{csch}^2 u.$$

Le terme local LO correspond donc à

$$\Sigma_{\mathrm{loc}}(u) = u\,\sigma_{\mathrm{loc}}(u) = \zeta(u).$$

Loi statique locale au pic. Au pic d'excursion du bord,

$$r_c(t) = f_c\cos(\omega t), \qquad |r_c|_{\mathrm{peak}} = f_c,$$

la réduction locale de bord donne la loi statique effective

$$\boxed{\tau_{\mathrm{peak}}(u) = \sigma_{\mathrm{loc}}(u)\,f_c,} \tag{14.32}$$

où τ_{peak} est la traction de bord associée au pic. Cette relation est une loi de bord au pic d'oscillation ; elle n'introduit pas une nouvelle fermeture indépendante du cœur. La compliance statique locale vaut alors

$$\boxed{\mathcal{C}_{\mathrm{stat}}(u) := \frac{f_c}{\tau_{\mathrm{peak}}(u)} = \frac{1}{\sigma_{\mathrm{loc}}(u)}.} \tag{14.33}$$

Compliance cyclique. La compliance pertinente pour la reclosure sur un cycle est la compliance linéaire orientée moyenne, définie par

$$\boxed{\mathcal{C}^{(1)}_{\partial H}(u) := \frac{\langle |r_c(t)| \rangle_T}{\tau_{\mathrm{peak}}(u)}.} \tag{14.34}$$

Le lemme 14.5 et (14.32) donnent alors

$$\boxed{\mathcal{C}^{(1)}_{\partial H}(u) = \frac{(2/\pi) f_c}{\sigma_{\mathrm{loc}}(u) f_c} = \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{\sigma_{\mathrm{loc}}(u)} = \frac{2}{\pi}\,\mathcal{C}_{\mathrm{stat}}(u).} \tag{14.35}$$

Le contrôle quadratique associé serait

$$\boxed{\mathcal{C}^{(2)}_{\partial H}(u) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathcal{C}_{\mathrm{stat}}(u).} \tag{14.36}$$

Sélection de la compliance active. Le facteur $2/\pi$ n'est pas choisi par comparaison à une masse aval. Il est imposé par la nature de l'opérateur de bord retenu : la reclosure NLO minimale agit au premier ordre comme une compliance linéaire entre excursion de bord et traction locale. Une compliance linéaire additionne les amplitudes de relâchement des deux demi-cycles avec la même orientation effective ; la grandeur active est donc la moyenne absolue orientée

$$\langle |r_c|/f_c \rangle_T = \frac{2}{\pi}.$$

Le coefficient $1/\sqrt{2}$ correspond au contrôle quadratique RMS du même cycle. Il contrôle l'échelle énergétique associée, mais il ne définit pas la compliance linéaire de bord utilisée dans la reclosure locale minimale. Employer $1/\sqrt{2}$ à la place de $2/\pi$ reviendrait à changer de fermeture, en passant d'une compliance linéaire orientée à une fermeture quadratique RMS.

Lemme 14.6 (unicité du mismatch scalaire local de premier ordre)**.** *Au bord $s = s_c$, tout opérateur scalaire local linéaire de premier ordre agissant sur le champ radial s'écrit sous la forme*

$$\mathfrak{L}[r] = a(u)\,\partial_s r_c + b(u)\,r_c, \qquad r_c := r(s_c).$$

Si l'on impose que $\mathfrak{L}[r]$ mesure un défaut de raccord et s'annule sur la queue extérieure passive, alors $\mathfrak{L}[r]$ est proportionnel au mismatch local unique

$$\boxed{\mathfrak{M}_u[r] := (\partial_s r - \Lambda_{\mathrm{out}}(u)\,r)_{s=s_c}\,.}$$

Démonstration. Au premier ordre, dans le canal scalaire zonal, un opérateur local de bord ne peut dépendre que de r_c et de sa dérivée normale $\partial_s r_c$. Il est donc de la forme

$$\mathfrak{L}[r] = a(u)\,\partial_s r_c + b(u)\,r_c.$$

S'il doit mesurer un défaut de raccord, il doit s'annuler sur la queue extérieure passive. Or, sur cette queue,

$$\partial_s r_c = \Lambda_{\mathrm{out}}(u)\,r_c.$$

On doit donc avoir

$$a(u)\Lambda_{\mathrm{out}}(u)\,r_c + b(u)\,r_c = 0 \qquad \text{pour tout } r_c,$$

ce qui impose

$$b(u) = -a(u)\Lambda_{\mathrm{out}}(u).$$

Par suite,

$$\mathfrak{L}[r] = a(u)\big(\partial_s r_c - \Lambda_{\mathrm{out}}(u)\,r_c\big) = a(u)\,\mathfrak{M}_u[r].$$

Ainsi, à un facteur multiplicatif près, le mismatch scalaire local de premier ordre est unique. □ □

Conséquence pour le bord NLO. Le bord LO est déjà gouverné par la réduction scalaire locale du mismatch $\mathfrak{M}_u[r]$, ce qui produit le couplage

$$\sigma_{\mathrm{loc}}(u) = \frac{\zeta(u)}{u}.$$

Si le raffinement NLO reste dans le même canal scalaire local de premier ordre, alors il ne peut pas introduire un noyau local indépendant : il ne fait que renormaliser le même mismatch $\mathfrak{M}_u[r]$. Le bord NLO hérite donc nécessairement du même couplage local $\sigma_{\mathrm{loc}}(u)$.

Troncature NLO locale minimale. Au rang NLO minimal retenu ici, on ne change pas de classe d'opérateurs : le bord reste scalaire, local, linéaire au premier ordre dans le défaut de raccord, et aucune variable de bord indépendante n'est introduite. Cette troncature n'est pas un ajustement phénoménologique ; elle exprime le fait que le présent chapitre traite uniquement la première correction de reclosure dans le même canal radial scalaire que le raccord LO.

Par le lemme 14.6, tout opérateur local scalaire de premier ordre mesurant un défaut de raccord est alors nécessairement proportionnel au mismatch unique

$$\mathfrak{M}_u[r] = (\partial_s r - \Lambda_{\mathrm{out}}(u) r)_{s=s_c}\,.$$

Le raffinement NLO local minimal ne peut donc pas introduire une nouvelle structure de bord ; il ne peut que renormaliser la compliance associée à ce même mismatch.

Théorème 14.7 (raffinement NLO local minimal du raccord scalaire). Dans la troncature NLO locale minimale du canal radial scalaire, la correction scalaire totale de raccord vaut

$$\boxed{\Sigma_H^{(\mathrm{NLO,min})}(u) = \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \zeta(u).} \tag{14.37}$$

La loi de raccord devient alors

$$\boxed{y \cot y = -u + \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \zeta(u),} \tag{14.38}$$

et, dans la version exacte sur $\mathbb{S}^3$,

$$\boxed{y \cot y = -\, u\sqrt{1 - \frac{\ell_r^2}{R_0^2}} + \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \zeta(u).} \tag{14.39}$$

Démonstration. Par l'unicité du mismatch local $\mathfrak{M}_u[r]$, démontrée au lemme 14.6, le raffinement NLO local minimal ne peut porter que sur la compliance associée à ce même mismatch. Il n'existe donc pas, dans cette troncature, de second noyau local indépendant à ajouter au bord.

Le coefficient effectif de bord associé à la compliance cyclique active est

$$\boxed{\sigma_{\mathrm{rim}}^{\mathrm{eff}}(u) = \left(\mathcal{C}_{\partial H}^{(1)}(u)\right)^{-1}.} \tag{14.40}$$

Par (14.35), on obtient

$$\boxed{\sigma_{\mathrm{rim}}^{\mathrm{eff}}(u) = \frac{\pi}{2}\, \sigma_{\mathrm{loc}}(u).} \tag{14.41}$$

La correction sans dimension correspondante vaut donc

$$\boxed{\Sigma_{\mathrm{rim}}(u) = u\, \sigma_{\mathrm{rim}}^{\mathrm{eff}}(u) = \frac{\pi}{2}\, \zeta(u).} \tag{14.42}$$

On additionne alors le terme LO local et le terme NLO :

$$\Sigma_H^{(\mathrm{NLO,min})}(u) = \Sigma_{\mathrm{loc}}(u) + \Sigma_{\mathrm{rim}}(u) = \zeta(u) + \frac{\pi}{2}\zeta(u) = \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \zeta(u).$$

La substitution dans la loi de raccord donne (14.38) puis (14.39). □ □

Incrément de masse associé au raffinement NLO minimal. L'incrément sans échelle consommé par la chaîne de masse Higgs-like est celui du schéma NLO local minimal. On définit donc

$$\boxed{\delta_H^*(u) := A_H(u) \left[B(u) + \Sigma_H^{(\mathrm{NLO,min})}(u)\right] = A_H(u) \left[B(u) + \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \zeta(u)\right].} \tag{14.43}$$

Dans le cas monopole,

$$A_H(u) = \frac{J_0^2}{J_2}\, \hat{c}_0^{(S)}(u)^2 + \mathcal{O}(\kappa^2).$$

La loi de masse HSM associée au même schéma est

$$\boxed{m_{\mathrm{Hlike}}^{(\mathrm{HSM})} = m_{\mathrm{NSL,ch}}^{(\mathrm{HSM})} \sqrt{1 + \delta_H^*(u_H^*)}.} \tag{14.44}$$

Fermeture NLO minimale du paramètre de raccord. Dans le raffinement NLO minimal défini par (14.39), le paramètre de raccord est déterminé par l'équation fermée

$$\boxed{u_H^* a_H \cot(u_H^* a_H) = -u_H^* a_H + \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)\zeta(u_H^*), \qquad a_H = \sqrt{1 - \frac{\ell_r^2}{R_0^2}}.} \tag{14.45}$$

Au rang local,

$$a_H = 1 + \mathcal{O}\left(\frac{\ell_r^2}{R_0^2}\right),$$

et (14.45) devient

$$u_H^* \cot u_H^* = -u_H^* + \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)\zeta(u_H^*).$$

Sa première racine positive dans l'intervalle $(\pi/2, \pi)$ vaut

$$u_{H,\mathrm{NLO}}^* \simeq 2.3302825264.$$

14.15 Cinématique interne du mode radial nu

Le mode radial localisé pur relève, au niveau de la déformation radiale nue, de la cinématique locale associée à la raideur radiale effective. Sa vitesse caractéristique interne est

$$c_{\mathcal{F}} = c_r, \qquad c_r^2 = \frac{T\kappa_r}{\rho} = \kappa_r c_t^2.$$

La loi de passage du repère comobile radial au repère fixe prend donc la forme

$$E_r(u) = \Gamma_r E_{r,0}, \qquad P_r(u) = \Gamma_r \frac{u}{c_r^2} E_{r,0}, \qquad \Gamma_r = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c_r^2}},$$

et la dispersion interne du mode radial nu est

$$E_r(u)^2 = E_{r,0}^2 + c_r^2 P_r(u)^2.$$

En mouvement, le mode radial nu possède une cinématique interne caractérisée par

$$c_r = \sqrt{T\kappa_r/\rho} = \sqrt{\kappa_r}\, c_t.$$

Cette vitesse est celle de la déformation radiale nue. La vitesse limite observable du scalaire Higgs-like, après raccord au domaine relativiste effectif, est la vitesse commune des branches massiques observables, c_t. Ce raccord relève de la correspondance observationnelle et du lien avec les théories effectives ; il n'est pas fermé dans le présent chapitre radial.

14.16 Fréquence observée vs. fréquence propre

Pour la solution radiale nue boostée $r(s,t) = f(\xi)\cos(\omega_r \tau)$, avec

$$\xi = \Gamma_r(s - ut), \qquad \tau = \Gamma_r\Big(t - \frac{u}{c_r^2}s\Big),$$

la phase labo s'écrit

$$\varphi(s,t) = \omega_{\mathrm{lab}} t - ks, \qquad \omega_{\mathrm{lab}} = \Gamma\omega_r, \qquad k = \Gamma\frac{u}{c_r^2}\omega_r.$$

Elle fournit les reconstructions invariantes

$$\boxed{\omega_r = \sqrt{\omega_{\mathrm{lab}}^2 - c_r^2 k^2}, \qquad u = \frac{c_r^2 k}{\omega_{\mathrm{lab}}}, \qquad \Gamma = \frac{\omega_{\mathrm{lab}}}{\omega_r}.} \tag{14.46}$$

et

$$\boxed{\omega_{\mathrm{lab}}^2 - c_r^2 k^2 = \omega_r^2.} \tag{14.47}$$

14.17 Spin et neutralité

La solution est scalaire et purement radiale ($A \equiv 0$) : il n'y a pas de moment cinétique intrinsèque.

$$|S| = 0, \qquad s_g = 0.$$

14.18 Statut logique du chapitre

Ce qui est fermé dans le présent chapitre. Le chapitre établit :

- l'équation radiale locale et le seuil de localisation $\omega_r^2 < \mu_2/\rho$;
- l'énergie propre locale et la contrainte modale commune $h_{\text{eff}}^{(H)} = h_{\text{eff}}$;
- la chaîne de masse conditionnelle du schéma NLO local minimal

$$\delta_H^*(u) = A_H(u)\left[B(u) + \Sigma_H^{(\text{NLO,min})}(u)\right] = A_H(u)\left[B(u) + \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)\zeta(u)\right], \qquad \mathcal{R}_H(u) = \sqrt{1 + \delta_H^*(u)}.$$

- le no-go du cœur radial passif strictement linéaire à rayon fini ;
- le squelette géométrique exact du raccord actif minimal, (14.22) ;
- la loi fermée du cœur actif minimal, (14.27) ;
- le raffinement NLO minimal conditionnel dans le même canal scalaire local, (14.39).

Cadre canonique LO du chapitre. Les briques $B(u)$, $A_H(u)$ et $\zeta(u)$ sont établies ici dans le cadre scalaire LO adopté pour le canal radial ancré. La section d'universalité LO montre que le choix $a(\xi) = \operatorname{sech}\xi$ doit être lu comme celui d'un représentant canonique de la classe des profils localisés au LO, et non comme l'affirmation que le cœur exact du Higgs est littéralement de forme sech. La continuation active minimale est fixée par la minimisation variationnelle du défaut spectral, cf. lemme 14.4. Le raffinement NLO est formulé dans le prolongement du même canal scalaire local de premier ordre que le LO ; il ajoute le terme de bord minimal correspondant sans introduire de canal non local supplémentaire.

Fermeture du paramètre de raccord. La loi de raccord du cœur actif minimal ferme le paramètre de raccord du canal Higgs-like. En posant

$$a_H := \sqrt{1 - \frac{\ell_r^2}{R_0^2}}, \qquad y = a_H u,$$

l'équation (14.27) devient

$$y \cot y = -y.$$

La première branche positive admissible donne

$$y_H^* = \frac{3\pi}{4}.$$

Ainsi,

$$\boxed{u_H^* = \frac{3\pi}{4}\left(1 - \frac{\ell_r^2}{R_0^2}\right)^{-1/2}}. \tag{14.48}$$

Dans le régime de cœur mince,

$$u_H^* = \frac{3\pi}{4} + \mathcal{O}\left(\frac{\ell_r^2}{R_0^2}\right).$$

Le paramètre u n'est donc pas laissé libre dans la fermeture LO du canal Higgs-like.

Fermeture NLO minimale. Si l'on retient le raffinement NLO minimal de (14.39), le paramètre de raccord est déterminé par

$$\boxed{u_H^* \, a_H \cot(u_H^* a_H) = -u_H^* a_H + \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \zeta(u_H^*), \qquad a_H = \sqrt{1 - \frac{\ell_r^2}{R_0^2}}.} \tag{14.49}$$

Au rang local $a_H = 1 + \mathcal{O}(\ell_r^2/R_0^2)$, cette équation devient

$$u_H^* \cot u_H^* = -u_H^* + \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \zeta(u_H^*).$$

Sa première racine positive dans $(\pi/2, \pi)$ vaut

$$u_{H,\mathrm{NLO}}^* \simeq 2.3302825264.$$

14.19 Résumé (Higgs-like, S^3)

Le mode radial localisé passif est défini par (14.4)–(14.7), avec

$$\ell_r^{-2} = \frac{\mu_2 - \rho\omega_r^2}{T\kappa_r}.$$

Au niveau LO passif, la MSE ne discrétise pas ω_r au rang meneur (14.8) et la coupure (14.13) borne seulement l'amplitude au bord. L'énergie propre vaut

$$E_0 = h_{\mathrm{eff}}\omega_r, \qquad h_{\mathrm{eff}}^{(H)} = h_{\mathrm{eff}},$$

par contrainte modale commune (14.11). En mouvement, le mode radial nu possède une cinématique interne caractérisée par

$$c_r = \sqrt{T\kappa_r/\rho} = \sqrt{\kappa_r}\, c_t.$$

Cette vitesse est celle de la déformation radiale nue, non une prédiction directe de la vitesse limite observable du scalaire Higgs-like physique. La lecture phénoménologique relativiste du Higgs-like, lorsqu'elle est effectuée, relève du raccord au secteur effectif tangent dans le cadre du lien effectif. Le nombre de spin géométrique est $s_g = 0$.

Chaîne de masse Higgs-like. La fermeture scalaire sans échelle du canal Higgs-like, dans le schéma NLO local minimal, s'écrit

$$\delta_H^*(u) = A_H(u) \left[B(u) + \Sigma_H^{(\mathrm{NLO,min})}(u)\right] = A_H(u) \left[B(u) + \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \zeta(u)\right].$$

Après fermeture du raccord NLO minimal, on pose

$$\delta_H^* := \delta_H^*(u_H^*).$$

La masse Higgs-like HSM est alors définie relativement à la branche NSL chargée :

$$m_{\mathrm{Hlike}}^{(\mathrm{HSM})} = m_{\mathrm{NSL,ch}}^{(\mathrm{HSM})} \sqrt{1 + \delta_H^*}.$$

Au niveau LO, la dépendance au profil exact du cœur se réduit à une classe universelle de profils localisés ; le choix $a(\xi) = \operatorname{sech} \xi$ y joue le rôle de représentant canonique et non celui d'un profil exact imposé.

Raccord actif minimal et raffinement NLO. Le cœur radial passif strictement linéaire ne ferme pas le raccord à rayon fini ; il faut introduire un cœur actif minimal. La minimisation variationnelle du défaut spectral, cf. lemme 14.4, fixe alors

$$\beta = \nu, \qquad y = u\sqrt{1 - \frac{\ell_r^2}{R_0^2}},$$

de sorte que la loi de raccord exacte se ferme en u. Sous l'hypothèse NLO minimale de canal scalaire local de premier ordre, cette loi se raffine en

$$y \cot y = -\,u\sqrt{1 - \frac{\ell_r^2}{R_0^2}} + \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)\zeta(u).$$

Le terme de raffinement NLO local minimal est donc

$$\Sigma_H^{(\mathrm{NLO,min})}(u) = \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)\zeta(u).$$

C'est ce même terme qui entre dans l'incrément de masse $\delta_H^*(u)$ défini en (14.43). Ainsi, dans ce chapitre, le symbole δ_H^* désigne l'incrément du schéma NLO local minimal, et non la seule brique locale $B(u) + \zeta(u)$.

Statut du paramètre u. Le présent chapitre ferme le paramètre de raccord du canal Higgs-like par le cœur actif minimal. Au rang LO,

$$u_{H,\mathrm{LO}}^* = \frac{3\pi}{4} + \mathcal{O}\left(\frac{\ell_r^2}{R_0^2}\right).$$

Avec le raffinement NLO minimal, u_H^* est déterminé par (14.45), et sa première racine positive dans la limite locale vaut

$$u_{H,\mathrm{NLO}}^* \simeq 2.3302825264.$$

Les incertitudes structurelles résiduelles ne portent donc pas sur l'existence d'une fermeture de u, mais sur le choix du rang retenu, LO ou NLO local minimal, et sur la décision de ne pas inclure, dans ce chapitre, de degrés de bord non locaux ou d'opérateurs de bord d'ordre supérieur.

Commentaires. (i) La valeur de raccord obtenue ne provient pas d'un choix canonique importé du bump ou du NSL, mais d'une fermeture spécifique au canal Higgs-like radial. (ii) Aucun facteur empirique n'est introduit dans la construction sans échelle δ_H^*. (iii) La relation de masse HSM utilise comme référence la branche NSL chargée interne, et non une masse observationnelle. (iv) Le choix du rang de fermeture, LO ou NLO minimal, doit être déclaré explicitement dans toute évaluation numérique issue de ce chapitre.

Chapitre 15

Champ gravitation–like sur $\mathbb{S}^3$

15.1 Positionnement, hypothèses et notations

Nous décrivons le champ *gravitation–like* généré par les solutions localisées du modèle HSM. Le cadre est celui du continuum sur $\mathbb{S}^3$, au LO dans le régime

$$\lambda/R_0 \ll 1,$$

où λ désigne l'échelle de localisation caractéristique de la source.

Constantes fondamentales. On utilise les constantes mécaniques du secteur radial et tangentiel

ρ (densité volumique), T (tension tangentielle), $c_t^2 = \dfrac{T}{\rho}$, μ_2 (coefficient local radial), κ_r (poi

Avec $[\rho] = \mathrm{kg\,m^{-3}}$, on a

$$[T] = \mathrm{Pa} = \mathrm{J\,m^{-3}},$$

de sorte que $c_t^2 = T/\rho$ a bien la dimension d'une vitesse au carré.

Secteur radial continu. Dans ce chapitre, on distingue explicitement les deux contributions du secteur radial :

$$\frac{T\kappa_r}{2}\,|\nabla r|^2 \qquad \text{et} \qquad \frac{\mu_2}{2}\,r^2.$$

Le coefficient $T\kappa_r$ contrôle le coût spatial des variations du champ radial, tandis que μ_2 contrôle sa raideur locale.

Définition de κ_μ. On introduit le coefficient radial local

$$\boxed{\kappa_\mu := \frac{\mu_2}{T}, \qquad [\kappa_\mu] = \mathrm{m^{-2}}.} \tag{15.1}$$

Ainsi,

$$\mu_2 = T\kappa_\mu,$$

où μ_2 est le coefficient dimensionné du terme local radial.

Convention structurelle. Aucune identité générale n'est postulée dans ce chapitre entre κ_r et κ_μ. En particulier, on ne suppose pas $\mu_2 = T\kappa_r$ comme fermeture universelle. La relation éventuelle entre κ_r et κ_μ relève de l'analyse structurelle du modèle ; dans le continu, on conserve donc une écriture séparée du terme de gradient radial et du terme local radial.

Opérateur radial et paramètre de screening. Au niveau géométrique, l'équation radiale stationnaire s'écrit

$$-T\kappa_r\,\Delta_{\mathbb{S}^3} r + \mu_2\, r = \text{source},$$

où $\Delta_{\mathbb{S}^3}$ désigne le laplacien de Beltrami sur la sphère de référence, selon les conventions générales du document.

Dans la réduction axisymétrique en coordonnée d'arc $s = R_0\chi$, cette équation prend la forme d'un opérateur radial de type Helmholtz, et l'on introduit alors

$$\boxed{\lambda_r^2 := \frac{\mu_2}{T\kappa_r} = \frac{\kappa_\mu}{\kappa_r}.}$$

Le paramètre λ_r est donc l'inverse de la longueur de screening radiale. En général, on ne fixe pas $\lambda_r^2 = 1$ *a priori* : cette valeur ne correspond qu'au cas particulier $\kappa_\mu = \kappa_r$, c'est-à-dire à une fermeture spéciale du secteur radial, et non à une identité universelle du modèle.

Convention géométrique de signe. On écrit

$$R(s) = R_0 + r(s),$$

et l'on adopte la convention

$$\boxed{r > 0 \iff R_0 + r > R_0.}$$

Une bosse radiale correspond donc à une déformation radiale positive du rayon local.

On rappelle la définition

$$\mu_2 = T\,\kappa_\mu, \qquad \lambda_r^2 = \frac{\kappa_\mu}{\kappa_r},$$

déjà introduite en (15.1).

Ainsi, κ_μ mesure la raideur locale radiale, tandis que κ_r pondère le terme de gradient radial. Le coefficient dimensionné du terme de gradient est $T\kappa_r$, alors que celui du terme local est $\mu_2 = T\kappa_\mu$.

Portée du chapitre. Ce chapitre traite uniquement du *canal radial gravitation–like*. Les normalisations EM–like, impédances et fermetures électromagnétiques sont traitées séparément dans les parties dédiées.

15.2 Green Yukawa sur $\mathbb{S}^3$ (LO) et moyenne canonique unique

Moyenne canonique sur $\mathbb{S}^3$. Pour une fonction zonale $f(\chi)$ sur $\mathbb{S}^3$ de rayon R_0, on a

$$dV = R_0^3 \sin^2\chi\, d\chi\, d\Omega_2, \qquad \mathrm{Vol}(\mathbb{S}^3) = 2\pi^2 R_0^3.$$

La moyenne canonique s'écrit donc

$$\langle f\rangle_{\mathbb{S}^3} = \frac{1}{\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^3)}\int_{\mathbb{S}^3} f\, dV = \frac{1}{2\pi^2 R_0^3}\int_{\mathbb{S}^3} f\, dV = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin^2\chi\, f(\chi)\, d\chi. \tag{15.2}$$

Dans les convolutions gravitation–like, cette moyenne n'est introduite qu'une seule fois.

Opérateur réduit et Green zonal. L'équation radiale stationnaire physique s'écrit

$$-T\kappa_r\,\Delta_{\mathbb{S}^3} r + \mu_2\, r = \sigma,$$

où σ désigne la source radiale effective. En divisant par $T\kappa_r$, on obtient

$$(-\Delta_{\mathbb{S}^3} + \lambda_r^2)\, r = S, \qquad S := \frac{\sigma}{T\kappa_r}, \qquad \lambda_r^2 = \frac{\mu_2}{T\kappa_r} = \frac{\kappa_\mu}{\kappa_r}. \tag{15.3}$$

On définit alors la fonction de Green $G(x, y)$ de l'opérateur réduit par

$$(-\Delta_{\mathbb{S}^3,x} + \lambda_r^2)\, G(x, y) = \delta_{\mathbb{S}^3}(x, y), \tag{15.4}$$

de sorte que la solution s'écrive

$$r(x) = \int_{\mathbb{S}^3} G(x, y)\, S(y)\, dV_y. \tag{15.5}$$

Loi locale Yukawa et limite newtonienne. Dans le régime local $d(x, y) \ll R_0$, la géométrie devient asymptotiquement plate et (15.4) se réduit à l'équation de Helmholtz usuelle sur $\mathbb{R}^3$. On obtient alors

$$G(d) \simeq \frac{e^{-\lambda_r d}}{4\pi d}.$$

Lorsque le screening radial est négligeable à l'échelle considérée,

$$\lambda_r d \ll 1,$$

on retrouve la limite newtonienne locale

$$G(d) \simeq \frac{1}{4\pi d}.$$

Ainsi, la loi d'interaction entre deux cœurs localisés est de type Yukawa au LO, avec régime newtonien local lorsque la longueur de screening λ_r^{-1} est grande devant la distance considérée.

Remarque sur le cas sans screening. Sur la sphère compacte $\mathbb{S}^3$, l'opérateur pur $-\Delta_{\mathbb{S}^3}$ possède un mode constant dans son noyau. La formule newtonienne ci-dessus doit donc être comprise comme une *limite locale* ($d \ll R_0$, $\lambda_r d \ll 1$) et non comme l'inversion globale non projetée de $-\Delta_{\mathbb{S}^3}$ sur tout $\mathbb{S}^3$.

15.2.1 Modules mécaniques et densité (LO)

On rappelle les relations structurelles

$$\rho = \frac{T}{c_t^2}, \qquad \mu_2 = T\,\kappa_\mu, \qquad [\kappa_\mu] = \mathrm{m}^{-2}, \qquad \lambda_r^2 = \frac{\mu_2}{T\kappa_r} = \frac{\kappa_\mu}{\kappa_r}. \tag{15.6}$$

Le coefficient κ_μ mesure la raideur locale radiale, tandis que κ_r pondère le terme de gradient radial. Aucune identité générale n'est postulée ici entre κ_r et κ_μ ; leur relation éventuelle relève de l'analyse structurelle du modèle.

15.3 Existence du champ gravitation–like

15.3.1 Source variationnelle et charge monopolaire

Le champ gravitation–like n'est pas introduit comme une interaction indépendante. Il résulte de la réponse radiale du support à l'énergie d'une solution localisée. Dans la convention active du canal radial, la source effective est définie par variation des contributions énergétiques par rapport à la déformation radiale :

$$S = -\frac{1}{T\kappa_r}\left(\frac{\delta E_{\text{cin}}}{\delta r} + \frac{\delta E_{\tan}}{\delta r} + \frac{\delta E_{\text{eff}}}{\delta r}\right). \tag{15.7}$$

Cette écriture fixe la normalisation réduite de la source dans le canal radial.

La grandeur robuste associée à une solution localisée n'est pas une hauteur locale du cœur, mais la charge monopolaire intégrée

$$Q_g := \int_{\mathbb{S}^3} S\, dV. \tag{15.8}$$

Cette charge contrôle l'amplitude du champ extérieur gravitation–like dans le régime monopolaire.

15.3.2 Dérivation au LO de la source gravitation–like

La définition variationnelle (15.7) sert de point de départ à la réduction monopolaire au LO dans le régime de cœur quasi-plat.

Au niveau LO, les trois variations locales prennent la forme

$$\frac{\delta E_{\text{cin}}}{\delta r} \simeq \frac{\rho\omega^2}{R_0}A^2, \qquad \frac{\delta E_{\tan}}{\delta r} \simeq \frac{T}{R_0}(A_s)^2, \qquad \frac{\delta E_{\text{eff}}}{\delta r} \simeq -\frac{2T}{R_0^3}A^2. \tag{15.9}$$

Il vient donc

$$S = -\frac{1}{T\kappa_r}\left[\left(\frac{\rho\omega^2}{R_0} - \frac{2T}{R_0^3}\right)A^2 + \frac{T}{R_0}(A_s)^2\right]. \tag{15.10}$$

En intégrant sur $\mathbb{S}^3$, on obtient la charge monopolaire au LO :

$$Q_g = \int_{\mathbb{S}^3} S\, dV = -\frac{1}{T\kappa_r}\left[\frac{\rho\omega^2}{R_0}\int_{\mathbb{S}^3} A^2\, dV + \frac{T}{R_0}\int_{\mathbb{S}^3}(A_s)^2\, dV - \frac{2T}{R_0^3}\int_{\mathbb{S}^3} A^2\, dV\right]. \tag{15.11}$$

Pour une solution isolée, on utilise l'identité de cœur

$$\int_{\mathbb{S}^3}(A_s)^2\, dV = \Omega_0^2\int_{\mathbb{S}^3} A^2\, dV - \frac{\beta_c}{2}\int_{\mathbb{S}^3} A^4\, dV, \tag{15.12}$$

où β_c désigne le coefficient quartique de l'équation de cœur considérée. On utilise aussi

$$c_t^2 = \frac{T}{\rho}, \qquad \Omega_0^2 = \frac{2}{R_0^2} - \frac{\omega^2}{c_t^2}, \tag{15.13}$$

d'où

$$\rho\omega^2 = T\left(\frac{2}{R_0^2} - \Omega_0^2\right). \tag{15.14}$$

Après substitution dans (15.11), le coefficient de $\int_{\mathbb{S}^3} A^2\, dV$ s'annule exactement :

$$\frac{\rho\omega^2}{R_0} + \frac{T\Omega_0^2}{R_0} - \frac{2T}{R_0^3} = 0.$$

On obtient ainsi

$$Q_g = \frac{1}{\kappa_r} \frac{\beta_c}{2R_0} \int_{\mathbb{S}^3} A^4 \, dV. \tag{15.15}$$

La structure gravitation–like du canal radial repose donc, au LO, sur l'intégration de la source variationnelle sur $\mathbb{S}^3$, suivie de la réduction monopolaire de cœur. Au même ordre, la charge monopolaire ne dépend plus du terme quadratique $\int A^2 \, dV$: elle est portée par l'invariant quartique de cœur.

15.3.3 Champ extérieur et régime monopolaire local

Le champ radial extérieur créé par une source compacte s'obtient par convolution avec la Green Yukawa du support. Dans le régime local $d \ll R_0$, le noyau se réduit à sa forme euclidienne locale et, au-delà du cœur, seule subsiste la composante monopolaire :

$$r_{\mathrm{ext}}(d) \sim Q_g \, G(d), \qquad G(d) \sim \frac{e^{-\lambda_r d}}{4\pi d}. \tag{15.16}$$

Lorsque le screening radial est négligeable à l'échelle considérée ($\lambda_r d \ll 1$), on retrouve

$$G(d) \sim \frac{1}{4\pi d},$$

et donc

$$Q_g \simeq 4\pi d \, r_{\mathrm{ext}}(d). \tag{15.17}$$

Ainsi, Q_g s'interprète comme le coefficient monopolaire du champ extérieur local.

Remarque de portée. La loi locale en $1/d$ n'est valable que dans la fenêtre $a \ll d \ll R_0$, où a désigne la taille caractéristique du cœur. À séparation comparable à la taille globale de $\mathbb{S}^3$, la compacité du support — et, le cas échéant, le screening radial — modifie nécessairement cette asymptotique locale.

15.3.4 Interprétation mécanique du canal radial et signe attractif

Le canal gravitation–like admet une lecture mécanique simple : la variation locale d'énergie d'une solution agit comme une contrainte normale sur le support, cette contrainte source la déformation radiale, et le recouvrement de deux déformations abaisse l'énergie du système.

La variation première de l'énergie totale par rapport à la déformation normale r s'écrit

$$\delta E = \int_{\mathbb{S}^3} \left(\frac{\delta E_{\mathrm{cin}}}{\delta r} + \frac{\delta E_{\tan}}{\delta r} + \frac{\delta E_{\mathrm{eff}}}{\delta r} \right) \delta r \, dV. \tag{15.18}$$

Le terme entre parenthèses joue ainsi le rôle de densité de travail normal exercé sur le support. Après division par le coefficient radial $T\kappa_r$, on retrouve la source du canal gravitation–like (15.7). La déformation radiale extérieure est alors la réponse non locale du support à cette contrainte normale.

Considérons maintenant deux solutions compactes, produisant les déformations r_1 et r_2. Dans le régime linéaire, l'énergie radiale totale se décompose comme

$$E_{\mathrm{rad}}[r_1 + r_2] = E_{\mathrm{rad}}[r_1] + E_{\mathrm{rad}}[r_2] + E_{\times}[r_1, r_2]. \tag{15.19}$$

À l'ordre monopolaire dominant, le terme croisé est bilinéaire en les charges monopolaires et prend la forme

$$E_{\times}(d) \simeq T\kappa_r \, Q_{g,1} Q_{g,2} \, G(d). \tag{15.20}$$

Dans la convention de signe du potentiel d'interaction, on pose

$$U(d) = -E_{\times}(d), \tag{15.21}$$

d'où

$$U(d) \simeq -T\kappa_r\, Q_{g,1}Q_{g,2}\, G(d). \tag{15.22}$$

Le signe attractif du potentiel n'est donc pas postulé. Il provient du fait que deux déformations de même orientation diminuent l'énergie du système lorsqu'elles se recouvrent dans le canal radial linéaire. Pour les branches physiques considérées, où les charges monopolaires portent le même signe, le potentiel est attractif. La chaîne mécanique complète du secteur gravitation–like s'écrit ainsi

$$\delta E \;\longrightarrow\; S \;\longrightarrow\; r_{\mathrm{ext}} \;\longrightarrow\; E_{\times} \;\longrightarrow\; U(d). \tag{15.23}$$

15.3.5 Interaction gravitation–like à deux corps

Pour deux solutions compactes suffisamment éloignées, l'énergie croisée de leurs déformations extérieures est dominée au LO par le terme monopolaire. Dans le régime newtonien local, on obtient

$$U(d) \simeq -T\kappa_r\, Q_{g,1}Q_{g,2}\, G(d) \sim -\frac{T\kappa_r}{4\pi}\,\frac{Q_{g,1}Q_{g,2}}{d}. \tag{15.24}$$

L'existence d'un champ gravitation–like au LO est ainsi établie : une solution localisée d'énergie finie produit un champ radial extérieur, et deux solutions ainsi couplées interagissent par un potentiel attractif de type newtonien local.

Validité locale. Dans la fenêtre

$$a \ll d \ll R_0,$$

la Green radiale se réduit à sa forme locale de Yukawa/Newton. Lorsque le screening radial est négligeable à l'échelle considérée ($\lambda_r d \ll 1$), on retrouve le régime newtonien local.

15.4 Régime fort gravitation–like : régularité des sources finies et statut des surfaces piégeantes

Objet. Le canal gravitation–like a été construit au rang linéaire à partir du champ radial r et de l'opérateur

$$\rho\,\ddot{r} - T\kappa_r\Delta_{\mathbb{S}^3} r + \mu_2 r = 0, \qquad \lambda_r^2 = \frac{\mu_2}{T\kappa_r}, \qquad \ell_r = \frac{1}{\lambda_r} = \sqrt{\frac{T\kappa_r}{\mu_2}}.$$

La présente section précise ce que cette construction permet déjà d'affirmer sur le régime de forte concentration d'énergie. Le point traité ici n'est pas la reconstruction complète d'une solution de type trou noir, mais la régularité du canal gravitation–like lorsqu'il est sourcé par des configurations HSM localisées d'énergie finie.

Énergie quadratique du canal radial. L'équation linéarisée précédente est associée, au rang considéré, à l'énergie quadratique

$$E_r = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{S}^3}\left(\rho\,\dot{r}^2 + T\kappa_r\,|\nabla_{\mathbb{S}^3} r|^2 + \mu_2\, r^2\right)\, dV. \tag{15.25}$$

Comme

$$\rho > 0, \qquad T > 0, \qquad \kappa_r > 0, \qquad \mu_2 > 0,$$

cette énergie est positive. Ainsi, au rang linéaire du canal gravitation–like, une configuration de champ r d'énergie finie ne correspond pas à une divergence mécanique du degré radial, mais à un élément régulier du domaine énergétique de l'opérateur.

Opérateur statique positif. Dans le régime statique ou quasi-statique, l'opérateur physique de réponse est

$$\mathcal{L}_g := -T\kappa_r\Delta_{\mathbb{S}^3} + \mu_2 = T\kappa_r\left(-\Delta_{\mathbb{S}^3} + \lambda_r^2\right).$$

Sur $\mathbb{S}^3$, cet opérateur est elliptique et strictement positif pour

$$T > 0, \qquad \kappa_r > 0, \qquad \mu_2 > 0.$$

Pour une source effective régulière ou d'énergie finie σ_g, la réponse statique physique est donc définie par

$$\mathcal{L}_g r = \sigma_g. \tag{15.26}$$

En divisant par $T\kappa_r$, on retrouve l'opérateur réduit déjà utilisé dans la construction du Green :

$$\left(-\Delta_{\mathbb{S}^3} + \lambda_r^2\right) r = S_g, \qquad S_g := \frac{\sigma_g}{T\kappa_r}.$$

La positivité de $\mathcal{L}_g$, ou de manière équivalente de l'opérateur réduit, empêche l'apparition d'un mode nul pathologique dans cette fermeture.

Régularisation par source de cœur. Le Green réduit G_g de l'opérateur

$$-\Delta_{\mathbb{S}^3} + \lambda_r^2$$

possède, à distance courte devant R_0, la forme locale

$$G_g(d) \simeq \frac{e^{-d/\ell_r}}{4\pi d}.$$

Cette singularité est celle du noyau ponctuel réduit. Les sources HSM physiques considérées dans la théorie ne sont toutefois pas des points nus : ce sont des solutions localisées de cœur fini et d'énergie finie. La réponse physique est donc une convolution du Green réduit avec la source réduite étendue :

$$r(x) = \int_{\mathbb{S}^3} G_g(x,y)\, S_g(y)\, dV_y = \frac{1}{T\kappa_r}\int_{\mathbb{S}^3} G_g(x,y)\, \sigma_g(y)\, dV_y. \tag{15.27}$$

Pour une source de cœur bornée, ou plus généralement intégrable avec énergie finie, la singularité $1/d$ du Green est localement intégrable en dimension trois et ne produit pas de divergence du champ moyen r au centre du cœur. La divergence ponctuelle appartient donc au Green idéal d'une source delta, non à la réponse d'une source HSM physique de taille finie.

Lemme de régularité du canal gravitation–like. On en déduit le lemme suivant.

Lemme 15.1 (Régularité gravitation–like des sources HSM finies)**.** *Soit σ_g une source gravitation–like issue d'une configuration HSM localisée d'énergie finie, et soit*

$$S_g = \frac{\sigma_g}{T\kappa_r}$$

la source réduite associée. Dans le domaine de validité de la fermeture gravitation–like linéaire ou faiblement non linéaire, la réponse r définie par (15.26)–(15.27) *reste une configuration régulière du champ radial. En particulier, aucune singularité ponctuelle du champ HSM ne résulte d'une source de cœur fini.*

Démonstration. L'opérateur physique

$$\mathcal{L}_g = -T\kappa_r \Delta_{\mathbb{S}^3} + \mu_2$$

est elliptique et strictement positif pour

$$T > 0, \qquad \kappa_r > 0, \qquad \mu_2 > 0.$$

Après division par $T\kappa_r$, l'opérateur réduit

$$-\Delta_{\mathbb{S}^3} + \lambda_r^2$$

possède une fonction de Green dont la singularité locale est la singularité standard $1/(4\pi d)$, intégrable contre une source étendue en dimension trois. Une source HSM localisée d'énergie finie ne s'identifie pas à une distribution delta nue : elle possède un cœur de taille finie et une densité d'énergie intégrable. La convolution

$$r = G_g * S_g$$

est donc finie dans le domaine de validité de la réduction. Une divergence ponctuelle ne pourrait apparaître qu'en remplaçant la source HSM par une source idéalisée de densité infinie, ce qui sort du domaine des configurations HSM physiques considérées ici. □

Forte concentration d'énergie et limite de validité. Une forte concentration d'énergie peut augmenter l'amplitude de la source $\mathcal{S}_g$ et donc déformer fortement la propagation effective. Toutefois, tant que la configuration reste une source HSM de coeur fini et d'énergie finie, la théorie ne produit pas de singularité mécanique fondamentale du champ radial. Ce point doit être distingué d'une question plus forte : déterminer la dynamique complète d'une région piégeante en régime non linéaire. Cette dernière demande une fermeture forte du canal de propagation et ne relève pas du seul Green linéaire.

Surface piégeante : définition effective. On appelle *surface piégeante effective* une surface Σ telle que la composante sortante de la vitesse de propagation effective des modes pertinents s'annule :

$$c_{\text{eff}}^{(+)}\big|_{\Sigma} = 0. \tag{15.28}$$

La région intérieure est dite piégée lorsque, avec la convention sortante positive,

$$c_{\text{eff}}^{(+)} < 0. \tag{15.29}$$

Ces équations constituent une définition cinématique du piégeage dans la lecture effective du canal gravitation–like. Elles ne doivent pas être confondues avec une singularité du champ r.

Régularité et absence de singularité métrique fondamentale. Dans une lecture métrique effective, une région piégeante peut être décrite comme un horizon apparent ou effectif. Mais cette métrique n'est pas un objet fondamental indépendant de HSM : elle est une réécriture de la propagation dans un fond gravitation–like. Par conséquent, une divergence de la métrique effective ne peut pas être prise comme une singularité fondamentale tant que les variables HSM sous-jacentes, leurs densités d'énergie et leur réponse gravitation–like restent régulières. L'horizon effectif est une surface de propagation, non un point où la théorie cesse d'être définie.

Statut du résultat. Le résultat démontré dans cette section est donc volontairement limité mais important :

$$\boxed{\text{source HSM localisée d'énergie finie} \quad \Longrightarrow \quad \text{réponse gravitation–like régulière}}$$

dans le domaine de validité du canal considéré. Ce résultat justifie une lecture régularisée des horizons effectifs dans le chapitre de liaison, mais il ne constitue pas encore une solution globale complète de type trou noir. Une telle solution demanderait une fermeture non linéaire explicite de $c_{\text{eff}}^{(+)}$, une équation d'évolution de la surface piégeante et une analyse globale du régime fort.

Chapitre 16

Champ électromagnétique–like (solutions en mouvement)

Conventions et unités.

$c_t^2 = \dfrac{T}{\rho}$, ρ : densité *volumique* d'inertie [$\mathrm{kg\,m^{-3}}$], T : tension tangentielle volumique [$\mathrm{Pa} = \mathrm{N\,m^{-2}} =$

On introduit une constante de structure sans dimension,

$$\boxed{\Upsilon_{\mathrm{cell}} \text{ (unique, sans dimension)}}.$$

Dans tout ce qui suit, les charges et couplages EM–like sont exprimés en unités mécaniques internes HSM. La présente construction définit uniquement les grandeurs réduites du canal EM–like.

16.1 Deux normalisations du couplage EM–like et leur dictionnaire

(A) Voie *micro–maille*. La source scalaire mécanique locale s'écrit

$$\rho_{\mathrm{src}} = g_{\mathrm{HSM}}\, \jmath^t_{\mathrm{micro}}, \qquad \jmath^t_{\mathrm{micro}} = \mathcal{C}_{\mathrm{kin}}\, \rho\, A^2\, \partial_t \phi,$$

avec

$$\boxed{g_{\mathrm{HSM}} = \frac{\sigma_{\mathrm{cell}}\, c_t}{\ell_0^2}, \qquad \Upsilon_{\mathrm{cell}} := \sigma_{\mathrm{cell}}\, \mathcal{C}_{\mathrm{kin}}.}$$

Ici, ℓ_0 est l'échelle de maille, σ_{cell} un facteur géométrique interne de coarse-graining, et $\mathcal{C}_{\mathrm{kin}}$ le facteur cinématique associé à la réduction micro–maille.

Normalisation canonique de maille (canal EM-like). Dans le canal EM–like, le facteur Υ_{cell} ne constitue pas une nouvelle constante dynamique : il fixe la normalisation interne de la maille dans la voie micro–maille. La normalisation canonique retenue dans HSM est

$$\boxed{\Upsilon_{\mathrm{cell}} = 1.}$$

Justification. Cette fixation est une convention théorique de normalisation. Elle exprime que, dans la normalisation canonique de maille, le coefficient de passage micro–maille → grandeur mécanique effective est pris unitaire. Toute déviation éventuelle s'écrirait

$$\Upsilon_{\mathrm{cell}} = 1 + \delta_{\mathrm{cell}},$$

avec δ_{cell} calculable si l'on modifie la normalisation de maille ou les règles de coarse-graining. Le caractère non physique de ce choix sera vérifié plus bas par l'annulation explicite du couplage g_Ω dans la force statique locale, cf. §20.3.8.

(B) Voie *Noether/Maxwell–like.* La symétrie de phase $U(1)$ du champ 2DOF engendre le courant conservé

$$j^\mu = (j^0, \vec{j}), \qquad j^0 = \rho\, \Im(\psi^* \dot{\psi}), \qquad \vec{j} = -T\, \Im(\psi^* \nabla\psi),$$

et un couplage effectif linéaire à un quadripotentiel $A_\mu = (a, \vec{A})$ via un unique coefficient g_Ω.

Dictionnaire interne des deux normalisations. Pour le bump 2DOF circulaire, le profil canonique de cœur est $a(\xi) = \operatorname{sech}\xi$, cf. 6.1. Les moments de cœur J_0 et J_2 sont définis par (6.45), avec les valeurs (6.46).

La part scalaire de densité du cœur est portée par J_0, tandis que la part de gradient est portée par J_2. La norme locale réduite du cœur est donc

$$J_{\text{tot}} = J_0 + J_2.$$

On introduit alors la constante de projection source du canal EM–like :

$$\boxed{\mathcal{C}_S := \frac{J_0}{J_0 + J_2}.} \tag{16.1}$$

Lemme 16.1 (Projection source élémentaire du canal EM–like)**.** *La projection source élémentaire consommée par un vertex charge–champ EM–like vaut*

$$\boxed{\Pi^{\text{EM}}_{\text{source}} = \mathcal{C}_S = \frac{J_0}{J_0 + J_2}.} \tag{16.2}$$

Démonstration. Le canal EM–like élémentaire couple à la densité scalaire portée par le cœur. Le numérateur de la projection source est donc

$$J_{\text{source}} = J_0.$$

La normalisation du mode de cœur au rang LO contient la part scalaire et la part de gradient :

$$J_{\text{tot}} = J_0 + J_2.$$

La projection source réduite est le rapport entre la part source et la norme locale totale :

$$\Pi^{\text{EM}}_{\text{source}} = \frac{J_{\text{source}}}{J_{\text{tot}}} = \frac{J_0}{J_0 + J_2}.$$

□

L'intégrale de Noether associée à la charge EM–like interne vaut alors

$$S_N = 2\,\mathcal{C}_S\,\mathcal{J},$$

où $\mathcal{J}$ désigne l'action réduite de la solution. Sur la branche EBK fondamentale $q = 1$, on a

$$\mathcal{J} = h_{\text{eff}}.$$

On obtient donc l'égalité entre les deux normalisations de la charge EM–like interne :

$$\boxed{Q^{(\text{micro})}_{\text{bump}} = 2h_{\text{eff}}\,\frac{\Upsilon_{\text{cell}}\,c_t}{\ell_0^2}\,\frac{J_0}{J_0 + J_2} = \frac{2h_{\text{eff}}}{g_\Omega}\,\frac{J_0}{J_0 + J_2} = Q^{(\text{Noether})}_{\text{bump}}}.$$

Il en résulte le dictionnaire interne

$$\boxed{g_\Omega = \frac{\ell_0^2}{\Upsilon_{\text{cell}}\,c_t} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\Upsilon_{\text{cell}}}{\ell_0^2} = \frac{1}{g_\Omega\,c_t}.} \tag{16.3}$$

Statut du dictionnaire. Les paramètres g_Ω et Υ_{cell} ne constituent pas deux constantes indépendantes : ils paramètrent le même couplage effectif selon deux normalisations équivalentes. Le bump 2DOF circulaire fournit ici une vérification explicite de ce dictionnaire. À ce stade, Q_{bump} est une charge EM–like interne du modèle, définie dans la normalisation mécanique du canal.

16.2 Maxwell–like sur $\mathbb{S}^3$ à partir du courant de Noether

Équations de champ en jauge de Lorenz. On travaille ici dans la représentation quadratique du secteur EM–like déjà écrite en jauge de Lorenz. Avec $c_t^2 = T/\rho$, on considère le fonctionnel

$$\mathcal{L}_A = \int \Big[\frac{T}{2}(|\nabla a|^2 + |\nabla \vec{A}|^2 - \frac{1}{c_t^2}(|\dot{a}|^2 + |\dot{\vec{A}}|^2)) + g_\Omega\,(a\,j^0 - \vec{A}\cdot\vec{j})\Big]\,dV,$$

où ∇, $\nabla\cdot$, $\nabla\times$ et $\Delta_{\mathbb{S}^3}$ désignent les opérateurs covariants usuels sur la 3-sphère orientée $\mathbb{S}^3$. Dans la limite locale $d \ll R_0$, ils se réduisent à leurs expressions euclidiennes.

La condition de Lorenz s'écrit

$$\boxed{\frac{1}{c_t^2}\partial_t a + \nabla\cdot\vec{A} = 0}.$$

Les équations d'onde associées sont alors

$$\boxed{\Big(\tfrac{1}{c_t^2}\partial_t^2 - \Delta_{\mathbb{S}^3}\Big)A_\mu = \frac{g_\Omega}{T}\,j_\mu}.$$

En posant

$$\vec{E} := -\nabla a - \partial_t \vec{A}, \qquad \vec{B} := \nabla \times \vec{A},$$

on en déduit

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{g_\Omega}{T}\,j^0, \qquad \nabla\times\vec{B} - \frac{1}{c_t^2}\partial_t\vec{E} = \frac{g_\Omega}{T}\,\vec{j}, \qquad \nabla\cdot\vec{B} = 0, \quad \nabla\times\vec{E} + \partial_t\vec{B} = 0.$$

Sources EM effectives et constantes constitutives. Choisissons

$$\boxed{\rho_{\text{EM}} = \frac{1}{g_\Omega}\,j^0, \qquad \vec{J}_{\text{EM}} = \frac{c_t^2}{g_\Omega}\,\vec{j}}. \tag{16.4}$$

On introduit alors les constantes constitutives effectives

$$\boxed{\varepsilon_{\text{eff}} = \frac{T}{g_\Omega^2}, \qquad \mu_{\text{eff}} = \frac{g_\Omega^2}{T\,c_t^2} = \frac{g_\Omega^2\,\rho}{T^2}}. \tag{16.5}$$

Ces quantités sont des reparamétrisations mécaniques effectives internes du couplage EM–like.

Alors

$$c_t^2 = \frac{1}{\mu_{\text{eff}}\,\varepsilon_{\text{eff}}},$$

et, en notant $(\rho_{\text{EM}}, \vec{J}_{\text{EM}})$ les sources effectives, les équations précédentes se réécrivent sous une forme strictement analogue aux équations de Maxwell, avec c_t comme vitesse caractéristique :

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho_{\text{EM}}}{\varepsilon_{\text{eff}}}, \qquad \nabla\times\vec{B} - \frac{1}{c_t^2}\partial_t\vec{E} = \mu_{\text{eff}}\,\vec{J}_{\text{EM}}}, \qquad \nabla\cdot\vec{B} = 0, \quad \nabla\times\vec{E} + \partial_t\vec{B} = 0.$$

Continuité des sources effectives. En prenant la divergence de l'équation d'Ampère–Maxwell et la dérivée temporelle de la loi de Gauss, on obtient

$$\partial_t \rho_{\mathrm{EM}} + \nabla \cdot \vec{J}_{\mathrm{EM}} = 0.$$

La redéfinition (16.4) est donc cohérente avec la conservation locale de la charge EM–like effective.

Limite statique locale. En statique locale ($d \ll R_0$), on retrouve la loi de Poisson–Coulomb

$$\Delta\Phi = -\frac{\rho_{\mathrm{EM}}}{\varepsilon_{\mathrm{eff}}} \quad \Rightarrow \quad \Phi(r) = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_{\mathrm{eff}}\,r}, \qquad \vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon_{\mathrm{eff}}}\,\frac{\hat{r}}{r^2}.$$

Cohérence constitutive (verrou LO). Avec (16.4)–(16.5),

$$\varepsilon_{\mathrm{eff}} = \frac{T}{g_\Omega^2}, \qquad \mu_{\mathrm{eff}} = \frac{g_\Omega^2}{T\,c_t^2}, \qquad c_t^2 = \frac{1}{\mu_{\mathrm{eff}}\,\varepsilon_{\mathrm{eff}}},$$

en cohérence avec $c_t^2 = T/\rho$. Le dictionnaire (16.3) assure l'indépendance vis-à-vis du choix de normalisation (micro–maille vs Noether).

16.3 Solutions en mouvement : interaction et radiation

Dans la fenêtre locale $d \ll R_0$ et dans le régime lent

$$|\vec{v}_i| \ll c_t,$$

les équations Maxwell–like du chapitre précédent se réduisent, au rang quasi-statique, à

$$-\Delta\Phi = \frac{\rho_{\mathrm{EM}}}{\varepsilon_{\mathrm{eff}}}, \qquad -\Delta\vec{A} = \mu_{\mathrm{eff}}\,\vec{J}_{\mathrm{EM}}, \qquad c_t^2 = \frac{1}{\mu_{\mathrm{eff}}\,\varepsilon_{\mathrm{eff}}}.$$

Pour une source ponctuelle Q_2 se déplaçant à la vitesse $\vec{v}_2$, on écrit

$$\rho_{\mathrm{EM},2}(\vec{x}) = Q_2\,\delta(\vec{x} - \vec{x}_2), \qquad \vec{J}_{\mathrm{EM},2}(\vec{x}) = Q_2\,\vec{v}_2\,\delta(\vec{x} - \vec{x}_2).$$

Les potentiels locaux créés par cette source valent alors

$$\Phi_2(d) = \frac{Q_2}{4\pi\,\varepsilon_{\mathrm{eff}}\,d}, \qquad \vec{A}_2(d) = \frac{\mu_{\mathrm{eff}}\,Q_2}{4\pi\,d}\,\vec{v}_2.$$

Pour une seconde source Q_1 se déplaçant à la vitesse $\vec{v}_1$, le terme d'interaction locale s'écrit

$$L_{\mathrm{int},1} = Q_1\,\vec{v}_1 \cdot \vec{A}_2 - Q_1\,\Phi_2.$$

Le potentiel généralisé associé est donc

$$V_{12}(d) = Q_1\,\Phi_2 - Q_1\,\vec{v}_1 \cdot \vec{A}_2.$$

En substituant les expressions précédentes, on obtient

$$\boxed{V_{12}(d) \simeq \frac{1}{4\pi\varepsilon_{\mathrm{eff}}}\,\frac{Q_1 Q_2}{d}\left[1 - \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{c_t^2} + \mathcal{O}\left(\frac{v^2}{c_t^2}\right)\right].} \tag{16.6}$$

Cette expression est la forme locale Coulomb + correction magnétostatique dominante de type Biot–Savart. Elle correspond au rang isotrope du développement lent ; la structure angulaire complète du noyau retardé n'est pas requise ici.

Radiation. Les équations d'onde Maxwell–like impliquent, dans la même fenêtre locale, les potentiels retardés

$$\Phi(\vec{x},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_{\text{eff}}} \int \frac{\rho_{\text{EM}}(\vec{x}',\, t - \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c_t})}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\, d^3x',$$

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \frac{\mu_{\text{eff}}}{4\pi} \int \frac{\vec{J}_{\text{EM}}(\vec{x}',\, t - \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c_t})}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\, d^3x'.$$

Toute accélération ($\dot{\vec{v}} \neq 0$) engendre donc des champs retardés se propageant à la vitesse c_t. Au rang multipolaire dominant, le schéma de rayonnement est dipolaire.

16.4 Champs transverses internes (HSM pur)

On introduit ici les champs transverses internes du support HSM. Cette construction est interne au secteur mécanique transverse ; elle ne doit pas être confondue avec le quadripotentiel $(a, \vec{A})$ du canal EM-like. Son raccord explicite à la charge effective du canal EM-like est traité dans la fermeture électromagnétique–like.

On note $\mathbf{A}_{\tan}$ le champ transverse interne du support, et $\nabla_{\tan}$ la dérivation covariante tangentielle associée à la géométrie locale du support. On pose

$$\mathbf{E}_{\text{HSM}} := -\partial_t \mathbf{A}_{\tan}, \qquad \mathbf{B}_{\text{HSM}} := \nabla_{\tan} \times \mathbf{A}_{\tan}, \qquad \mathcal{E}_{\text{HSM}} = \tfrac{1}{2}\,\rho\,|\partial_t \mathbf{A}_{\tan}|^2 + \tfrac{1}{2}\,T\,|\nabla_{\tan}\mathbf{A}_{\tan}|^2.$$

16.4.1 Unités mécaniques internes (statique)

Énergie de champ.

$$\mathcal{E} = \tfrac{1}{2}\,\rho\,|\partial_t \mathbf{A}_{\tan}|^2 + \tfrac{1}{2}\,T\,|\nabla_{\tan}\mathbf{A}_{\tan}|^2, \qquad c_t^2 = \frac{T}{\rho}. \tag{16.7}$$

Paramètres internes de normalisation. On introduit, pour le seul secteur transverse interne, les quantités

$$\varepsilon_{\text{mech}} := \rho, \qquad \frac{1}{\mu_{\text{mech}}} := T, \qquad \varepsilon_{\text{mech}}\mu_{\text{mech}} = \frac{1}{c_t^2}. \tag{16.8}$$

Ces paramètres *internes* ne doivent pas être confondus avec les constantes constitutives effectives $(\varepsilon_{\text{eff}}, \mu_{\text{eff}})$ du canal EM-like introduites plus haut.

Invariance d'échelle du potentiel interne. Pour tout facteur sans dimension $\kappa_A^{\text{int}} > 0$,

$$\mathbf{A}_{\tan} \mapsto \kappa_A^{\text{int}}\, \mathbf{A}_{\tan}, \qquad \varepsilon_{\text{mech}} \mapsto \frac{\varepsilon_{\text{mech}}}{(\kappa_A^{\text{int}})^2}, \qquad \mu_{\text{mech}}^{-1} \mapsto \frac{T}{(\kappa_A^{\text{int}})^2},$$

la forme (16.7) reste inchangée et

$$\varepsilon_{\text{mech}}\mu_{\text{mech}} = \frac{1}{c_t^2}$$

est conservé. La convention canonique retenue est

$$\varepsilon_{\text{mech}} = \rho, \qquad \mu_{\text{mech}}^{-1} = T.$$

Chapitre 17

Champ de préclusion (exclusion mécanique locale)

17.1 Positionnement et hypothèses (LO)

Le canal *de préclusion* n'est pas médié par un champ supplémentaire : il émerge directement des **équations variationnelles HSM** appliquées aux solutions localisées (2DOF/3DOF), via la non–linéarité de cœur et les contraintes de compatibilité de phase du secteur transverse $U(1)$. Le mécanisme pertinent est celui d'un recouvrement de cœurs localisés sous contrainte de phase, qui accroît l'énergie du système et induit une répulsion effective de courte portée.

On travaille au LO dans le régime

$$\lambda/R_0 \ll 1, \qquad c_t^2 = \frac{T}{\rho},$$

où les solutions localisées sont décrites sur une calotte quasi–plane.

Variables transverses 2DOF. On rappelle les variables internes du secteur transverse 2DOF :

$$\psi = A\, e^{i\phi}, \qquad \mathbf{E}_{\mathrm{HSM}} = -\partial_t \mathbf{A}_{\tan}, \qquad \mathbf{B}_{\mathrm{HSM}} = \nabla_{\tan} \times \mathbf{A}_{\tan},$$

avec densité d'énergie

$$\mathcal{E}_{\mathrm{HSM}} = \tfrac{1}{2}\,\rho\,|\partial_t \mathbf{A}_{\tan}|^2 + \tfrac{1}{2}\,T\,|\nabla_{\tan}\mathbf{A}_{\tan}|^2, \qquad c_t^2 = \frac{T}{\rho}.$$

Ces quantités interviennent ici comme variables internes du cœur transverse ; le canal de préclusion lui-même sera obtenu par analyse variationnelle de l'énergie sous recouvrement.

Profil de cœur de référence. Au LO, le cœur radial est décrit par un profil $a(\xi)$, $\xi = r/\lambda$, vérifiant

$$a(0) = 1.$$

Pour la solution de référence bump 2DOF, le profil canonique est

$$a(\xi) = \operatorname{sech} \xi,$$

cf. 6.1. Les autres familles sont traitées selon leur profil propre dans les sections ou chapitres qui leur sont consacrés.

17.2 Asymptotique de portée et forme LO

Au bord du cœur, l'amplitude décroît comme

$$A(x) \sim A_0 \, \exp\Big[- \, \frac{\mathrm{dist}(x, x_k)}{\xi} \Big], \qquad \xi = \sqrt{\frac{T}{\mu_\psi}},$$

où μ_ψ désigne le coefficient induit par la linéarisation locale du canal d'amplitude autour d'un cœur isolé. Il ne s'agit pas d'un nouveau couplage fondamental, mais du paramètre de masse effectif associé à la décroissance du profil linéarisé :

$$(-T \, \Delta_{S^3} + \mu_\psi) \, a \simeq 0.$$

Dans l'approximation de calotte quasi–plane (géométrie locale 3D), l'intégration du surcoût de gradient local conduit, pour $d \gg \xi$, à une asymptotique répulsive de portée finie

$$\boxed{V_{\mathrm{P}}(d) \; \simeq \; + \, \frac{C_{\mathrm{P}}}{d} \, e^{- \, d/\xi}, \qquad d \gg \xi.} \tag{17.1}$$

Le préfacteur $C_{\mathrm{P}} > 0$ ne fait intervenir aucun nouveau couplage fondamental : il est entièrement fixé par la structure du cœur, le coût en gradient et la géométrie locale du recouvrement.

17.3 Forme effective LO du canal (sans fermeture)

Dans le régime de recouvrement faible et à vitesse relative négligeable, l'énergie d'interaction de préclusion au LO est entièrement gouvernée par : (i) le coût en gradient, (ii) le facteur pur de recouvrement Γ_{P}, et (iii) les fonctions de recouvrement des profils locaux. Elle reproduit l'asymptotique de portée finie

$$V_{\mathrm{P}}(d) \simeq + \frac{C_{\mathrm{P}}}{d} \, e^{-d/\xi}$$

donnée en (17.1).

La fermeture détaillée en termes de fonctions de recouvrement $\mathcal{O}_{\mathrm{P}}(\cdot)$, de séparations réduites et de sélection Δ_* est reportée dans les chapitres consacrés aux solutions composites, où ces objets sont effectivement consommés.

17.4 Validité, séparation de canal et remarques

— **Sans nouveau couplage fondamental** : V_{P} résulte uniquement des termes HSM déjà présents (non–linéarité de cœur et coût en gradient).

— **Portée locale** : la forme (17.1) vaut pour $d \gg \xi$; à plus courte portée, la répulsion demeure gouvernée par le surcoût énergétique local associé au recouvrement.

— **Indépendance de R_0 au LO** : dans l'approximation de calotte quasi–plane, aucune dépendance explicite à R_0 ne subsiste ; les corrections de courbure sont d'ordre

$$\mathcal{O}\left(\frac{\lambda^2}{R_0^2} \right).$$

— **Séparation de canal** : la fermeture de préclusion de ce chapitre ne fait intervenir aucun couplage EM–like ou grav–like supplémentaire ; elle repose uniquement sur la structure locale des cœurs et sur leur recouvrement variationnel.

Chapitre 18

Force forte–like (interaction attractive de portée finie)

18.1 Positionnement et hypothèses (LO)

Le canal *forte–like* est associé à la dynamique tangentielle **3DOF** des cœurs localisés (famille bump 3DOF) et à leur structure conique interne. Il n'introduit aucun champ fondamental supplémentaire : au rang LO, il émerge directement du Lagrangien transverse HSM après réduction sur la composante 3DOF pertinente du cœur. On se place dans le régime de calotte quasi–plane,

$$\lambda/R_0 \ll 1, \qquad c_t^2 = \frac{T}{\rho}.$$

Projection de canal (couleur interne). On introduit une direction interne unitaire de canal

$$\boldsymbol{\pi}^{(\mathsf{col})} \in \mathbb{R}^3, \qquad \|\boldsymbol{\pi}^{(\mathsf{col})}\| = 1,$$

qui sélectionne, dans le secteur tangent 3DOF du cœur, la composante interne responsable du couplage forte–like. Le projecteur associé est

$$P^{(\mathsf{col})} := \boldsymbol{\pi}^{(\mathsf{col})} \otimes \boldsymbol{\pi}^{(\mathsf{col})}.$$

Cette composante sera appelée, dans tout ce chapitre, la composante *couleur* du mode 3DOF. La normalisation adoptée est la normalisation zonale canonique du cœur, identique à celle utilisée pour les autres canaux, sans facteur global supplémentaire.

18.2 Équation LO et Green de portée sur $\mathbb{S}^3$

Après projection du secteur tangent 3DOF sur la direction de canal $\boldsymbol{\pi}^{(\mathsf{col})}$, on note Φ_{s} l'amplitude scalaire effective du mode forte–like correspondant. Sous isotropie locale et au rang LO, Φ_{s} vérifie

$$\rho\,\ddot{\Phi}_{\mathsf{s}} - T\,\Delta_{\mathbb{S}^3}\Phi_{\mathsf{s}} + \mu_{\mathsf{s}}\,\Phi_{\mathsf{s}} = 0, \qquad \lambda_{\mathsf{s}} := \sqrt{\frac{T}{\mu_{\mathsf{s}}}}.$$

Ici, μ_{s} désigne le coefficient de masse effectif du canal interne s. Dans le présent chapitre, μ_{s} est traité comme un coefficient effectif du canal.

Le Green zonal $G_{\mathsf{s}}(x,y)$ associé satisfait

$$(-\Delta_{\mathbb{S}^3} + \lambda_{\mathsf{s}}^{-2})\,G_{\mathsf{s}}(x,y) = \delta_{\mathbb{S}^3}(x,y),$$

et, dans la limite locale $d(x,y) \ll R_0$,

$$G_{\mathsf{s}}(d) \;\simeq\; \frac{e^{-d/\lambda_{\mathsf{s}}}}{4\pi d}\,. \tag{18.1}$$

Cette forme locale est celle d'un noyau massif de portée finie.

Dans tout passage du microscopique au macroscopique, la moyenne sur $\mathbb{S}^3$ (volume $2\pi^2 R_0^3$) est effectuée une seule fois, afin d'éviter tout double comptage.

18.3 Charge de canal forte–like (forme canonique, sans fermeture)

La *charge forte–like* I_{s} d'une solution localisée est la grandeur scalaire effective associée à la composante 3DOF du cœur sélectionnée par la direction de canal $\boldsymbol{\pi}^{(\mathsf{col})}$ (ou, de manière équivalente, par le projecteur associé $P^{(\mathsf{col})}$). Autrement dit, le canal forte–like ne couple pas l'ensemble du secteur tangent 3DOF, mais seulement sa projection sur la direction interne $\boldsymbol{\pi}^{(\mathsf{col})}$.

Au rang LO, I_{s} est entièrement déterminée par la structure interne du cœur : profil radial, géométrie conique et moments de cœur (J_0, J_2). On peut donc l'écrire sous la forme

$$I_{\mathsf{s}} = \mathcal{K}_{\mathsf{s}}\,\Pi_{\mathsf{col}}[\text{cœur 3DOF}], \tag{18.2}$$

où $\Pi_{\mathsf{col}}[\text{cœur 3DOF}]$ désigne la projection mécanique du cœur sur le canal $\boldsymbol{\pi}^{(\mathsf{col})}$, et où $\mathcal{K}_{\mathsf{s}} > 0$ est un *nombre pur* ne dépendant que des facteurs de forme du cœur et de la géométrie conique. Aucune constante de couplage externe n'est introduite.

Dans ce chapitre, seule la *forme canonique* de I_{s} est requise : Le coefficient K_{s} est traité ici comme un facteur de forme interne du canal. Le présent chapitre fixe la structure canonique de la charge interne, sans introduire de valeur numérique pour K_{s}.

18.4 Potentiel d'interaction LO (forme)

Pour deux objets localisés (bump 3DOF) de charges fortes $I_{\mathsf{s}}^{(1)}$ et $I_{\mathsf{s}}^{(2)}$, au repos relatif ($|\vec{v}_i| \ll c_t$), l'héritage du Green (18.1) conduit, dans la branche attractive du canal, à un potentiel de portée courte de la forme

$$\boxed{V_{\mathsf{s}}(d) \;\simeq\; -\,\mathcal{C}_{\mathsf{s}}\,\frac{I_{\mathsf{s}}^{(1)}\,I_{\mathsf{s}}^{(2)}}{4\pi}\,\frac{e^{-d/\lambda_{\mathsf{s}}}}{d}} \qquad (d \ll R_0), \tag{18.3}$$

où $\mathcal{C}_{\mathsf{s}} > 0$ est un *nombre pur* de normalisation de canal (facteurs de forme et prescription de jauge), indépendant de (ρ, T, ℓ_0, R_0) une fois le canal fixé.

À très courte portée, cette attraction est régularisée par la répulsion universelle de cœur du canal Préclusion ; la saturation de la liaison relève du chapitre dédié.

Facteur de branche de canal. Le canal forte–like couple uniquement la composante 3DOF "couleur" extraite par $\boldsymbol{\pi}^{(\mathsf{col})}$. Pour un système multi-constituants, on encode le signe effectif du couplage par un facteur de branche adimensionné

$$\mathfrak{B}_{\mathrm{col}} \in \{-1, 0, +1\},$$

agissant sur les charges effectives selon

$$I_{\mathsf{s}}^{(i)} \;\mapsto\; \mathfrak{B}_{\mathrm{col}}^{(i)}\, I_{\mathsf{s}}^{(i)}.$$

On distinguera ainsi les trois cas

$\mathfrak{B}_{\mathrm{col}} = +1$ (branche attractive), $\mathfrak{B}_{\mathrm{col}} = 0$ (branche non couplée), $\mathfrak{B}_{\mathrm{col}} = -1$ (branche répulsive).

Dans la suite, on se restreint à la branche attractive, pour laquelle la contribution forte–like est effectivement liante. La répulsion de cœur Préclusion assure alors la saturation à très courte portée.

Chapitre 19

Canal faible–like : existence et mise en évidence minimale à partir de la NSL 2DOF

19.1 Positionnement et objectif

Cadre. Le présent chapitre est rédigé dans le cadre propre de HSM, au niveau effectif interne de la maille, sans recours à une identification extérieure ni à une interprétation phénoménologique. Son objectif n'est pas d'établir dès maintenant une fermeture complète du secteur faible–like, mais de montrer qu'à partir de la seule structure NSL 2DOF construite dans HSM, il existe un point d'appui interne naturel pour introduire un canal de maille distinct, de portée finie, ayant le statut minimal d'un champ effectif.

Nature du résultat visé. On cherche ici un résultat d'*existence* au sens suivant :

1. identifier, à partir de la NSL 2DOF, un candidat minimal de densité source de canal ;
2. montrer qu'il est naturel d'associer à cette source une variable de réponse propre de la maille ;
3. vérifier qu'une telle réponse induit une interaction effective entre deux profils NSL bien séparés ;
4. dégager les traits structuraux minimaux du canal ainsi mis en évidence.

Portée du chapitre. Le chapitre reste volontairement en deçà :

— d'une fermeture complète sur les constantes fondamentales de HSM ;

— d'une théorie détaillée des couplages de ce canal aux autres solutions ;

— d'une analyse de sa structure fine au-delà de l'approximation minimale retenue ici.

On établit seulement qu'un secteur faible–like *peut être introduit de façon interne et motivée* dans HSM à partir de la NSL 2DOF.

19.2 Donnée primitive : la NSL 2DOF dans HSM

Entrée unique du chapitre. La seule donnée primitive utilisée dans ce chapitre est la solution NSL 2DOF construite dans HSM, cf. §6.4, et plus précisément §6.4.1, §6.4.2 et §6.4.3. Aucune autre structure n'est supposée.

Structure tangentielle. Au niveau LO, la NSL 2DOF est une configuration tangentielle à deux jambes orthogonales, iso–fréquences, partageant une même porteuse temporelle. On peut la résumer sous la forme

$$\vec{u}_{\mathrm{NSL}}(s,\vartheta,t) = A(s)\Big[\cos\vartheta\,\mathbf{q}(t) + \sin\vartheta\,J\mathbf{q}(t)\Big],$$

où $\mathbf{q}(t)$ et $J\mathbf{q}(t)$ sont deux directions tangentielles orthonormales à chaque instant, en quadrature dans le plan transverse, et $A(s)$ est une enveloppe localisée.

Invariant quadratique zonal. La propriété décisive, déjà utilisée dans HSM, est alors l'identité exacte

$$|\vec{u}_{\mathrm{NSL}}(s,\vartheta,t)|^2 = A(s)^2,$$

puisque

$$|\mathbf{q}(t)| = |J\mathbf{q}(t)| = 1, \qquad \mathbf{q}(t)\cdot J\mathbf{q}(t) = 0.$$

L'invariant quadratique ne dépend donc ni de ϑ, ni du temps rapide, mais uniquement du profil radial $A(s)$.

Rôle structurel. Cette propriété n'est pas accessoire : c'est elle qui rend compatible la réponse radiale zonale $r = r(s)$ dans la construction de la NSL. La structure à deux jambes de la NSL n'est donc pas une redondance de représentation ; elle constitue le minimum interne nécessaire pour produire une densité quadratique fermée au niveau radial.

Lecture retenue ici. Dans le présent chapitre, on ne cherche pas encore à exploiter toute la structure fine du doublet tangent sous-jacent. On retient seulement le fait suivant : HSM contient déjà, via la NSL 2DOF, une structure primitive non triviale dont l'invariant quadratique radialement fermé fournit un candidat naturel pour une source de canal.

19.3 Source minimale et charge effective candidate

Densité source minimale. La propriété précédente conduit naturellement à introduire, pour la NSL 2DOF, la densité source minimale

$$\boxed{\rho_W^{(\mathrm{NSL})}(s) := |\vec{u}_{\mathrm{NSL}}(s,\vartheta,t)|^2 = A(s)^2.}$$

Statut de $\rho_W^{(\mathrm{NSL})}$. À ce stade, $\rho_W^{(\mathrm{NSL})}$ n'est pas encore posée comme source finale d'un secteur fermé. Elle est introduite comme *candidat minimal* de densité source, sélectionné directement par la structure interne de la NSL et déjà vu par la maille dans la fermeture radiale construite dans HSM.

Pourquoi ce choix est naturel. Ce choix est le plus économique possible :

1. il n'introduit aucune structure étrangère à HSM ;
2. il coïncide avec l'invariant quadratique déjà mobilisé dans l'analyse de la NSL ;
3. il constitue le premier niveau auquel une interaction entre deux profils NSL peut être testée.

Charge effective candidate. Si l'on souhaite déjà préparer une écriture de type *champ + charge*, la quantité globale la plus simple associée à $\rho_W^{(\mathrm{NSL})}$ est

$$q_W^{\mathrm{eff}}[\mathrm{NSL}] := \int_{\mathbb{S}^3} \rho_W^{(\mathrm{NSL})}\, dV = \int_{\mathbb{S}^3} A(s)^2\, dV.$$

À ce stade, q_W^{eff} n'est encore qu'une *charge effective candidate* : elle mesure l'intensité globale avec laquelle la structure NSL source le canal considéré au niveau minimal.

Approximation retenue. Dans tout ce qui suit, on se limite volontairement à cette approximation scalaire minimale portée par A^2. La structure fine à deux jambes ne sera réintroduite que plus tard.

19.4 Champ de réponse effectif associé

Motivation. Si $\rho_W^{(\mathrm{NSL})}$ doit être interprétée comme source d'un canal propre de la maille, il est naturel d'associer à cette source une variable de réponse effective. On introduit donc un champ scalaire effectif Φ_W, compris ici comme réponse minimale de la maille au canal porté par la NSL.

Notation abrégée. Dans toute cette section, on pose

$$\rho_W := \rho_W^{(\mathrm{NSL})}.$$

Équation effective minimale. La forme la plus simple compatible avec une portée finie est

$$\boxed{\mathcal{L}_W\, \Phi_W = g_W^{\mathrm{eff}}\, \rho_W,}$$

où

- $\mathcal{L}_W$ est l'opérateur effectif du canal faible–like,
- g_W^{eff} est le coefficient effectif de couplage du canal,
- ρ_W est la densité source minimale.

Modèle statique minimal. Au niveau statique local, dans l'approximation quasi–plane, on peut représenter $\mathcal{L}_W$ par un opérateur de type

$$\mathcal{L}_W = -\Delta_{\mathrm{loc}} + \ell_W^{-2},$$

avec $\ell_W > 0$, d'où

$$(-\Delta_{\mathrm{loc}} + \ell_W^{-2})\Phi_W = g_W^{\mathrm{eff}}\, \rho_W.$$

Cette écriture n'est pas introduite comme loi finale du secteur, mais comme forme effective minimale motivée par le comportement de portée finie déjà suggéré par la structure NSL et son couplage radial.

Lien avec la structure HSM existante. Cette introduction n'est pas arbitraire : dans HSM, le canal radial répond déjà à l'invariant quadratique de la NSL, puis réinjecte sur le tangentiel. La variable Φ_W ne fait ici qu'isoler, sous forme de champ effectif propre, la réponse minimale de la maille associée à cette structure.

Portée conceptuelle. L'écriture précédente montre qu'un chapitre d'existence peut déjà identifier la forme conceptuelle

$$\text{champ de réponse} \iff g_W^{\text{eff}} \times \rho_W.$$

Autrement dit, le secteur faible–like admet déjà, au niveau minimal, une description effective faisant intervenir :

— une densité source candidate ρ_W,

— une charge effective candidate q_W^{eff},

— un coefficient effectif de canal g_W^{eff}.

La fermeture de ces quantités sur les constantes fondamentales de HSM relève d'une étape distincte.

19.5 Interaction minimale entre deux sources NSL

Deux profils bien séparés. Considérons deux solutions NSL 2DOF bien séparées, notées A et B, de densités sources minimales

$$\rho_W^{(A)}(x) = A_A(x)^2, \qquad \rho_W^{(B)}(y) = A_B(y)^2.$$

Noyau de Green. Soit $G_W = \mathcal{L}_W^{-1}$ le noyau de Green du canal. On a alors formellement

$$\Phi_W = g_W^{\text{eff}}\, G_W * \rho_W.$$

Énergie croisée minimale. Au niveau effectif minimal, l'interaction entre deux sources NSL prend alors la forme

$$\boxed{E_{\text{int}}^{(W)}(A,B) \sim -\, g_W^{\text{eff}\,2} \iint_{\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3} \rho_W^{(A)}(x)\, G_W(x,y)\, \rho_W^{(B)}(y)\, dV_x\, dV_y.}$$

En remplaçant $\rho_W^{(A)}$ et $\rho_W^{(B)}$ par A_A^2 et A_B^2, on obtient

$$E_{\text{int}}^{(W)}(A,B) \sim -\, g_W^{\text{eff}\,2} \iint_{\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3} A_A(x)^2\, G_W(x,y)\, A_B(y)^2\, dV_x\, dV_y.$$

Lien avec la chaîne de couplage interne. Cette forme est cohérente avec la chaîne de réponse déjà présente dans HSM :

$$A^2 \longrightarrow r \longrightarrow A.$$

L'introduction du champ effectif Φ_W ne change donc pas la logique interne ; elle la reformule simplement sous une forme explicite de type *source–champ–interaction*.

Portée. Dès lors que $\ell_W^{-2} > 0$, le noyau G_W est de type gappé. L'interaction ainsi définie est donc de portée finie, avec une portée caractéristique ℓ_W. C'est la propriété structurelle essentielle du canal recherché.

Remarque sur le signe. Dans le régime minimal où G_W est positif, la structure précédente conduit à une interaction attractive au niveau scalaire. Cette lecture appartient à l'approximation scalaire minimale ; la structure fine à deux jambes est réintroduite dans la fermeture du canal.

19.6 Traits structuraux du canal faible–like

Objet de la section. Le but est ici de dégager, à partir de la construction précédente, les traits structuraux minimaux du canal ainsi introduit, sans sortir du cadre propre de HSM.

Portée finie. Le canal est gouverné au niveau minimal par un opérateur gappé. Il induit donc une interaction de portée finie entre sources. La portée finie n'est pas ajoutée de l'extérieur : elle est exigée par la forme même de la réponse effective associée à la NSL.

Caractère non libre. Contrairement à un secteur tangent libre déterminé par une simple excitation propagative sans échelle de masse, le canal introduit ici n'apparaît pas comme mode libre gapless. Il est au contraire attaché à une échelle propre et à une structure source spécifique.

Source spécifique. Le canal n'est pas sourcé par une rotation tangentielle générique, mais par la structure particulière de la NSL 2DOF, c'est-à-dire par une configuration à deux jambes dont l'invariant quadratique se ferme sous la forme A^2.

Structure interne suggérée. Même si l'on travaille ici dans l'approximation scalaire minimale, l'origine de la source $\rho_W = A^2$ rappelle que le canal provient en réalité d'une structure tangentielle à deux composantes. Le champ faible–like minimal n'est donc pas suggéré par une simple onde tangentielle ordinaire, mais par une organisation interne plus riche.

Statut effectif minimal. Le fait qu'il soit naturel d'associer à ρ_W un champ de réponse Φ_W, un coefficient g_W^{eff} et une interaction entre sources montre que le canal introduit possède déjà un statut effectif propre au niveau minimal dans la maille. Sa fermeture complète et sa structure fine relèvent d'une étape ultérieure.

19.7 Forme effective "constante + charge" et perspective de fermeture

Forme effective obtenue. Le chapitre d'existence conduit déjà à une écriture de type

$$\boxed{\mathcal{L}_W \, \Phi_W = g_W^{\mathrm{eff}} \, \rho_W,}$$

avec

$$\rho_W^{(\mathrm{NSL})} = A^2, \qquad q_W^{\mathrm{eff}}[\mathrm{NSL}] = \int \rho_W^{(\mathrm{NSL})} \, dV.$$

On dispose donc déjà, au niveau minimal, d'une structure explicite de type *constante de champ + charge/source.*

Statut. À ce stade :

- g_W^{eff} est une constante effective de canal,
- ρ_W est une densité source candidate,
- q_W^{eff} est une charge effective candidate.

Leur identification finale ne fait pas partie du présent chapitre.

Perspective de fermeture. La question naturelle qui suit est alors la suivante :

> *peut-on exprimer g_W^{eff}, q_W^{eff} et la portée propre ℓ_W du canal uniquement à partir des constantes fondamentales de HSM ?*

Cette question est traitée dans le chapitre des fermetures du secteur faible–like, cf. §20.5.

Rôle de la présente étape. Le rôle du présent chapitre est donc préparatoire mais décisif : il ne ferme pas encore le secteur, mais il en identifie déjà la forme générale, ce qui rend possible la fermeture donnée plus loin dans le chapitre des fermetures des champs.

19.8 Portée du résultat et développements ultérieurs

Ce qui est acquis. Le présent chapitre établit, dans le cadre propre de HSM, les points suivants :

1. la NSL 2DOF fournit un candidat minimal naturel de densité source $\rho_W^{(\mathrm{NSL})} = A^2$;
2. cette source motive l'introduction d'un champ de réponse effectif Φ_W propre au canal ;
3. ce champ peut être écrit au niveau minimal sous la forme $\mathcal{L}_W \Phi_W = g_W^{\mathrm{eff}} \rho_W$;
4. il induit une interaction effective de portée finie entre deux profils NSL bien séparés.

Hors périmètre du chapitre d'existence. Ne sont pas traités dans le présent chapitre :

1. la structure fine du doublet tangent sous-jacent à la NSL ;
2. la dépendance éventuelle de l'interaction à l'orientation relative des deux jambes ;
3. le couplage détaillé des autres solutions à ce canal ;
4. la fermeture complète de g_W^{eff}, de q_W^{eff} et de la portée propre du canal sur les constantes fondamentales de HSM, traitée dans le chapitre des fermetures, cf. §20.5 ;
5. l'existence d'un mode libre ou d'un représentant localisé propre au canal au-delà de la NSL comme source primitive.

Suite naturelle. La suite immédiate consiste à raffiner la structure minimale $\rho_W = A^2$ en réintroduisant la contribution propre des deux jambes de la NSL, afin de déterminer si le canal introduit ici possède une organisation interne plus riche qu'un simple secteur scalaire effectif. Une fois cette structure mieux comprise, on pourra aborder la fermeture du triplet $(g_W^{\mathrm{eff}}, q_W^{\mathrm{eff}}, \ell_W)$ — ou, de manière équivalente, du couple $(g_W^{\mathrm{eff}}, q_W^{\mathrm{eff}})$ et de la portée propre du canal — sur les constantes fondamentales de HSM.

Conclusion. Dans le cadre limité mais précis d'un chapitre d'existence, l'objectif visé est atteint : la NSL 2DOF construite dans HSM fournit une base interne suffisante pour introduire un champ faible–like effectif minimal, muni d'une source candidate, d'une constante effective et d'une interaction propre de portée finie dans la maille.

Chapitre 20

Fermetures des champs sur les constantes fondamentales

Convention de notation pour les profils. Dans ce chapitre, on distingue conceptuellement le profil physique tangent A_{phys}, de dimension longueur, et le profil réduit sans dimension a. Lorsque l'écriture compacte utilise A, le contexte précise si l'on travaille avec le champ physique $A_{\mathrm{phys}} = A_0 a$ ou avec le profil réduit a. Les expressions variationnelles du canal gravitation–like emploient le champ physique, tandis que les constantes de forme J_0, J_2, J_4 sont calculées avec le profil réduit normalisé $a(\xi) = \operatorname{sech} \xi$.

20.1 Schéma spectral commun hérité de la fermeture HSM

Les constantes spectrales communes utilisées par les canaux définis sur $\mathbb{S}^3$ sont fermées en amont dans la théorie de base. En particulier, la cellule spectrale élémentaire du plateau, les filtres zonaux $F_\ell^{(\mathrm{cell})}$, les poids spectraux a_ℓ, la fermeture LO régularisée $b_0^{(2)}$, ainsi que les constantes associées Δ_* et κ_ω, sont définis en amont dans HSM par

$$(6.47), \quad (6.48), \quad (6.51), \quad (6.55), \quad (6.57), \quad (6.63), \quad (6.65).$$

La présente partie ne redéfinit pas ces constantes ; elle les utilise comme fermetures théoriques communes.

20.1.1 Fenêtrage EBK et poids zonal canonique

Pour l'analyse zonale des canaux au LO, on introduit une fenêtre EBK (ℓ_q, σ_q), où ℓ_q désigne le centre spectral et σ_q la largeur effective de la sélection harmonique.

Le poids zonal canonique sur $\mathbb{S}^3$ est fixé par la projection sur les polynômes de Gegenbauer $C_\ell^{(1)}$ et leur relation d'orthogonalité :

$$\int_0^\pi C_\ell^{(1)}(\cos\chi)\, C_m^{(1)}(\cos\chi)\, \sin^2\chi \, d\chi = \frac{\pi}{2}\, \delta_{\ell m}. \tag{20.1}$$

Il en résulte la normalisation zonale canonique

$$\boxed{W_\ell = \frac{2}{\pi}.} \tag{20.2}$$

La fenêtre spectrale est prise en norme L^2 :

$$G_\ell(\ell_q, \sigma_q) = \frac{\exp\!\big(-\frac{(\ell-\ell_q)^2}{2\,\sigma_q^2}\big)}{\Big(\sum_{\ell'=0}^{\infty} \exp\!\big(-\frac{(\ell'-\ell_q)^2}{\sigma_q^2}\big)\Big)^{1/2}}, \qquad \sum_{\ell=0}^{\infty} G_\ell(\ell_q, \sigma_q)^2 = 1. \tag{20.3}$$

20.1.2 Noyaux zonaux LO des canaux EM-like et Préclusion

Les couplages spectraux consommés par les composés proviennent des noyaux zonaux LO des deux canaux actifs : le canal EM-like et le canal de préclusion. Ces noyaux sont des fonctions de l'angle géodésique $\chi \in [0, \pi]$ sur $\mathbb{S}^3$. Leurs coefficients de Gegenbauer sont ensuite lus par la projection canonique du §20.1.1.

Densité de cœur réduite. Dans le régime de cœur quasi–plat, on utilise le profil canonique

$$a(\xi) = \operatorname{sech} \xi,$$

et l'on définit la densité de cœur réduite

$$u(\xi) := a(\xi)^2. \tag{20.4}$$

Sa normalisation quadratique est

$$J_0 = \int_{\mathbb{R}^3} u(|\boldsymbol{\xi}|)\, d^3\boldsymbol{\xi} = \int_0^\infty 4\pi\, \xi^2\, a(\xi)^2\, d\xi. \tag{20.5}$$

Pour deux centres séparés par l'angle réduit χ, on note

$$u_0(\boldsymbol{\xi}) = u(|\boldsymbol{\xi}|), \qquad u_\chi(\boldsymbol{\xi}) = u(|\boldsymbol{\xi} - \chi\, \mathbf{e}_z|)\,,$$

dans la carte locale LO. Cette écriture est la version quasi–plane de la séparation zonale sur $\mathbb{S}^3$.

Noyau de préclusion. Le canal de préclusion mesure le recouvrement local de deux cœurs sous contrainte de compatibilité de phase. Son noyau zonal brut est

$$\mathcal{C}_{\mathrm{P}}(\chi) := \frac{4}{J_0^2} \int_{\mathbb{R}^3} u_0(\boldsymbol{\xi})\, u_\chi(\boldsymbol{\xi})\, d^3\boldsymbol{\xi}. \tag{20.6}$$

Avec $\chi = 0$, on retrouve

$$\mathcal{C}_{\mathrm{P}}(0) = \frac{4}{J_0^2} \int_{\mathbb{R}^3} a(|\boldsymbol{\xi}|)^4\, d^3\boldsymbol{\xi} = \Gamma_{\mathrm{P}},$$

où Γ_{P} est défini par (20.59) et évalué par (20.60). Le noyau de préclusion consommé par les projections zonales est donc

$$\boxed{K_{\mathrm{P}}(\chi) := \mathcal{C}_{\mathrm{P}}(\chi).} \tag{20.7}$$

Il est positif, de portée finie au sens du recouvrement de cœur, et entièrement déterminé par le profil $a = \operatorname{sech}$.

Green statique du canal EM-like. Le canal EM-like statique est défini par la Green zonale réduite $\mathcal{G}_{\mathrm{EM}}$ de l'opérateur de Coulomb sur $\mathbb{S}^3$, avec soustraction du mode constant :

$$-\Delta_{\mathbb{S}^3,x}\, \mathcal{G}_{\mathrm{EM}}\big(d(x,y)\big) = \delta_{\mathbb{S}^3}(x,y) - 1, \qquad \langle \mathcal{G}_{\mathrm{EM}} \rangle_{\mathbb{S}^3} = 0. \tag{20.8}$$

Dans la limite locale $d(x,y) \ll R_0$, cette Green vérifie

$$\mathcal{G}_{\mathrm{EM}}(d) \simeq \frac{1}{4\pi d}, \tag{20.9}$$

ce qui reproduit la loi coulombienne locale du canal EM-like. La soustraction du mode constant ne modifie pas les gradients locaux ; elle fixe seulement la compatibilité globale sur la sphère compacte.

Noyau EM-like. Le noyau zonal EM-like brut est obtenu en convoluant deux densités de cœur par la Green statique du canal :

$$\mathcal{C}_{\mathrm{EM}}(\chi) := \frac{1}{J_0^2} \int_{\mathbb{R}^3}\!\int_{\mathbb{R}^3} u_0(\boldsymbol{\xi})\, \mathcal{G}_{\mathrm{EM}}(|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta}|)\; u_\chi(\boldsymbol{\eta})\, d^3\boldsymbol{\xi}\, d^3\boldsymbol{\eta}. \tag{20.10}$$

La constante de fermeture active EM-like est Γ_{EM}, définie par (20.36). On fixe donc le noyau EM-like normalisé par sa valeur centrale :

$$\boxed{K_{\mathrm{EM}}(\chi) := \Gamma_{\mathrm{EM}}\, \frac{\mathcal{C}_{\mathrm{EM}}(\chi)}{\mathcal{C}_{\mathrm{EM}}(0)}.} \tag{20.11}$$

Ainsi,

$$K_{\mathrm{EM}}(0) = \Gamma_{\mathrm{EM}}.$$

Le noyau K_{EM} porte la forme spatiale de la réponse statique EM-like, tandis que Γ_{EM} porte la fermeture active à deux projections du canal. La constante Γ_{EM} est une constante de champ : elle est définie avant toute projection sur une solution composée particulière. Les facteurs de compatibilité de largeur, d'orientation ou de projection propres à un composé relèvent donc du couplage champ–solution, et non de la définition du champ EM-like.

Projections de Gegenbauer. Les coefficients zonaux canoniques sont définis par

$$\boxed{\widehat{G}_\ell^{(\mathrm{EM})} = \frac{2}{\pi}\, \frac{1}{\ell+1} \int_0^\pi K_{\mathrm{EM}}(\chi)\, C_\ell^{(1)}(\cos\chi)\, \sin^2\chi\, d\chi.} \tag{20.12}$$

et

$$\boxed{\widehat{G}_\ell^{(\mathrm{P})} = \frac{2}{\pi}\, \frac{1}{\ell+1} \int_0^\pi K_{\mathrm{P}}(\chi)\, C_\ell^{(1)}(\cos\chi)\, \sin^2\chi\, d\chi.} \tag{20.13}$$

Ces deux coefficients sont des nombres purs. Ils sont régénérables par quadrature directe à partir de (20.7) et (20.11).

Versions fenêtrées. Les versions fenêtrées utilisées dans les calculs EBK sont

$$\widehat{G}_{\ell,q}^{(\mathrm{EM})} = G_\ell(\ell_q, \sigma_q)\, \widehat{G}_\ell^{(\mathrm{EM})}, \qquad \widehat{G}_{\ell,q}^{(\mathrm{P})} = G_\ell(\ell_q, \sigma_q)\, \widehat{G}_\ell^{(\mathrm{P})}. \tag{20.14}$$

Les coefficients non fenêtrés $\widehat{G}_\ell^{(\mathrm{EM})}$ et $\widehat{G}_\ell^{(\mathrm{P})}$ sont les objets consommés lorsqu'un médiateur harmonique L est sélectionné directement. Les coefficients fenêtrés sont utilisés lorsque la lecture porte sur une fenêtre EBK complète.

20.2 Fermeture gravitation–like

20.2.1 Réduction de la charge gravitation–like

On rappelle ici la réduction LO de Q_g, car c'est elle qui sera réinjectée dans la fermeture énergétique menant à l'interaction effective.

Convention de lecture du canal. Dans ce canal, les variations sont des variations de densité lues sur la mesure de référence de $\mathbb{S}^3$. Elles ne coïncident pas avec la variation locale covariante du cœur, dans laquelle le coefficient $\beta_{\mathrm{geom}}(R) = 2T/R^2$ et la mesure réduite $R^2\, ds\, d\Omega$ sont variés simultanément. Dans cette variation covariante, le produit $\beta_{\mathrm{geom}}(R)R^2$ est constant et la contribution locale correspondante s'annule.

La charge de canal utilisée ici est au contraire construite en tenant la mesure de référence fixe et en variant la densité effective. Au niveau LO cœur quasi–plat, les variations radiales utiles sont donc

$$\frac{\delta E_{\mathrm{cin}}}{\delta r} \simeq \frac{\rho\omega^2}{R_0}A^2, \qquad \frac{\delta E_{\tan}}{\delta r} \simeq \frac{T}{R_0}(A_s)^2, \qquad \left.\frac{\delta E_{\mathrm{eff}}}{\delta r}\right|_{dV_0} \simeq -\frac{2T}{R_0^3}A^2. \tag{20.15}$$

Avec cette convention de mesure fixe, la définition variationnelle de la charge de canal conduit à

$$Q_g = -\frac{1}{T\kappa_r}\left[\frac{\rho\omega^2}{R_0}\int_{\mathbb{S}^3} A^2\,dV + \frac{T}{R_0}\int_{\mathbb{S}^3}(A_s)^2\,dV - \frac{2T}{R_0^3}\int_{\mathbb{S}^3} A^2\,dV\right]. \tag{20.16}$$

Pour une solution isolée, on utilise l'identité de cœur

$$\int_{\mathbb{S}^3}(A_s)^2\,dV = \Omega_0^2\int_{\mathbb{S}^3} A^2\,dV - \frac{\beta_c}{2}\int_{\mathbb{S}^3} A^4\,dV, \tag{20.17}$$

ainsi que

$$c_t^2 = \frac{T}{\rho}, \qquad \Omega_0^2 = \frac{2}{R_0^2} - \frac{\omega^2}{c_t^2}, \qquad \rho\omega^2 = T\left(\frac{2}{R_0^2} - \Omega_0^2\right). \tag{20.18}$$

Après substitution dans (20.16), le coefficient de $\int_{\mathbb{S}^3} A^2\,dV$ s'annule exactement :

$$\frac{\rho\omega^2}{R_0} + \frac{T\Omega_0^2}{R_0} - \frac{2T}{R_0^3} = 0.$$

On obtient donc

$$\boxed{Q_g = \frac{1}{\kappa_r}\frac{\beta_c}{2R_0}\int_{\mathbb{S}^3} A^4\,dV.} \tag{20.19}$$

La charge gravitation–like monopolaire est donc portée, au rang LO, par l'invariant quartique de cœur. Le terme quadratique $\int A^2\,dV$ ne contribue pas directement à Q_g après réduction de cœur.

Cette annulation du terme quadratique est obtenue dans la convention de lecture à mesure de référence fixe définie ci-dessus. Elle ne contredit pas l'annulation de la variation locale covariante du cœur : les deux opérations ne tiennent pas les mêmes grandeurs fixes. La variation covariante contrôle la réduction locale du cœur ; la variation à mesure fixe définit la charge de canal consommée dans la fermeture gravitation–like.

20.2.2 Lien avec les énergies internes

Convention de mesure. Dans cette sous-section, toutes les quantités énergétiques sont exprimées en convention monopolaire sur $\mathbb{S}^3$. En particulier, les relations énergétiques héritées de la réduction axisymétrique sont réécrites ici avec la mesure dV sur $\mathbb{S}^3$.

Le terme quartique se réécrit via l'énergie de couplage monopolaire :

$$E_{\mathrm{coup}}^{\mathbb{S}^3} = \frac{T\beta_c}{4}\int_{\mathbb{S}^3} A^4\,dV. \tag{20.20}$$

Il vient donc

$$\frac{\beta_c}{2}\int_{\mathbb{S}^3} A^4\,dV = \frac{2}{T}E_{\mathrm{coup}}^{\mathbb{S}^3}. \tag{20.21}$$

En reportant dans (20.19), on obtient

$$\boxed{Q_g = \frac{2E_{\mathrm{coup}}^{\mathbb{S}^3}}{T\kappa_r R_0}.} \tag{20.22}$$

Dans le régime local de screening fort et de cœur quasi–plat, la cohérence énergétique de la branche isolée donne

$$E^{\mathbb{S}^3}_{\mathrm{coup}} \simeq \frac{E^{\mathbb{S}^3}_{\mathrm{tot}}}{2}, \tag{20.23}$$

cf. §5.3. Par conséquent,

$$\boxed{Q_g \simeq \frac{E^{\mathbb{S}^3}_{\mathrm{tot}}}{T\kappa_r R_0}.} \tag{20.24}$$

20.2.3 Régime local pertinent

Introduisons le paramètre sans dimension

$$\varepsilon_\omega := \frac{c_t}{\omega R_0}. \tag{20.25}$$

Pour une solution localisée, on a au LO

$$\omega \sim \frac{c_t}{\lambda}, \qquad \lambda \ll R_0,$$

de sorte que

$$\varepsilon_\omega \sim \frac{\lambda}{R_0} \ll 1.$$

Le résultat (20.24) doit donc être lu dans cette fenêtre locale de validité, où les corrections globales de courbure sont d'ordre supérieur. On écrit alors

$$\boxed{Q_g \simeq \frac{E^{\mathbb{S}^3}_{\mathrm{tot}}}{T\kappa_r R_0}.} \tag{20.26}$$

La déformation extérieure associée prend la forme

$$r_{\mathrm{ext}}(d) \sim \frac{Q_g}{4\pi d} \simeq \frac{E^{\mathbb{S}^3}_{\mathrm{tot}}}{4\pi\, T\kappa_r R_0}\,\frac{1}{d}. \tag{20.27}$$

Ainsi, dans le régime local pertinent, l'amplitude du champ gravitation–like est fixée linéairement par l'énergie totale de la solution isolée.

20.2.4 Constante gravitationnelle effective

En injectant (20.26) dans la structure d'interaction (15.24), on obtient d'abord

$$U(d) \sim -\frac{1}{4\pi\, T\kappa_r R_0^2}\,\frac{E^{\mathbb{S}^3}_{\mathrm{tot},1} E^{\mathbb{S}^3}_{\mathrm{tot},2}}{d}. \tag{20.28}$$

En identifiant

$$m = \frac{E_{\mathrm{tot}}}{c_t^2}, \tag{20.29}$$

on retrouve une forme newtonienne minimale

$$U(d) \sim -\,\widetilde{G}^{\mathrm{eff}}_N\,\frac{m_1 m_2}{d}, \qquad \widetilde{G}^{\mathrm{eff}}_N = \frac{c_t^4}{4\pi\, T\,\kappa_r\, R_0^2}. \tag{20.30}$$

Normalisation canonique gravitation–like. La forme minimale $\widetilde{G}_N^{\text{eff}}$ de (20.30) est la fermeture locale obtenue directement à partir de la charge radiale Q_g. Pour passer à la normalisation canonique du canal gravitation–like sur $\mathbb{S}^3$, on doit encore intégrer les trois facteurs purs déjà fixés par la fermeture spectrale commune :

$$\frac{J_2}{J_0}, \qquad (4\pi)^2, \qquad \kappa_\omega^2.$$

Le rapport J_2/J_0 est le quotient cœur–gradient du profil canonique sech, défini par les moments de cœur.

Le facteur $(4\pi)^2$ provient de deux normalisations sphériques distinctes. La première est celle du Green monopolaire local,

$$-\Delta_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{4\pi R}\right) = \delta^{(3)}(R),$$

qui fixe le 4π du propagateur radial. La seconde est celle de la source monopolaire canonique du canal : le flux total d'une source ponctuelle est normalisé par l'intégrale sphérique

$$\int_{\mathbb{S}^2} \mathbf{n}\cdot\mathbf{n}\, d\Omega = 4\pi.$$

La lecture newtonienne du canal consomme donc simultanément la normalisation du Green et celle de la source monopolaire, ce qui donne le facteur sphérique

$$(4\pi)^2.$$

Enfin, $\kappa_\omega^2 = \Delta_*^{-2}$ est le facteur de fermeture spectrale de plateau introduit dans le socle spectral HSM.

On définit donc le nombre pur gravitation–like

$$\boxed{\mathcal{N}_g := \underbrace{\frac{J_2}{J_0}}_{\text{profil}} \underbrace{(4\pi)^2}_{\text{flux monopolaire}} \underbrace{\kappa_\omega^2}_{\text{plateau spectral}} = \frac{J_2}{J_0}\,(4\pi\kappa_\omega)^2.} \tag{20.31}$$

Ce facteur n'est pas un paramètre libre : il regroupe uniquement des normalisations pures déjà fixées par le profil de cœur, le flux monopolaire et la fermeture spectrale commune. On obtient alors la forme normalisée

$$\boxed{G_N^{\text{eff}} = \mathcal{N}_g\, \widetilde{G}_N^{\text{eff}} = \frac{J_2}{J_0}\,(4\pi\kappa_\omega)^2\,\frac{c_t^4}{4\pi\, T\,\kappa_r\, R_0^2}}. \tag{20.32}$$

Cette quantité a bien les unités d'une constante newtonienne,

$$[G_N^{\text{eff}}] = \mathrm{m}^3\,\mathrm{kg}^{-1}\,\mathrm{s}^{-2}.$$

20.2.5 Synthèse de la fermeture gravitation–like

Au niveau LO, la fermeture obtenue dans ce chapitre est

$$Q_g \simeq \frac{E_{\text{tot}}^{\mathbb{S}^3}}{T\kappa_r R_0}, \qquad G_N^{\text{eff}} = \frac{J_2}{J_0}\,(4\pi\kappa_\omega)^2\,\frac{c_t^4}{4\pi\, T\,\kappa_r\, R_0^2},$$

dans la fenêtre locale

$$\varepsilon_\omega = \frac{c_t}{\omega R_0} \sim \frac{\lambda}{R_0} \ll 1,$$

et sous la convention énergétique locale

$$E_{\text{coup}}^{\mathbb{S}^3} \simeq \frac{E_{\text{tot}}^{\mathbb{S}^3}}{2}.$$

Couplage. Toute solution *localisée* d'énergie finie source le canal gravitation–like en régime linéaire. La conversion simple $Q_g \simeq E_{\mathrm{tot}}^{\mathbb{S}^3}/(T\kappa_r R_0)$ est toutefois la fermeture locale associée aux branches vérifiant la chaîne énergétique ci-dessus. Dans le régime newtonien local, l'interaction prend la forme

$$F_{12}(d) = G_N^{\mathrm{eff}}\,\frac{m_1 m_2}{d^2}, \qquad E_i = m_i c_t^2.$$

20.3 Fermeture électromagnétique–like (LO)

20.3.1 Impédance de milieu et constante de canal $\Phi_{\mathrm{EM}}^{(\mathrm{two})}$ (LO)

Constitutives et impédance interne (LO). Avec $c_t^2 = T/\rho$ et le couplage Noether g_Ω,

$$\varepsilon_{\mathrm{eff}} = \frac{T}{g_\Omega^2}, \qquad \mu_{\mathrm{eff}} = \frac{g_\Omega^2}{T\,c_t^2}, \qquad Z_{\mathrm{eff}} = \sqrt{\frac{\mu_{\mathrm{eff}}}{\varepsilon_{\mathrm{eff}}}} = \mu_{\mathrm{eff}}\,c_t = \frac{g_\Omega^2}{T\,c_t}\,. \tag{20.33}$$

Cette impédance Z_{eff} est l'impédance constitutive interne associée à la normalisation Noether/Maxwell–like du canal EM. Son identification explicite à l'impédance de canal utilisée dans la fermeture active n'est pas postulée à ce stade.

Convention spectrale de la présente fermeture. Dans la présente fermeture électromagnétique–like, on ne réintroduit pas une nouvelle constante spectrale indépendante : on emploie simplement, pour le canal EM-like, la même échelle pure dérivée par la sélection commune.

$$\boxed{\Delta_{\mathrm{EM}} := \kappa_\omega}\,.$$

Numériquement,

$$\Delta_{\mathrm{EM}} = \kappa_\omega = 54.9589563237.$$

Le symbole Δ_{EM} est conservé ici uniquement comme *notation locale de chapitre*, afin d'éviter toute confusion visuelle avec la largeur réduite $\Delta_* = 1/\kappa_\omega$.

Constante de forme EM–like.

Couplage élémentaire EM–like. Le couplage élémentaire du canal EM–like ne doit pas être confondu avec les coefficients de fermeture active à deux jambes. Il est défini au rang LO comme le produit du facteur de Green local isotrope, de la normalisation cyclique élémentaire et de la projection source simple :

$$\frac{1}{4\pi}, \qquad \frac{1}{2\pi}, \qquad \Pi_{\mathrm{source}}^{\mathrm{EM}}.$$

Proposition 20.1 (Couplage adimensionné EM–like au LO)**.** *Le couplage élémentaire adimensionné du canal EM–like au rang LO est*

$$\boxed{\alpha_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{HSM,LO}} = \frac{1}{4\pi}\,\frac{1}{2\pi}\,\Pi_{\mathrm{source}}^{\mathrm{EM}} = \frac{1}{8\pi^2}\,\frac{J_0}{J_0+J_2}.} \tag{20.34}$$

Démonstration. Le facteur $1/(4\pi)$ provient du noyau de Green local isotrope du canal EM–like. Le facteur $1/(2\pi)$ est la normalisation cyclique élémentaire associée à un cycle d'action. Enfin, le vertex charge–champ consomme une seule projection source, donnée par (16.2). On obtient donc

$$\alpha_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{HSM,LO}} = \frac{1}{4\pi}\,\frac{1}{2\pi}\,\Pi_{\mathrm{source}}^{\mathrm{EM}}.$$

En substituant (16.2), il vient

$$\alpha_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{HSM,LO}} = \frac{1}{8\pi^2}\,\frac{J_0}{J_0+J_2}.$$

□

Valeur LO. Avec

$$J_0 = \frac{\pi^3}{3}, \qquad J_2 = 7.6339320582,$$

on obtient

$$\boxed{\alpha_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{HSM,LO}} = 7.285 \times 10^{-3}, \qquad \left(\alpha_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{HSM,LO}}\right)^{-1} \simeq 137.3.} \tag{20.35}$$

Coefficient de fermeture active à deux projections. Les fermetures actives du canal EM–like ne relèvent pas du vertex élémentaire $\alpha_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{HSM,LO}}$. Elles décrivent un transfert source–champ–source, ou une structure équivalente à deux extrémités de canal. Elles peuvent donc consommer deux projections source. La constante pure associée à cette fermeture active vaut

$$\boxed{\Gamma_{\mathrm{EM}} := \frac{1}{\pi}\left(\Pi_{\mathrm{source}}^{\mathrm{EM}}\right)^2 = \frac{1}{\pi}\left(\frac{J_0}{J_0 + J_2}\right)^2.} \tag{20.36}$$

Numériquement,

$$\Gamma_{\mathrm{EM}} = 0.10530324394.$$

Cette constante est un nombre pur de fermeture active ; elle ne dépend d'aucun paramètre dimensionné et n'est pas définie par une fenêtre spectrale ajustée.

Statut du carré de projection source. Le carré $(\Pi_{\mathrm{source}}^{\mathrm{EM}})^2$ dans (20.36) ne provient pas du carré du couplage élémentaire $\alpha_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{HSM,LO}}$. Il provient de la forme bilinéaire source–champ–source de la fermeture active : une projection source intervient à l'entrée du canal, et une projection source intervient à la sortie du canal. Les facteurs de Green local et de normalisation cyclique qui entrent dans $\alpha_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{HSM,LO}}$ ne sont pas répétés dans Γ_{EM}. Il n'y a donc pas double comptage entre le vertex élémentaire et la fermeture active à deux extrémités.

Constante de canal (schéma « deux jambes », cap $\ell = 1$). Sous moyenne zonale canonique *unique* sur $\mathbb{S}^3$ et normalisation canonique du projecteur cap $\ell = 1$,

$$\boxed{\Phi_{\mathrm{EM}}^{(\mathrm{two})} = \left(\frac{1}{\Delta_{\mathrm{EM}}^2\, b_0^{(2)}}\right)^2 \frac{1}{2\pi^2}\sqrt{\frac{J_2}{J_0}}\,\Gamma_{\mathrm{EM}}\,\frac{J_0^2}{E_{\ell=1}^{\mathrm{cap}}}, \qquad E_{\ell=1}^{\mathrm{cap}} = \frac{(F_1^{\mathrm{cap}})^2}{\pi}.} \tag{20.37}$$

Ici $J_0, J_2, \Delta_{\mathrm{EM}}, b_0^{(2)}$ sont des constantes pures issues des moments de cœur et de la fermeture spectrale HSM. Le coefficient $b_0^{(2)}$ est la fermeture LO régularisée du bump 2DOF définie en HSM. Le nombre pur Γ_{EM}, défini par (20.36), porte la fermeture active à deux projections de source du canal EM-like. Il est distinct du couplage élémentaire $\alpha_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{HSM,LO}}$ défini en (20.34).

La quantité $\Phi_{\mathrm{EM}}^{(\mathrm{two})}$ est une constante de canal. Elle ne contient pas les facteurs de projection propres à une solution composée particulière. En particulier, les facteurs de compatibilité de largeur Ξ_{ab} et les facteurs de projection de témoins, lorsqu'ils apparaissent, sont introduits dans les sections de couplage champ–solution et non dans la définition du champ EM-like. Aucun facteur multiplicatif de continuité indépendant n'est introduit au LO.

Transfert deux-jambes / cellule et impédance de canal (LO). La fermeture active du canal EM-like se construit à partir d'une impédance de référence fixée à l'échelle microscopique,

$$Z_{\mathrm{ref},0} = \frac{h_{\mathrm{eff}}\, c_t}{\ell_0^2}.$$

Le schéma canonique à deux jambes n'introduit pas une nouvelle échelle absolue en ℓ_0^{-2}, mais un facteur de transfert *relatif* entre l'échelle microscopique ℓ_0 et l'échelle spectrale $\lambda = \Delta_{\mathrm{EM}}\ell_0$.

(i) Transfert par jambe.) Pour une jambe, le facteur sans dimension vaut

$$\eta_{\mathrm{leg}} = \frac{\ell_0^2}{\lambda^2}\,\frac{1}{b_0^{(2)}} = \frac{1}{\Delta_{\mathrm{EM}}^2\, b_0^{(2)}}.$$

(ii) Deux jambes.) La fermeture active à deux jambes est une contraction bilinéaire entre deux extrémités de transfert. Chaque extrémité porte le même facteur relatif η_{leg}. Les deux jambes étant orthogonales et de même largeur spectrale au rang LO, les termes croisés sont absents dans la réduction Galerkin, et la contraction donne le produit des deux facteurs d'extrémité :

$$\eta_{\mathrm{2leg}} = \eta_{\mathrm{leg}}^{(1)}\eta_{\mathrm{leg}}^{(2)} = \eta_{\mathrm{leg}}^2 = \left(\frac{1}{\Delta_{\mathrm{EM}}^2\, b_0^{(2)}}\right)^2.$$

Ce carré n'est pas une seconde normalisation de largeur ; il est le poids de la forme bilinéaire à deux extrémités.

(iii) Projection cap $\ell = 1$.) La projection canonique sur le cap $\ell = 1$ apporte le facteur spectral pur

$$\boxed{\Pi_{\ell=1}^{\mathrm{EM}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{J_2}{J_0}}\,\frac{1}{E_{\ell=1}^{\mathrm{cap}}}, \qquad E_{\ell=1}^{\mathrm{cap}} = \frac{(F_1^{\mathrm{cap}})^2}{\pi}.} \tag{20.38}$$

Ce facteur $\Pi_{\ell=1}^{\mathrm{EM}}$ est un projecteur cap pur. Il ne doit pas être confondu avec le coefficient réduit complet $\mathcal{C}_{\mathrm{EM}}^{(2)}$ utilisé dans les réductions de composés 2DOF, lequel inclut en plus Γ_{EM} et les moments de cœur.

Statut du facteur de cap F_1^{cap}. Le facteur F_1^{cap} ne désigne pas le filtre de cellule $F_\ell^{(\mathrm{cell})}$ utilisé dans la fermeture spectrale de $b_0^{(2)}$. Il désigne le facteur de normalisation du projecteur cap réduit à la composante $\ell = 1$ consommée par la fermeture EM–like deux-jambes.

Le projecteur cap réduit est pris idempotent et de norme unité sur cette composante :

$$\Pi_{\ell=1}^{\mathrm{cap}} \circ \Pi_{\ell=1}^{\mathrm{cap}} = \Pi_{\ell=1}^{\mathrm{cap}}, \qquad \|\Pi_{\ell=1}^{\mathrm{cap}}\|_{\ell=1} = 1.$$

Dans cette normalisation, l'amplitude de référence de la composante projetée vérifie

$$\boxed{(F_1^{\mathrm{cap}})^2 = 1.} \tag{20.39}$$

Cette égalité ne fixe aucune échelle physique indépendante : elle exprime l'idempotence et la normalisation unitaire du projecteur cap sur le mode $\ell = 1$. Toute échelle physique du canal reste portée par les facteurs de fermeture explicitement dérivés. Une autre normalisation du projecteur cap devrait être propagée explicitement dans $\Phi_{\mathrm{EM}}^{(\mathrm{two})} = C_\Phi/(F_1^{\mathrm{cap}})^2$.

Le facteur cap se réduit donc à

$$\boxed{E_{\ell=1}^{\mathrm{cap}} = \frac{1}{\pi}.} \tag{20.40}$$

(iv) Fermeture active.) On obtient ainsi

$$\Phi_{\mathrm{EM}}^{(\mathrm{two})} = \eta_{\mathrm{2leg}}\,\Pi_{\ell=1}^{\mathrm{EM}}\,\Gamma_{\mathrm{EM}}\,\frac{J_0^2}{\pi}.$$

En développant les facteurs définis ci-dessus, cela donne

$$\Phi_{\mathrm{EM}}^{(\mathrm{two})} = \left(\frac{1}{\Delta_{\mathrm{EM}}^2\, b_0^{(2)}}\right)^2 \frac{1}{2\pi^2}\sqrt{\frac{J_2}{J_0}}\,\Gamma_{\mathrm{EM}}\,\frac{J_0^2}{E_{\ell=1}^{\mathrm{cap}}}.$$

L'impédance de canal de référence vaut alors

$$\boxed{Z^{(\mathrm{LO})}_{\mathrm{EM,ref}} = \frac{h_{\mathrm{eff}}\, c_t}{\ell_0^2}\, \Phi^{(\mathrm{two})}_{\mathrm{EM}}\ .} \tag{20.41}$$

Cette relation définit l'impédance mécanique de référence du canal EM–like dans la normalisation interne de la théorie.

20.3.2 Constante pure C_Φ et forme finale de $\Phi^{(\mathrm{two})}_{\mathrm{EM}}$

Définition compacte. À partir de (20.37) et de

$$E^{\mathrm{cap}}_{\ell=1} = \frac{(F^{\mathrm{cap}}_1)^2}{\pi},$$

on introduit la constante pure

$$\boxed{\Phi^{(\mathrm{two})}_{\mathrm{EM}} = \frac{C_\Phi}{(F^{\mathrm{cap}}_1)^2}, \qquad C_\Phi = \left(\frac{1}{\Delta^2_{\mathrm{EM}}\, b_0^{(2)}}\right)^2 \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{J_2}{J_0}}\,\Gamma_{\mathrm{EM}}\, J_0^2.} \tag{20.42}$$

Valeur numérique canonique. Avec les constantes communes

$$J_0 = \frac{\pi^3}{3}, \qquad J_2 = 7.6339320582, \qquad \Delta_{\mathrm{EM}} = \kappa_\omega = 54.9589563237, \qquad b_0^{(2)} = 1.809206964{\times}10^4,$$

et la valeur de canal

$$\Gamma_{\mathrm{EM}} = 0.10530324394,$$

Cette valeur de $b_0^{(2)}$ est la valeur centrale de la fermeture spectrale LO régularisée définie dans HSM. Les prédictions absolues qui dépendent de C_Φ héritent donc de l'incertitude de régularisation associée à $b_0^{(2)}$.

on obtient

$$\boxed{C_\Phi = 5.152264653 \times 10^{-16}.} \tag{20.43}$$

Ainsi,

$$\boxed{\Phi^{(\mathrm{two})}_{\mathrm{EM}} = \frac{5.152264653 \times 10^{-16}}{(F^{\mathrm{cap}}_1)^2}.}$$

20.3.3 Valeur numérique canonique de $\Phi^{(\mathrm{two})}_{\mathrm{EM}}$

Convention canonique. Dans la normalisation canonique du projecteur cap $\ell = 1$, on utilise

$$(F^{\mathrm{cap}}_1)^2 = 1, \qquad E^{\mathrm{cap}}_{\ell=1} = \frac{1}{\pi}.$$

Évaluation. On obtient alors directement

$$\boxed{\Phi^{(\mathrm{two})}_{\mathrm{EM}} = 5.152264653 \times 10^{-16}.}$$

$$\boxed{Z^{(\mathrm{LO})}_{\mathrm{EM,ref}} = \frac{h_{\mathrm{eff}}\, c_t}{\ell_0^2}\, \Phi^{(\mathrm{two})}_{\mathrm{EM}} = \frac{h_{\mathrm{eff}}\, c_t}{\ell_0^2}\, \frac{C_\Phi}{(F^{\mathrm{cap}}_1)^2}.} \tag{20.44}$$

20.3.4 Quantum élémentaire de charge du canal EM–like

Objet. La charge mécanique Q_{mech}, définie plus bas par (20.55), appartient à la normalisation Noether/spin–action du canal. Elle mesure la source mécanique interne portée par la solution. Le quantum élémentaire de charge du champ EM–like est une grandeur distincte : il est défini par la réponse statique du champ Maxwell–like.

La limite statique de l'interaction locale (16.6), pour deux sources au repos séparées de d, donne

$$V_{12}^{\mathrm{stat}}(d) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_{\mathrm{eff}}}\,\frac{Q_1 Q_2}{d}. \tag{20.45}$$

Pour deux sources élémentaires identiques de module $Q_{\mathrm{EM},*}$, on a

$$V_{**}^{\mathrm{stat}}(d) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_{\mathrm{eff}}}\,\frac{Q_{\mathrm{EM},*}^2}{d}. \tag{20.46}$$

Définition énergétique du couplage élémentaire. Le couplage élémentaire adimensionné du canal EM–like est le rapport entre l'énergie statique élémentaire multipliée par la distance et l'échelle action–vitesse du canal :

$$\alpha_{\mathrm{EM}} = \frac{d\,V_{**}^{\mathrm{stat}}(d)}{h_{\mathrm{eff}} c_t}. \tag{20.47}$$

Le numérateur $d\,V_{**}^{\mathrm{stat}}(d)$ a la dimension d'une énergie multipliée par une longueur. Le dénominateur $h_{\mathrm{eff}} c_t$ porte la même dimension. Dans le régime local $1/d$, le rapport (20.47) est donc indépendant de d.

Proposition 20.2 (Quantum élémentaire du canal EM–like)**.** *Le quantum positif de charge du champ EM–like associé au couplage élémentaire* $\alpha_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{HSM,LO}}$ *est*

$$\boxed{Q_{\mathrm{EM},*}^2 = 4\pi\,\varepsilon_{\mathrm{eff}}\,h_{\mathrm{eff}} c_t\,\alpha_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{HSM,LO}}.} \tag{20.48}$$

En utilisant l'impédance constitutive du canal,

$$Z_{\mathrm{eff}} = \frac{1}{\varepsilon_{\mathrm{eff}} c_t}, \tag{20.49}$$

la même fermeture s'écrit

$$\boxed{Q_{\mathrm{EM},*} = \left(\frac{4\pi h_{\mathrm{eff}}\,\alpha_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{HSM,LO}}}{Z_{\mathrm{eff}}}\right)^{1/2}.} \tag{20.50}$$

Démonstration. En injectant (20.46) dans (20.47), on obtient

$$\alpha_{\mathrm{EM}} = \frac{d}{h_{\mathrm{eff}} c_t}\,\frac{1}{4\pi\varepsilon_{\mathrm{eff}}}\,\frac{Q_{\mathrm{EM},*}^2}{d} = \frac{Q_{\mathrm{EM},*}^2}{4\pi\varepsilon_{\mathrm{eff}} h_{\mathrm{eff}} c_t}.$$

L'identification avec le couplage élémentaire fermé en (20.34) donne directement (20.48). Par ailleurs, (20.33) donne

$$Z_{\mathrm{eff}} = \sqrt{\frac{\mu_{\mathrm{eff}}}{\varepsilon_{\mathrm{eff}}}} = \frac{1}{\varepsilon_{\mathrm{eff}} c_t}.$$

La substitution de cette relation dans (20.48) donne (20.50). □

Corollaire 20.3 (Fermeture LO du quantum de charge EM–like)**.** *Lorsque l'impédance du canal est évaluée par la fermeture active* (20.41)*, le quantum élémentaire de charge du champ EM–like vaut*

$$\boxed{Q_{\mathrm{EM},*}^{\mathrm{HSM,LO}} = \left(\frac{4\pi h_{\mathrm{eff}}\, \alpha_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{HSM,LO}}}{Z_{\mathrm{EM,ref}}^{(\mathrm{LO})}} \right)^{1/2}.} \tag{20.51}$$

Avec la forme finale (20.44)*, cette fermeture devient*

$$\boxed{Q_{\mathrm{EM},*}^{\mathrm{HSM,LO}} = \ell_0 \left(\frac{4\pi\, \alpha_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{HSM,LO}}}{c_t\, \Phi_{\mathrm{EM}}^{(\mathrm{two})}} \right)^{1/2}.} \tag{20.52}$$

Démonstration. La formule (20.51) est la spécialisation de (20.50) à l'impédance de référence (20.41). En substituant ensuite

$$Z_{\mathrm{EM,ref}}^{(\mathrm{LO})} = \frac{h_{\mathrm{eff}} c_t}{\ell_0^2}\, \Phi_{\mathrm{EM}}^{(\mathrm{two})}$$

d'après (20.44), il vient

$$Q_{\mathrm{EM},*}^{\mathrm{HSM,LO}} = \left(\frac{4\pi h_{\mathrm{eff}} \alpha_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{HSM,LO}}}{\frac{h_{\mathrm{eff}} c_t}{\ell_0^2} \Phi_{\mathrm{EM}}^{(\mathrm{two})}} \right)^{1/2} = \ell_0 \left(\frac{4\pi \alpha_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{HSM,LO}}}{c_t\, \Phi_{\mathrm{EM}}^{(\mathrm{two})}} \right)^{1/2}.$$

□

Statut dimensionnel. La grandeur $Q_{\mathrm{EM},*}^{\mathrm{HSM,LO}}$ est le quantum positif de charge du champ EM–like dans la normalisation interne de la théorie. Elle n'est pas exprimée en unité externe de charge. Sa dimension est fixée par (20.50) :

$$[Q_{\mathrm{EM},*}^2] = \frac{[h_{\mathrm{eff}}]}{[Z_{\mathrm{eff}}]}.$$

Avec la fermeture (20.44), on obtient

$$[Q_{\mathrm{EM},*}^2] = \frac{\ell_0^2}{c_t}, \qquad [Q_{\mathrm{EM},*}] = \frac{\ell_0}{\sqrt{c_t}}.$$

Cette dimension est celle de la charge de champ dans la normalisation EM–like interne. Aucune unité externe de charge n'intervient dans cette fermeture.

Statut logique. La fermeture (20.51)–(20.52) dérive de la statique locale (20.45), du couplage élémentaire (20.34) et de l'impédance fermée (20.41). Elle ne dépend d'aucune charge externe.

20.3.5 Représentation spectrale diagnostique du canal EM–like

Statut. La constante de canal utilisée dans la fermeture active est Γ_{EM} définie par (20.36). Les noyaux spectraux ci-dessous donnent une représentation diagnostique du transfert deux–jambes, mais ils ne définissent pas une seconde fermeture indépendante de Γ_{EM}.

Noyaux explicites (deux jambes, LO). On rappelle les formes fermées des deux noyaux spectraux :

$$\mathcal{K}_{\nabla\text{-scal}}(k) = \tfrac{2}{3}\, k^2\, \Phi(k), \qquad \mathcal{K}_{\mathrm{scal}\text{-}\nabla}(k) = \tfrac{2}{3}\, k^2\, \Phi(k), \qquad \Phi(k) = \left(\tfrac{\pi k}{\sinh(\frac{\pi k}{2})} \right)^2. \tag{20.53}$$

Remarque. Toute représentation intégrale pondérée par une fenêtre $w(k)$ relève d'un diagnostic spectral supplémentaire. Elle ne doit pas être utilisée pour fixer Γ_{EM} tant que le paramètre de fenêtre n'a pas été dérivé indépendamment.

20.3.6 Module naturel de charge et fractionnement interne

Module naturel de charge. La fermeture EBK pour $q = 1$, avec normalisation canonique

$$C_{\mathrm{EM}} = J_0 + J_2,$$

donne

$$A_0^2\lambda^2 = \frac{2h_{\mathrm{eff}}}{\rho c_t}\frac{1}{J_0 + J_2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{q_0 := (A_0^2\lambda^2)\, C_{\mathrm{EM}} = \frac{2h_{\mathrm{eff}}}{\rho c_t}}. \tag{20.54}$$

Le module q_0 est ainsi le module naturel de charge interne de la solution de référence bump 2DOF.

Fractionnement interne. À ce stade du manuscrit, on retient uniquement la structure effectivement utilisée dans les familles déjà établies :

$$q_{\mathrm{int}} = \pm q_0 \qquad \text{(bump 2DOF)},$$

et, lorsque la structure interne 3DOF correspondante est réalisée,

$$q_{\mathrm{int}} \in \Big\{ \pm \tfrac{1}{3} q_0, \pm \tfrac{2}{3} q_0 \Big\}.$$

On n'introduit donc ici aucun symbole intermédiaire supplémentaire (m_{dof}, θ_{M}, etc.) tant que leur définition canonique n'est pas explicitement consommée dans la suite.

20.3.7 Charge mécanique de référence

Charge mécanique de référence (spin–action). Avec

$$S_N = 2\,\mathcal{C}_S\, S, \qquad \mathcal{C}_S = \frac{J_0}{J_0 + J_2},$$

on définit la charge mécanique de référence par

$$Q_{\mathrm{mech}} := \frac{1}{g_\Omega}\, S_N. \tag{20.55}$$

En utilisant le dictionnaire

$$g_\Omega = \frac{\ell_0^2}{\Upsilon_{\mathrm{cell}} c_t},$$

on obtient

$$Q_{\mathrm{mech}} = 2\,\mathcal{C}_S\, \frac{\Upsilon_{\mathrm{cell}}\, c_t}{\ell_0^2}\, S. \tag{20.56}$$

Cas de la solution de référence $q = 1$ (bump 2DOF). En posant $S = h_{\mathrm{eff}}$, on obtient

$$Q_{\mathrm{mech}}(q{=}1) = 2\,\frac{J_0}{J_0 + J_2}\,\frac{\Upsilon_{\mathrm{cell}}\, c_t}{\ell_0^2}\, h_{\mathrm{eff}}. \tag{20.57}$$

Cette quantité joue ici le rôle de charge mécanique interne de référence pour la famille bump 2DOF.

20.3.8 Statique locale et annulation du couplage g_Ω

Force statique locale. Dans la limite locale, deux solutions localisées de charges Q_1, Q_2 séparées de d vérifient

$$\boxed{F(d) = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\,\varepsilon_{\text{eff}}\,d^2}} \tag{20.58}$$

Annulation du couplage g_Ω au LO. En injectant

$$Q = \frac{2\,\mathcal{C}_S}{g_\Omega}\,S, \qquad \mathcal{C}_S = \frac{J_0}{J_0 + J_2}, \qquad \varepsilon_{\text{eff}} = \frac{T}{g_\Omega^2},$$

dans (20.58), on obtient

$$F(d) = \frac{(\frac{2\mathcal{C}_S}{g_\Omega} S_1)(\frac{2\mathcal{C}_S}{g_\Omega} S_2)}{4\pi\,\frac{T}{g_\Omega^2}\,d^2} = \frac{\mathcal{C}_S^2}{\pi\,T}\,\frac{S_1 S_2}{d^2}.$$

Ainsi, au rang LO, la force statique locale est *indépendante* de g_Ω : la fermeture EM–like dépend seulement de T et des constantes pures de coeur (J_0, J_2).

20.4 Fermeture du champ Préclusion sur les constantes fondamentales

20.4.1 Facteur de recouvrement Préclusion

On introduit un facteur *adimensionné* de recouvrement géométrique Γ_{P}, qui capture au LO le recouvrement central de deux cœurs sur l'échelle λ dans l'approximation de calotte quasi–plane.

On utilise la variable radiale sans dimension

$$\boldsymbol{\xi} = \frac{\mathbf{x}}{\lambda}, \qquad a(\xi) = \operatorname{sech}\xi, \qquad \xi = |\boldsymbol{\xi}|,$$

et le moment de forme

$$J_0 = \int_0^\infty 4\pi\,\xi^2 a(\xi)^2\,d\xi.$$

Définition adimensionnée. On définit l'intégrale centrale de recouvrement quartique par

$$\mathcal{I}_{\text{P}}(0) := 4\int_{\mathbb{R}^3} a(|\boldsymbol{\xi}|)^4\,d^3\boldsymbol{\xi}.$$

Le facteur de recouvrement Préclusion est alors

$$\boxed{\Gamma_{\text{P}} := \frac{\mathcal{I}_{\text{P}}(0)}{J_0^2}.} \tag{20.59}$$

Par construction, Γ_{P} est un *nombre pur* : il ne dépend ni de T, ni de ρ, ni de ℓ_0, ni de R_0, mais seulement du noyau radial normalisé $a(\xi)$ et de la géométrie locale LO.

Portée de la définition. La dépendance en séparation effective (par exemple dans un breather) est portée par des fonctions de recouvrement dédiées, notées $\mathcal{O}_{\text{P}}(\Delta)$, qui seront introduites séparément. La constante Γ_{P} correspond à la normalisation centrale du recouvrement Préclusion et n'en dépend pas.

Valeur numérique pour le profil $a = \mathrm{sech}$

Constantes de forme canoniques. Pour le noyau radial $a(\xi) = \mathrm{sech}\,\xi$ utilisé au LO,

$$J_0 = \int_0^\infty 4\pi\xi^2 \,\mathrm{sech}^2\,\xi\, d\xi = \frac{\pi^3}{3} \approx 10.3354255601,$$

et

$$J_4 = \int_0^\infty 4\pi\xi^2 \,\mathrm{sech}^4\,\xi\, d\xi \approx 2.7014935019.$$

Relation fermée et valeur. Dans ce cas,

$$\mathcal{I}_{\mathrm{P}}(0) = 4J_4,$$

d'où

$$\boxed{\Gamma_{\mathrm{P}} = \frac{4J_4}{J_0^2} \approx 0.1011596206.} \tag{20.60}$$

C'est un *nombre pur* entièrement déterminé par le noyau $a(\xi) = \mathrm{sech}\,\xi$.

Remarque. Les dépendances en séparation interne ($\delta = L/\lambda$) interviennent via des fonctions de recouvrement spécifiques, notées par exemple $\mathcal{O}_{\mathrm{P}}(\delta)$, et ne modifient pas la constante centrale Γ_{P}.

20.4.2 Fermeture LO du préfacteur C_{P}

Forme de portée finie. Dans la géométrie locale 3D de la calotte quasi–plane, le potentiel de Préclusion au LO s'écrit sous la forme

$$V_{\mathrm{P}}(D) \simeq +\frac{C_{\mathrm{P}}(\lambda)}{D}\, e^{-D/\xi}, \qquad \xi = \sqrt{\frac{T}{\mu_\psi}},$$

où D est la distance physique entre les centres. La longueur de portée est gouvernée par μ_ψ, tandis que l'amplitude absolue de la répulsion est portée par le préfacteur $C_{\mathrm{P}}(\lambda)$.

Fermeture LO du préfacteur. Dans le schéma mince LO, la fermeture dimensionnellement homogène du préfacteur est

$$\boxed{C_{\mathrm{P}}(\lambda) = \frac{T}{4\pi}\,\Gamma_{\mathrm{P}}\,\frac{\left(A_0^2\lambda^2\right)^2}{\lambda^4}.} \tag{20.61}$$

Le facteur λ^{-4} convertit l'invariant de cœur $(A_0^2\lambda^2)^2$ en préfacteur de potentiel de paire, de dimension J m.

Fermeture sur les constantes de la branche. L'invariant de cœur $A_0^2\lambda^2$ est fermé au LO par la relation EBK canonique du bump 2DOF, cf. (20.54) :

$$A_0^2\lambda^2 = \frac{2h_{\mathrm{eff}}}{\rho c_t}\,\frac{1}{J_0 + J_2}.$$

On en déduit

$$\boxed{C_{\mathrm{P}}(\lambda) = \frac{T}{4\pi}\,\Gamma_{\mathrm{P}}\,\frac{1}{\lambda^4}\left(\frac{2h_{\mathrm{eff}}}{\rho c_t\,(J_0 + J_2)}\right)^2.} \tag{20.62}$$

En utilisant $T = \rho c_t^2$, on peut encore écrire

$$\boxed{C_{\mathrm{P}}(\lambda) = \frac{\Gamma_{\mathrm{P}}}{\pi}\,\frac{h_{\mathrm{eff}}^2}{\rho\,\lambda^4\,(J_0 + J_2)^2}.} \tag{20.63}$$

Statut de la fermeture. Le canal Préclusion est ainsi fermé au LO sans introduction d'un nouveau paramètre libre :

— la portée est portée par $\xi = \sqrt{T/\mu_\psi}$;

— le préfacteur absolu est $C_{\mathrm{P}}(\lambda)$;

— $C_{\mathrm{P}}(\lambda)$ est entièrement exprimé en fonction de $\rho, c_t, h_{\mathrm{eff}}$, de la largeur de branche λ, et des nombres purs $\Gamma_{\mathrm{P}}, J_0, J_2$.

Remarque géométrique. En quasi–2D très mince, le préfacteur géométrique peut devenir en d^0 au lieu de $1/d$. La forme ci-dessus correspond à la géométrie locale 3D de la calotte quasi–plane retenue dans ce chapitre.

20.5 Canal faible-like minimal : fermeture sur la branche NSL 2DOF

Positionnement. À ce stade, le canal faible-like n'est pas fermé comme secteur universel pour toute solution de la théorie. On établit seulement une fermeture minimale cohérente sur la branche source NSL 2DOF, qui porte le canal W-like.

Le point fixe est le suivant :

— le *champ* faible-like est identifié à la réponse radiale r ;

— la *source canonique* de la branche NSL est le courant interne du doublet ;

— l'*équation de champ* est écrite à l'aide d'une densité réduite $\widehat{\rho}_W$, de sorte que la constante g_W reste celle lue sur le secteur radial ;

— cette fermeture vaut, à ce stade, pour la NSL 2DOF harmonique au repos.

20.5.1 Opérateur du canal et fermeture minimale

Identification du champ. Au niveau minimal retenu ici, on identifie le champ faible-like à la réponse radiale de la maille associée à la structure NSL :

$$\boxed{\Phi_W \equiv r.}$$

Lecture de l'équation radiale. Le secteur radial linéarisé conduit à l'opérateur

$$\boxed{\mathcal{L}_W = \partial_{ss} + \frac{2}{R_0}\cot\Big(\frac{s}{R_0}\Big)\partial_s - \frac{\mu_2}{T\kappa_r}.}$$

On conserve alors la constante de champ lue sur le membre de droite du secteur radial :

$$\boxed{g_W = \frac{2}{\kappa_r R_0^3}.} \tag{20.64}$$

Écriture minimale du champ. La fermeture minimale du canal faible-like s'écrit

$$\boxed{\mathcal{L}_W\,\Phi_W = -\,g_W\,\widehat{\rho}_W.} \tag{20.65}$$

La source $\widehat{\rho}_W$ n'est pas ici une charge universelle valable pour toute solution de la théorie ; c'est la densité réduite de source propre à la branche NSL 2DOF.

20.5.2 Fixation canonique de la charge : preuve que $\Lambda_W = \rho$

Doublet tangent de la NSL. La NSL 2DOF repose sur deux jambes tangentielles orthogonales ; on écrit le doublet tangent sous la forme

$$U := (u_1, u_2), \qquad \vec{u}_{\tan} = u_1\,\mathbf{e}_1 + u_2\,\mathbf{e}_2,$$

où $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ forment une base orthonormée locale du plan tangent considéré.

Lagrangien tangent fondamental. Le secteur tangent fondamental est normalisé par le lagrangien local

$$\mathcal{L}_{\tan} = \frac{1}{2}\,\rho\,|\partial_t \vec{u}_{\tan}|^2 - \frac{1}{2}\,T\,|\operatorname{curl}_{\tan} \vec{u}_{\tan}|^2.$$

Dans une base orthonormée, le terme cinétique tangent vaut donc exactement

$$\frac{\rho}{2}\Big((\partial_t u_1)^2 + (\partial_t u_2)^2\Big).$$

Si l'on écrit le lagrangien effectif du doublet sous la forme canonique

$$\mathcal{L}^{\text{kin}}_{\text{NSL}} = \frac{\Lambda_W}{2}\Big((\partial_t u_1)^2 + (\partial_t u_2)^2\Big),$$

l'identification terme à terme donne immédiatement

$$\boxed{\Lambda_W = \rho.} \tag{20.66}$$

Courant canonique du doublet. On considère la rotation interne infinitésimale

$$\delta u_1 = -\alpha u_2, \qquad \delta u_2 = \alpha u_1.$$

Le courant canonique associé a pour composante temporelle

$$j^0_W = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t u_1)}(-u_2) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t u_2)} u_1.$$

Comme

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t u_1)} = \rho\,\partial_t u_1, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t u_2)} = \rho\,\partial_t u_2,$$

on obtient

$$j^0_W = \rho\,(u_1 \partial_t u_2 - u_2 \partial_t u_1).$$

On identifie donc la densité canonique de charge faible-like à

$$\boxed{\rho_W = \rho\,(u_1 \partial_t u_2 - u_2 \partial_t u_1).} \tag{20.67}$$

Sélectivité de branche. Cette définition implique immédiatement

$$\boxed{\rho_W[S] = 0 \qquad \text{si la solution } S \text{ ne porte pas la structure NSL 2DOF.}}$$

Ainsi, toutes les solutions ne portent pas une charge faible-like.

20.5.3 Charge propre de la NSL au repos et source réduite

NSL harmonique au repos. Pour une NSL au repos, on écrit

$$u_1(s,t) = A(s)\cos(\omega_0 t), \qquad u_2(s,t) = A(s)\sin(\omega_0 t),$$

où $\omega_0 = \omega_{\mathrm{NSL}}(q=1)$ est la fréquence propre de la branche. On a alors

$$u_1 \partial_t u_2 - u_2 \partial_t u_1 = \omega_0\, A(s)^2,$$

d'où

$$\boxed{\rho_W^{(+)}(s) = +\rho\,\omega_0\, A(s)^2.} \tag{20.68}$$

Si l'on inverse l'orientation interne du doublet,

$$u_2(s,t) \mapsto -\,u_2(s,t),$$

on obtient symétriquement

$$\boxed{\rho_W^{(-)}(s) = -\rho\,\omega_0\, A(s)^2.} \tag{20.69}$$

Source réduite de canal. Pour conserver la constante de champ $g_W = 2/(\kappa_r R_0^3)$ lue sur le secteur radial, on introduit la densité réduite

$$\boxed{\widehat{\rho}_W := \frac{\rho_W}{\rho\,\omega_0}.} \tag{20.70}$$

Sur la branche NSL 2DOF au repos,

$$\boxed{\widehat{\rho}_W^{(+)} = +A^2, \qquad \widehat{\rho}_W^{(-)} = -A^2.} \tag{20.71}$$

Équation du champ sourcé par une NSL. L'équation de champ devient alors, sur la branche NSL au repos,

$$\boxed{\left(\partial_{ss} + \frac{2}{R_0}\cot\!\Big(\frac{s}{R_0}\Big)\partial_s - \frac{\mu_2}{T\kappa_r}\right)\Phi_W = -\,\frac{2}{\kappa_r R_0^3}\,\widehat{\rho}_W, \qquad \widehat{\rho}_W^{(\pm)} = \pm A^2.} \tag{20.72}$$

Charge globale canonique. La charge globale portée par une NSL vaut

$$\boxed{q_W^{(\pm)} = \int_{\mathbb{S}^3} \rho_W^{(\pm)}\, dV = \pm\,\rho\,\omega_0 \int_{\mathbb{S}^3} A(s)^2\, dV.} \tag{20.73}$$

Moment quadratique du cœur. D'après §6.7, au niveau LO quasi–plan avec le profil $A(u) = \operatorname{sech} u$,

$$\int_{\mathbb{S}^3} A^2\, dV = 2\pi R_0^2\,\lambda\,\kappa_{\mathrm{core}}^{(\mathrm{NSL})}, \qquad \kappa_{\mathrm{core}}^{(\mathrm{NSL})} = 4,$$

donc

$$\boxed{\int_{\mathbb{S}^3} A^2\, dV = 8\pi R_0^2\,\lambda.} \tag{20.74}$$

Réinjection de la fermeture spectrale. La fermeture du cœur NSL

$$\omega_{\mathrm{NSL}} = \chi_{\omega}^{(\mathrm{NSL})}\,\frac{c_t}{\lambda}$$

se réécrit, pour l'état fondamental $q = 1$,

$$\lambda = \chi_{\omega}^{(\mathrm{NSL})}\,\frac{c_t}{\omega_0}.$$

En la réinjectant dans (20.73) et (20.74), on obtient

$$\boxed{q_W^{(\pm)} = \pm\,8\pi\,\chi_{\omega}^{(\mathrm{NSL})}\,R_0^2\,\sqrt{\rho T}.} \tag{20.75}$$

20.5.4 Signe du canal et orientations internes admissibles

Origine du signe. Le signe de la charge faible-like n'est pas porté par l'amplitude scalaire A^2, mais par l'orientation temporelle interne du doublet tangent :

$$\boxed{\rho_W^{(+)}(s) = +\rho\,\omega_0 A(s)^2, \qquad \rho_W^{(-)}(s) = -\rho\,\omega_0 A(s)^2.} \tag{20.76}$$

Le canal faible-like possède donc un signe effectif, déterminé par le sens de rotation interne du cycle (u_1, u_2).

Deux orientations élémentaires. Au niveau minimal, la branche NSL 2DOF admet au moins deux orientations internes élémentaires, notées

$$\boxed{(+) \qquad \text{et} \qquad (-),}$$

avec

$$\boxed{q_W^{(+)} = -\,q_W^{(-)}.}$$

Règle minimale de composition. Pour deux sources NSL, la composition des signes suit alors la règle élémentaire

$$(+,+), \qquad (+,-), \qquad (-,+), \qquad (-,-),$$

avec

$$q_W^{\mathrm{tot}} = q_W^{(1)} + q_W^{(2)}.$$

Au niveau minimal :

— deux sources de même orientation portent une charge totale non nulle ;

— deux sources d'orientations opposées peuvent porter une charge totale nulle.

20.5.5 Neutralité globale et non-trivialité interne

Objet. Une solution composée peut avoir une charge faible-like totale nulle sans être pour autant triviale dans le canal. Il faut donc distinguer soigneusement la *neutralité globale de charge* et la *trivialité interne de structure*.

Charge totale et compensation. Pour une solution composée de deux constituants porteurs de charges

$$q_W^{(1)}, \qquad q_W^{(2)},$$

la charge totale vaut

$$q_W^{\mathrm{tot}} = q_W^{(1)} + q_W^{(2)}.$$

Dans le cas de deux constituants NSL de même module et d'orientations opposées, on obtient

$$q_W^{(+)} + q_W^{(-)} = 0.$$

La solution composée est alors globalement neutre dans le canal faible-like.

Neutralité n'implique pas trivialité. L'annulation de la charge totale ne signifie pas que le canal disparaît localement. En effet, les densités

$$\rho_W^{(+)}(x), \qquad \rho_W^{(-)}(x)$$

peuvent être non nulles séparément, et leur compensation ne vaut qu'après intégration globale. Une solution composée peut donc être globalement neutre tout en portant une structure interne de canal non triviale.

Conséquence pour la suite. Cette distinction est le point structurel minimal nécessaire pour aborder plus tard les solutions composées globalement neutres du canal faible-like.

20.5.6 Interaction statique induite : statut théorique

Objet. La fermeture précédente établit un canal faible-like médié par la réponse radiale

$$\Phi_W \equiv r, \qquad \mathcal{L}_W\, \Phi_W = -\, g_W\, \widehat{\rho}_W, \qquad g_W = \frac{2}{\kappa_r R_0^3}.$$

Sur la branche NSL 2DOF harmonique au repos, la source réduite vaut

$$\widehat{\rho}_W^{(\pm)} = \pm A^2.$$

Existence d'une interaction induite. Dès que deux sources distinctes de branche NSL sont présentes, chacune engendre une réponse radiale qui modifie l'environnement effectif de l'autre. Il existe donc, au niveau théorique minimal, une interaction statique induite par le canal faible-like.

Chaîne médiatrice pertinente. Pour deux sources NSL, la médiation doit être lue comme la chaîne induite

$$A^2 \;\longrightarrow\; r \;\longrightarrow\; A,$$

c'est-à-dire :

1. une source NSL excite le secteur radial via $\widehat{\rho}_W$;
2. la réponse radiale ainsi créée rétroagit ensuite sur une seconde source NSL.

Statut logique. La fermeture actuelle suffit donc à établir l'existence :

— d'un canal d'interaction faible-like ;

— d'une branche chargée explicite sur la NSL 2DOF ;

— et d'une interaction statique induite entre sources de branche.

Transition vers une lecture minimale. À défaut de la loi intégrale complète entre deux profils étendus, on peut toutefois introduire immédiatement une *lecture ponctuelle monopolaire minimale* du canal, fondée sur le noyau local gappé associé à l'opérateur $\mathcal{L}_W$. C'est l'objet de la sous-section suivante.

20.5.7 Lecture statique minimale du canal et force ponctuelle entre deux sources NSL

Principe. Une fois le canal faible-like fixé par

$$\mathcal{L}_W\,\Phi_W = -\,g_W\,\widehat{\rho}_W, \qquad g_W = \frac{2}{\kappa_r R_0^3},$$

on peut associer à deux sources de branche une lecture statique minimale du canal, de type ponctuel/monopolaire, au moyen du noyau local gappé.

Échelle de décroissance locale. On introduit la longueur caractéristique du canal

$$\boxed{\ell_W = \sqrt{\frac{T\kappa_r}{\mu_2}}.} \tag{20.77}$$

Noyau local minimal. Dans la réduction locale quasi–plane isotrope, le noyau de Green de l'opérateur

$$-\Delta_{\mathrm{loc}} + \ell_W^{-2}$$

est

$$\boxed{G_W^{\mathrm{loc}}(R) = \frac{1}{4\pi}\,\frac{e^{-R/\ell_W}}{R},} \tag{20.78}$$

où R désigne la distance entre les deux sources.

Énergie croisée minimale. Pour deux sources de charges de branche $q_W^{(1)}$ et $q_W^{(2)}$, on associe alors l'énergie croisée statique minimale

$$\boxed{E_{\mathrm{int}}^{(W)}(R) = -\,g_W^2\,q_W^{(1)}\,q_W^{(2)}\,G_W^{\mathrm{loc}}(R) = -\frac{g_W^2\,q_W^{(1)}q_W^{(2)}}{4\pi}\,\frac{e^{-R/\ell_W}}{R}.} \tag{20.79}$$

Force statique minimale. La force associée est définie par

$$F_W(R) = -\frac{d}{dR}E_{\mathrm{int}}^{(W)}(R),$$

d'où

$$\boxed{F_W(R) = -\frac{g_W^2\,q_W^{(1)}q_W^{(2)}}{4\pi}\,\frac{e^{-R/\ell_W}}{R^2}\left(1+\frac{R}{\ell_W}\right).} \tag{20.80}$$

Cas de deux sources NSL 2DOF au repos. Sur la branche NSL 2DOF harmonique au repos, les charges de branche valent

$$q_W^{(\pm)} = \pm\,8\pi\,\chi_\omega^{(\mathrm{NSL})}\,R_0^2\,\sqrt{\rho T}.$$

Pour deux sources de même orientation, on obtient donc

$$\boxed{F_W^{(\mathrm{NSL,NSL})}(R) = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{2}{\kappa_r R_0^3}\right)^2\left(8\pi\,\chi_\omega^{(\mathrm{NSL})}\,R_0^2\,\sqrt{\rho T}\right)^2\frac{e^{-R/\ell_W}}{R^2}\left(1+\frac{R}{\ell_W}\right).} \tag{20.81}$$

avec

$$\boxed{\ell_W = \sqrt{\frac{T\kappa_r}{\mu_2}}.} \tag{20.82}$$

Forme simplifiée. L'expression précédente se simplifie en

$$\boxed{F_W^{(\mathrm{NSL,NSL})}(R) = -\frac{64\pi\,\kappa_\omega^{(\mathrm{NSL})\,2}\,\rho T}{\kappa_r^2\,R_0^2}\,\frac{e^{-R/\ell_W}}{R^2}\left(1+\frac{R}{\ell_W}\right).} \tag{20.83}$$

Signe de l'interaction. Le signe effectif dépend du produit $q_W^{(1)} q_W^{(2)}$. Deux sources de même orientation interne portent des charges de même signe ; deux sources d'orientations opposées portent des charges de signe opposé.

Portée de cette lecture. Les formules (20.79)–(20.83) définissent le rang LO ponctuel du canal faible-like. Pour des profils NSL étendus, la même fermeture s'applique après projection sur les profils de source correspondants ; les corrections de forme relèvent alors des facteurs de profil et de recouvrement du canal considéré.

20.5.8 Résumé et portée de la fermeture

Résumé. Le canal faible-like associé à la NSL 2DOF admet ainsi, au niveau minimal, l'écriture homogène suivante :

$$\boxed{\mathcal{L}_W\,\Phi_W = -\,g_W\,\widehat{\rho}_W,}$$

avec

$$\boxed{\mathcal{L}_W = \partial_{ss} + \frac{2}{R_0}\cot\Big(\frac{s}{R_0}\Big)\partial_s - \frac{\mu_2}{T\kappa_r}, \qquad g_W = \frac{2}{\kappa_r R_0^3},}$$

et, sur la branche NSL 2DOF au repos,

$$\boxed{\widehat{\rho}_W^{(\pm)} = \pm A^2, \qquad \rho_W^{(\pm)} = \pm\rho\,\omega_0\,A^2, \qquad q_W^{(\pm)} = \pm\,8\pi\,\chi_\omega^{(\mathrm{NSL})}\,R_0^2\,\sqrt{\rho T}.}$$

Structure minimale du canal. La fermeture actuelle fixe donc :

- le médiateur faible-like $\Phi_W \equiv r$,
- l'opérateur du canal $\mathcal{L}_W$,
- la constante de champ g_W,
- la charge canonique de branche ρ_W,
- la source réduite $\widehat{\rho}_W$,
- la structure signée minimale portée par les deux orientations internes de la NSL 2DOF,
- et une lecture ponctuelle minimale de l'interaction statique du canal.

Portée de validité. Cette fermeture est établie pour la NSL 2DOF harmonique au repos. Le résultat utilisé dans la suite est donc la fermeture faible–like locale de cette branche, et non une fermeture universelle pour l'ensemble des solutions de la théorie.

Interaction statique. La fermeture actuelle fournit une loi Yukawa *minimale* pour des sources de branche lues au niveau ponctuel/monopolaire. La loi complète de l'interaction entre deux profils NSL étendus dépendrait d'une réduction intégrale supplémentaire de la fonction de Green. Cette réduction n'est pas requise dans le présent manuscrit, car les fermetures consomment uniquement la lecture ponctuelle monopolaire.

Portée de la fermeture. La présente section établit la structure locale du canal faible–like sur la branche NSL 2DOF et la forme ponctuelle minimale de son interaction statique. La réduction intégrale entre sources étendues n'est pas utilisée dans les fermetures développées dans la présente partie ; elle n'est donc pas introduite comme résultat autonome.

Chapitre 21

Couplage champ–solution

21.1 Critère général de sensibilité des solutions aux canaux de champ

Objet. Le présent chapitre n'a pas pour but de redéfinir chacun des canaux déjà établis, mais d'en tirer une conséquence transversale : *quelles solutions sont réellement sensibles à quel canal, et à quel niveau.* Pour éviter toute ambiguïté, il faut distinguer trois notions logiquement séparées :

1. l'*existence d'une source locale* de canal ;
2. l'*existence d'un couplage monopolaire effectif* au champ associé ;
3. la présence éventuelle d'une *structure interne non triviale* même lorsque la charge totale du canal est nulle.

Cette distinction sera décisive pour les solutions composées globalement neutres.

Convention de lecture. Dans toute cette section, on dira qu'une solution est *sensible* à un canal lorsque la réduction effective du problème fait apparaître, pour cette solution, soit une source non nulle du champ correspondant, soit une énergie d'interaction non triviale dans le canal considéré. À l'inverse, une solution sera dite *insensible au niveau monopolaire* lorsqu'elle ne porte pas la charge ou la projection de canal requise, même si une structure interne résiduelle peut subsister.

21.1.1 Canal gravitation–like : universalité sur les solutions localisées

Hypothèse de travail. Dans tout ce qui suit, une *solution localisée à cœur non trivial* désigne une solution dont le cœur n'est pas identiquement nul, dont l'énergie totale est finie, et dont la localisation est effective à l'échelle $\lambda \ll R_0$. Les modes délocalisés ou uniformes ne sont donc pas visés par la présente proposition. Sous cette hypothèse de localisation, on a en particulier

$$\omega \sim \frac{c_t}{\lambda} \qquad \Longrightarrow \qquad \omega R_0 \gg c_t,$$

de sorte que la fermeture gravitation–like asymptotique du régime local est bien applicable.

Proposition 21.1 (Universalité du couplage gravitation–like pour les solutions localisées)**.** *Au rang LO, toute solution localisée à cœur non trivial et d'énergie totale finie positive est sensible au canal gravitation–like. Cette sensibilité ne dépend ni du signe d'une charge interne, ni d'une neutralité électromagnétique-, faible- ou forte-like éventuelle, mais uniquement du contenu énergétique localisé de la solution.*

Preuve. D'après la fermeture gravitation–like établie plus haut, on a dans le régime local pertinent

$$Q_g \simeq \frac{E_{\mathrm{tot}}^{\mathbb{S}^3}}{T\kappa_r R_0} \qquad \text{(voir (20.26))}.$$

Le canal gravitation–like lit donc directement le contenu énergétique du cœur, et non une orientation interne signée de type phase ou doublet.

Dès lors, pour toute solution localisée à cœur non trivial, l'énergie totale $E_{\mathrm{tot}}^{\mathbb{S}^3}$ est finie et positive ; on a donc

$$Q_g \neq 0.$$

La solution source alors un champ radial extérieur non trivial et est, par définition, sensible au canal gravitation–like.

Cette conclusion est indépendante :

— du signe d'une charge de canal interne ;

— d'une éventuelle neutralité électromagnétique, faible-like ou forte-like ;

— du fait que la solution soit élémentaire ou composée,

puisque ces propriétés n'annulent pas son contenu énergétique localisé. □

Conséquence. Au niveau du présent manuscrit, le canal gravitation–like est le seul canal véritablement *universel* sur l'ensemble des solutions localisées déjà construites.

Remarque. Une solution peut donc être globalement neutre dans un autre canal tout en restant gravitationnellement active. La neutralité de charge dans un canal interne n'implique jamais l'insensibilité gravitation–like, car ce dernier canal ne couple pas une orientation signée mais l'énergie localisée.

21.1.2 Canal électromagnétique–like : sélection par courant de phase

Proposition 21.2 (Critère monopolaire de sensibilité EM–like)**.** *Au niveau monopolaire, une solution est sensible au canal électromagnétique–like si et seulement si sa charge de Noether de phase*

$$Q_{\mathrm{N}} := \int_{\mathbb{S}^3} j^0 \, dV$$

est non nulle, où

$$j^0 = \rho \, \Im(\psi^* \dot{\psi}).$$

Autrement dit, le canal EM–like couple exactement les solutions dont le courant de phase $U(1)$ porte une composante monopolaire non nulle. La terminologie de courant de Noether et de symétrie $U(1)$ est utilisée dans son sens standard de théorie des champs [17, 16]. La normalisation du courant et de la charge est en revanche celle du cadre HSM.

Preuve. Le canal EM–like est, par construction, le canal de Noether associé à la symétrie de phase $U(1)$. Pour une branche écrite sous la forme

$$\psi = A \, e^{i\phi},$$

on a

$$j^0 = \rho \, A^2 \, \partial_t \phi.$$

Le couplage EM–like monopolaire est donc gouverné par une quantité orientée : le sens local de rotation de phase.

Si l'intégrale globale

$$Q_{\mathrm{EM}} = \int_{\mathbb{S}^3} j^0 \, dV$$

est non nulle, la solution source un monopôle EM–like non nul et est sensible au canal au niveau monopolaire.

Si au contraire la structure de phase se compense globalement — par exemple dans une polarisation linéaire, dans une superposition de branches de phases opposées, ou dans une combinaison composée de charge totale nulle — alors

$$Q_{\mathrm{N}} = 0,$$

et le couplage monopolaire au canal EM–like disparaît. □

Remarque de structure. Il faut distinguer soigneusement :

— l'existence locale d'un courant de phase j^0 ;

— l'existence d'une charge de Noether monopolaire totale $Q_{\mathrm{N}} \neq 0$.

Une solution peut donc être localement non triviale dans le canal EM–like tout en étant globalement neutre au niveau monopolaire.

Lecture pratique. La sélection EM–like se fait donc par *orientation de phase monopolaire* :

— une branche circulaire orientée porte en général une charge EM–like non nulle ;

— une branche réelle, linéairement polarisée, ou une combinaison de charges opposées est EM–neutre au niveau monopolaire ;

— pour les composés à recouvrement fort, la neutralité ou la charge totale du canal est fixée par la somme monopolaire des contributions internes, tandis que l'amplitude effective peut encore être modulée par un facteur de forme.

Lemme 21.3 (Appariement source–champ du canal EM–like)**.** *Soit $\mathcal{S}$ une solution localisée portant un courant de phase $j^\mu_{\mathcal{S}} = (j^0_{\mathcal{S}}, \vec{j}_{\mathcal{S}})$. La charge de Noether monopolaire associée à la solution est*

$$Q_{\mathrm{N}}(\mathcal{S}) := \int_{\mathbb{S}^3} j^0_{\mathcal{S}} \, dV. \tag{21.1}$$

La charge source qui apparaît dans les équations Maxwell–like du champ est

$$Q_{\mathrm{field}}(\mathcal{S}) := \int_{\mathbb{S}^3} \rho_{\mathrm{EM},\mathcal{S}} \, dV. \tag{21.2}$$

Avec le dictionnaire de source du canal EM–like (16.4)*, ces deux charges sont reliées par*

$$\boxed{Q_{\mathrm{field}}(\mathcal{S}) = \frac{1}{g_\Omega} Q_{\mathrm{N}}(\mathcal{S}).} \tag{21.3}$$

Démonstration. Le dictionnaire de source du canal EM–like donne

$$\rho_{\mathrm{EM},\mathcal{S}} = \frac{1}{g_\Omega} j^0_{\mathcal{S}}.$$

En intégrant sur $\mathbb{S}^3$, il vient

$$Q_{\mathrm{field}}(\mathcal{S}) = \int_{\mathbb{S}^3} \rho_{\mathrm{EM},\mathcal{S}} \, dV = \frac{1}{g_\Omega} \int_{\mathbb{S}^3} j^0_{\mathcal{S}} \, dV = \frac{1}{g_\Omega} Q_{\mathrm{N}}(\mathcal{S}).$$

□

Statut de la charge de solution. La charge Q_{N} mesure le contenu Noether interne de la solution. La charge Q_{field} est la charge effectivement vue par le champ Maxwell–like. Les motifs relatifs établis ci-dessous portent sur la charge de solution à travers ce dictionnaire source–champ. Le quantum $Q_{\mathrm{EM},*}^{\mathrm{HSM,LO}}$, défini séparément par la fermeture du canal EM–like, fixe l'échelle élémentaire du champ ; il n'est pas supposé égal à la charge mécanique de Noether.

21.1.3 Projection EM–like entre témoins internes de composés

Objet. Le critère monopolaire (21.2) décide si une solution porte une charge EM–like totale. Pour les solutions composées neutres, ce critère ne suffit pas à décrire les couplages internes : des témoins internes peuvent rester sensibles au canal EM–like même lorsque la charge totale du composé est nulle. On introduit ici la règle de projection du canal EM–like sur deux témoins internes d'un composé.

Canal de champ consommé. Le canal EM–like de champ est le canal à deux projections de source défini par la fermeture EM–like, de constante sans dimension Γ_{EM}, voir (20.36). Dans le présent chapitre, cette constante est consommée comme amplitude universelle du canal, avant projection sur une solution composée particulière.

Compatibilité de largeur. Soient deux témoins internes portés par deux indices EBK réduits q_a et q_b. Pour éviter toute ambiguïté avec les notations de longueur d'onde ou de courbure locale utilisées ailleurs, on note ici

$$w_q := q\, w_1$$

la largeur axiale réduite associée au témoin q.

La compatibilité de largeur est d'abord définie à partir du profil axial normalisé hérité du coeur canonique HSM,

$$a(\xi) = \operatorname{sech} \xi.$$

On pose

$$I_a := \int_{-\infty}^{+\infty} a(\xi)^2 \, d\xi, \qquad u_q(x) := \frac{1}{\sqrt{w_q I_a}}\, a\!\left(\frac{x}{w_q}\right),$$

de sorte que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_q(x)^2 \, dx = 1.$$

Le recouvrement linéaire des deux témoins est alors

$$\boxed{\Omega_{ab} := \int_{-\infty}^{+\infty} u_{q_a}(x)\, u_{q_b}(x)\, dx.} \tag{21.4}$$

En introduisant le rapport de largeur

$$r_{ab} := \frac{w_{q_a}}{w_{q_b}} = \frac{q_a}{q_b},$$

on obtient la forme adimensionnée

$$\boxed{\Omega_{ab} = \frac{\sqrt{r_{ab}}}{I_a} \int_{-\infty}^{+\infty} a(r_{ab}\xi)\, a(\xi)\, d\xi.} \tag{21.5}$$

Le recouvrement profilé canonique est le témoin de stabilité associé au profil HSM $a(\xi) = \operatorname{sech} \xi$:

$$\boxed{\Xi_{ab}^{(\mathrm{sech})} := \Omega_{ab}^2 = \left[\frac{\sqrt{r_{ab}}}{I_a} \int_{-\infty}^{+\infty} a(r_{ab}\xi)\, a(\xi)\, d\xi\right]^2.} \tag{21.6}$$

Ce facteur est symétrique sous $a \leftrightarrow b$, borné par $0 < \Xi_{ab}^{(\mathrm{sech})} \leq 1$, et vaut 1 lorsque les deux largeurs sont identiques. Le carré vient de la forme bilinéaire de Galerkin : le couplage effectif contient un facteur de mode pour chaque témoin, puis la projection quadratique contracte les deux facteurs de mode.

Fermeture de queue utilisée dans la réduction projective. Dans la zone de raccord entre témoins de finesse très différente, le couplage effectif est dominé par la queue du profil canonique,

$$\operatorname{sech}\xi \simeq 2e^{-|\xi|} \qquad (|\xi| \gg 1).$$

La fermeture de queue donne alors

$$\boxed{\Xi_{ab}^{(\mathrm{tail})} = \left(\frac{2\sqrt{w_{q_a} w_{q_b}}}{w_{q_a} + w_{q_b}}\right)^2 = \frac{4q_a q_b}{(q_a+q_b)^2}.} \tag{21.7}$$

Cette expression est la fermeture LO utilisée dans les réductions projectives numériques qui consomment (21.11). Pour alléger les notations dans ce canal, on pose

$$\boxed{\Xi_{ab} := \Xi_{ab}^{(\mathrm{tail})}.} \tag{21.8}$$

La différence entre $\Xi_{ab}^{(\mathrm{tail})}$ et $\Xi_{ab}^{(\mathrm{sech})}$ mesure la stabilité de profil de la fermeture de largeur.

Demi-cycle projectif des témoins. Un témoin interne de bilobe définit un axe de canal plutôt qu'une flèche orientée. Les orientations opposées représentent donc le même axe :

$$n \sim -n.$$

La mesure projective canonique est alors celle du demi-cycle

$$\boxed{\theta \in [0,\pi], \qquad d\mu_{\mathrm{proj}} = \frac{d\theta}{\pi}.} \tag{21.9}$$

Projection axial–transverse. Lorsque le canal EM–like couple un témoin axial et un témoin transverse, la projection instantanée entre les deux axes est $|\cos\theta|$. La projection moyenne de secteur vaut donc

$$\boxed{\mathcal{P}_{\mathrm{ax}\perp} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi |\cos\theta|\, d\theta = \frac{2}{\pi}.} \tag{21.10}$$

Proposition 21.4 (Couplage EM–like projeté entre deux témoins internes)**.** *Soient T_a, T_b deux témoins internes d'un composé, portés par les échelles EBK q_a, q_b. Si leur canal effectif est un canal axial–transverse EM–like, alors le hors-diagonal réduit induit par le canal EM–like s'écrit*

$$\boxed{H_{ab}^{(\mathrm{EM,proj})} = \Gamma_{\mathrm{EM}}\, \Xi_{ab}^{(\mathrm{tail})}\, \mathcal{P}_{\mathrm{ax}\perp} = \Gamma_{\mathrm{EM}}\, \frac{4q_a q_b}{(q_a+q_b)^2}\, \frac{2}{\pi}.} \tag{21.11}$$

Démonstration. La constante Γ_{EM} fournit l'amplitude universelle du canal EM–like à deux projections de source, définie dans la fermeture du champ. Le passage à deux témoins internes d'un composé ajoute deux facteurs de couplage champ–solution. Le premier est la compatibilité de largeur de queue, $\Xi_{ab}^{(\mathrm{tail})}$, définie par (21.7). Le recouvrement profilé $\Xi_{ab}^{(\mathrm{sech})}$, défini par (21.6), fournit le contrôle de stabilité de profil. Le second est la projection axial–transverse des axes de témoins, donnée par (21.10). Le produit de ces trois facteurs donne (21.11). □

Séparation des rôles. La constante Γ_{EM} est une constante de canal. Les facteurs Ξ_{ab} et $\mathcal{P}_{\mathrm{ax}\perp}$ appartiennent au couplage champ–solution. Ils ne modifient pas la définition du champ EM–like ; ils décrivent seulement la projection de ce champ sur les témoins internes du composé considéré.

21.1.4 Charge EM–like projetée du bump 3DOF

Objet. On explicite ici la conséquence du critère monopolaire (21.2) pour la branche bump 3DOF isolée. Le bump 3DOF porte une rotation de phase dans le sous-espace tangent actif, mais cette rotation est projetée par la géométrie conique de la solution. Le facteur projectif associé est

$$\sigma = \sin^2 \alpha.$$

Ansatz conique. Au rang LO, la partie tangentielle circulaire du bump 3DOF s'écrit, à facteur d'enveloppe commun près,

$$\vec{u}_{\parallel}(s,t) = A(s) \sin\alpha \, (\cos \omega t \, \vec{e}_\theta + \varsigma \, \sin \omega t \, \vec{e}_\phi) \,, \qquad \varsigma = \pm 1.$$

La composante radiale proportionnelle à $\cos\alpha$ ne porte pas de courant de phase EM-like. Le courant de Noether EM-like est donc porté uniquement par la composante circulaire tangentielle.

Densité de charge projetée. Par le critère de courant de phase (21.2), la densité monopolaire EM-like est proportionnelle au produit

$$\rho \, \Im(\psi_{\parallel}^{*} \dot{\psi}_{\parallel}).$$

Comme l'amplitude tangentielle circulaire est multipliée par $\sin\alpha$, la densité quadratique de charge est multipliée par

$$\sin^2 \alpha = \sigma.$$

On obtient donc, au rang LO,

$$\boxed{j^0_{\mathrm{EM,b3}}(s;\alpha) = \sigma \, j^0_{\mathrm{EM,b2}}(s), \qquad \sigma = \sin^2 \alpha.} \tag{21.12}$$

Charge globale. En intégrant sur le cœur, le même facteur projectif se conserve :

$$\boxed{Q^{(\mathrm{3DOF})}_{\mathrm{EM}}(\alpha) = \sigma \, Q^{(\mathrm{2DOF})}_{\mathrm{EM}}, \qquad \sigma = \sin^2 \alpha.} \tag{21.13}$$

Le signe de la charge est fixé séparément par l'orientation de phase $\varsigma = \pm 1$ et par la conjugaison de charge.

Branches coniques du bump 3DOF. Pour le bump 3DOF isolé, les deux branches coniques canoniques sont celles de la quantification conique de la branche 3DOF,

$$\sigma_{\downarrow} = \frac{1}{3}, \qquad \sigma_{\uparrow} = \frac{2}{3}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\left| \frac{Q^{(\mathrm{3DOF})}_{\mathrm{EM}}}{Q^{(\mathrm{2DOF})}_{\mathrm{EM}}} \right| \in \left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right\}.} \tag{21.14}$$

Avec la branche bump 2DOF de référence, dont le module relatif est 1, le motif relatif des modules de charge est donc

$$\boxed{1, \qquad \frac{2}{3}, \qquad \frac{1}{3}.} \tag{21.15}$$

21.1.5 Couplage EM–like compact entre constituants bump 3DOF

Objet. La sous-section précédente fixe les charges EM–like relatives des branches bump 3DOF. On définit ici le terme compact de couplage EM–like entre trois constituants bump 3DOF assemblés en composé couleur–blanc CB3. Ce terme consomme le couplage élémentaire du canal EM–like $\alpha_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{HSM,LO}}$, défini par (20.34).

Contraste EM compact d'une triade. Pour une triade de charges réduites

$$\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3),$$

on définit le contraste pair-à-pair normalisé par

$$\boxed{\mathcal{C}_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{CB3}}(\mathbf{q}) := 3 \sum_{1 \le i < j \le 3} q_i q_j.} \tag{21.16}$$

Le facteur 3 normalise les trois paires internes de la triade compacte sur une unité commune de contraste.

Énergie EM–like compacte. Au rang compact LO, la contribution EM–like du composé CB3 est

$$\boxed{\Delta E_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{CB3}}(\mathbf{q}) = \alpha_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{HSM,LO}} \frac{E_* \tau_3}{2\pi} \mathcal{C}_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{CB3}}(\mathbf{q}).} \tag{21.17}$$

Les grandeurs E_* et τ_3 sont celles de la fermeture compacte CB3 ; le présent chapitre fixe seulement la loi de couplage EM–like associée aux charges réduites.

Proposition 21.5 (Correction EM–like compacte du doublet CB3 léger)**.** *Pour les deux motifs réduits*

$$\mathbf{q}_{\uparrow\uparrow\downarrow} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right), \qquad \mathbf{q}_{\uparrow\downarrow\downarrow} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right),$$

la différence EM–like compacte vaut

$$\boxed{\Delta E_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{CB3}}(\mathbf{q}_{\uparrow\downarrow\downarrow}) - \Delta E_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{CB3}}(\mathbf{q}_{\uparrow\uparrow\downarrow}) = -\alpha_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{HSM,LO}} \frac{E_* \tau_3}{2\pi}.} \tag{21.18}$$

Démonstration. Pour le premier motif,

$$\sum_{i<j} q_i q_j \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9} - \frac{2}{9} - \frac{2}{9} = 0.$$

Pour le second motif,

$$\sum_{i<j} q_i q_j \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{9} - \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = -\frac{1}{3}.$$

Par la définition (21.16), on obtient donc

$$\mathcal{C}_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{CB3}}(\mathbf{q}_{\uparrow\downarrow\downarrow}) - \mathcal{C}_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{CB3}}(\mathbf{q}_{\uparrow\uparrow\downarrow}) = 3\left(-\frac{1}{3} - 0\right) = -1.$$

L'identité (21.18) suit alors directement de (21.17). □

21.1.6 Charge EM–like de la NSL 2DOF

Objet. On explicite ici la charge de Noether EM–like portée par une solution NSL 2DOF au repos. Cette charge servira ensuite à construire le couplage EM–like du composé neutre à deux constituants.

Ansatz NSL 2DOF. Pour une NSL 2DOF au repos, on écrit

$$u_1(s,t) = A(s)\cos(\omega_{\mathrm{NSL}}t), \qquad u_2(s,t) = A(s)\sin(\omega_{\mathrm{NSL}}t),$$

soit, en notation complexe,

$$\psi(s,t) = u_1 + i\,u_2 = A(s)e^{i\omega_{\mathrm{NSL}}t}.$$

Dans la réduction locale canonique du constituant NSL 2DOF, on travaille avec le profil adimensionné $A(u) = \operatorname{sech} u$, normalisé par $A(0) = 1$,cf. (6.126)

Densité de charge EM–like. Par définition du courant de Noether de phase,

$$j^0 = \rho\,\Im(\psi^*\dot{\psi}).$$

On a ici

$$\dot{\psi} = i\omega_{\mathrm{NSL}}A(s)e^{i\omega_{\mathrm{NSL}}t}, \qquad \psi^*\dot{\psi} = i\omega_{\mathrm{NSL}}A(s)^2,$$

d'où

$$\boxed{j^0_{\mathrm{EM,NSL}}(s) = \rho\,\omega_{\mathrm{NSL}}\,A(s)^2.} \tag{21.19}$$

Le changement d'orientation interne $u_2 \mapsto -u_2$ change le signe de la charge et donne les deux branches opposées :

$$\boxed{{j^0_{\mathrm{EM,NSL}}}^{(\pm)}(s) = \pm\,\rho\,\omega_{\mathrm{NSL}}\,A(s)^2} \tag{21.20}$$

Charge globale. L'intégration sur $\mathbb{S}^3$ donne

$$Q^{(\pm)}_{\mathrm{EM}}(\mathrm{NSL}) = \int_{\mathbb{S}^3} {j^0_{\mathrm{EM,NSL}}}^{(\pm)}\,dV = \pm\,\rho\,\omega_{\mathrm{NSL}}\int_{\mathbb{S}^3} A(s)^2\,dV. \tag{21.21}$$

Au rang LO local, on utilise la mesure de cœur (4.1), soit

$$dV_{\mathrm{c}} = J_{\mathrm{c}}(s)\,ds\,d\Omega, \qquad J_{\mathrm{c}}(s) \simeq R_0^2, \qquad \lambda_{\mathrm{NSL}} \ll R_0,$$

de sorte que, dans la calotte quasi-plane,

$$dV_{\mathrm{c}} \simeq R_0^2\,ds\,d\Omega.$$

Avec $\int d\Omega = 4\pi$, le changement de variable $s = \lambda_{\mathrm{NSL}}u$, et

$$A(u) = \operatorname{sech} u, \qquad I_0 := \int_{\mathbb{R}} A(u)^2\,du = 2 \quad \text{par (6.115)},$$

on obtient

$$\int_{\mathbb{S}^3} A(s)^2\,dV \simeq 4\pi R_0^2\lambda_{\mathrm{NSL}}\int_{\mathbb{R}} A(u)^2\,du = 8\pi R_0^2\lambda_{\mathrm{NSL}}.$$

Par ailleurs, la pulsation NSL vérifie

$$\omega_{\mathrm{NSL}} = \chi_\omega^{(\mathrm{NSL})}\,\frac{c_t}{\lambda_{\mathrm{NSL}}}, \qquad c_t = \sqrt{\frac{T}{\rho}}, \tag{21.22}$$

cf. (6.120). On en déduit

$$\boxed{Q^{(\pm)}_{\mathrm{EM}}(\mathrm{NSL}) = \pm\,8\pi\,\chi_\omega^{(\mathrm{NSL})}\,R_0^2\,\sqrt{\rho T}.} \tag{21.23}$$

Statut. La NSL 2DOF porte donc bien une charge EM–like monopolaire non nulle, de signe orienté. Cette charge est un objet de couplage ; elle ne doit pas être confondue avec la charge faible–like interne du doublet NSL.

21.1.7 Charge EM–like du NSL 3DOF

Objet. Le NSL 3DOF est une solution élémentaire 3DOF, et non un composé. Son couplage EM–like est donc lu directement sur le courant de phase de la composante tangentielle circulaire de l'ansatz conique

$$\vec{u}_0(s,t) = A(s)\Big[\sin\alpha\big(\cos\omega_0 t\,\vec{e}_\theta + \varsigma\,\sin\omega_0 t\,\vec{e}_\phi\big) + \cos\alpha\,\vec{e}_r\Big], \qquad \varsigma = \pm 1.$$

La composante radiale proportionnelle à $\cos\alpha$ ne porte pas de courant de phase EM–like.

Label de phase. Le label discret de charge EM–like est porté par l'orientation de la rotation tangentielle :

$$\boxed{n_{\mathrm{EM}}^{(\mathrm{NSL3})} = \varsigma \in \{-1,+1\}.} \tag{21.24}$$

L'inversion de l'orientation interne $\varsigma \mapsto -\varsigma$ inverse donc le signe de la charge EM–like, sans modifier la largeur de cœur ni la masse.

Projection conique. Le courant de phase EM–like est quadratique dans l'amplitude tangentielle circulaire. Or cette amplitude est multipliée par $\sin\alpha$. Le module effectif du couplage EM–like est donc projeté par

$$\sigma = \sin^2\alpha.$$

On obtient au rang LO :

$$\boxed{q_{\mathrm{eff}}^{(\mathrm{NSL3})}(\sigma) = \sigma\, n_{\mathrm{EM}}^{(\mathrm{NSL3})}, \qquad \sigma = \sin^2\alpha \in \left\{\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right\}.} \tag{21.25}$$

Branches coniques. Les deux branches coniques du NSL 3DOF donnent donc

$$\boxed{q_{\mathrm{eff}}^{(\mathrm{NSL3})} \in \left\{\pm\frac{1}{3},\pm\frac{2}{3}\right\}.} \tag{21.26}$$

Ces nombres sont des charges effectives relatives du canal EM–like. Par le lemme d'appariement source–champ (21.3), ils s'appliquent à la charge de champ Q_{field}. L'échelle élémentaire absolue est fournie par le quantum $Q_{\mathrm{EM},*}^{\mathrm{HSM,LO}}$, défini dans la fermeture EM–like.

21.1.8 Canal faible–like : sélectivité stricte de la branche NSL

Proposition 21.6 (Sélectivité de branche du canal faible–like)**.** *Le canal faible–like n'est pas universel. Au niveau minimal actuellement fermé, il sélectionne la structure NSL 2DOF et, plus précisément, le doublet interne (u_1,u_2) qui porte la densité canonique*

$$\rho_W = \rho\,(u_1\partial_t u_2 - u_2\partial_t u_1).$$

Par conséquent, toute solution ne portant pas cette structure NSL est insensible au canal faible–like au niveau monopolaire minimal.

Preuve. Dans la fermeture minimale établie pour ce canal, le champ de réponse est identifié à la variable radiale r, mais la source canonique n'est pas l'énergie locale seule : elle est donnée par le courant interne du doublet NSL. La théorie fixe explicitement la règle

$$\rho_W[S] = 0 \qquad \text{si la solution } S \text{ ne porte pas la structure NSL 2DOF.}$$

Il en résulte que le canal faible–like ne couple pas, au niveau minimal, une solution localisée générique, mais seulement la branche NSL et les composés qui en héritent structurellement. □

Conséquence pour les composés neutres. Une solution composée peut être globalement neutre dans ce canal tout en restant non triviale localement. C'est précisément le cas d'un composé neutre de type Z^0–like : la charge totale de canal y est nulle,

$$q_W^{(\mathsf{Z}^0)} = 0,$$

mais cette neutralité n'implique pas l'annulation point par point de la densité interne de canal. Le couplage monopolaire est donc nul, tandis qu'une structure interne de canal peut subsister.

21.1.9 Canal Préclusion : universalité locale sous recouvrement, sans champ médiateur

Proposition 21.7 (Portée exacte du canal Préclusion)**.** *Le canal Préclusion n'est pas un champ fondamental supplémentaire : il émerge variationnellement du recouvrement des cœurs localisés. Toute solution localisée est donc sensible au canal Préclusion dès qu'elle entre dans un régime de recouvrement non négligeable avec une autre solution localisée, mais une solution isolée ne porte pas à elle seule un monopôle Préclusion propagé à longue portée.*

Preuve. Le mécanisme de Préclusion provient du surcoût de gradient et des contraintes de phase dans le secteur transverse. Sa loi effective est une répulsion de portée finie, gouvernée par le recouvrement des profils de cœur. Il ne s'agit donc pas d'un champ autonome propagé par une charge locale, mais d'une énergie interactionnelle induite lorsque deux cœurs se recouvrent. La sensibilité au canal est dès lors universelle sur les familles localisées *en situation de recouvrement*, qu'elles soient 2DOF, 3DOF, neutres ou chargées dans d'autres canaux. En revanche, pour une solution isolée, il n'y a pas de champ Préclusion extérieur à sourcer. □

Conclusion doctrinale. Le canal Préclusion est donc universel comme *mécanisme local d'exclusion de cœur*, mais non comme secteur de champ monopolaire autonome.

21.1.10 Canal forte–like : sélectivité 3DOF et projecteur de couleur

Proposition 21.8 (Sélectivité 3DOF du canal forte–like)**.** *Le canal forte–like couple uniquement la composante 3DOF projetée sur la direction interne de couleur. Il est donc absent pour les solutions purement 2DOF et n'agit, parmi les branches localisées déjà construites, que sur les solutions 3DOF possédant une projection de couleur non nulle.*

Preuve. Le canal forte–like est obtenu par projection du secteur tangent 3DOF sur un projecteur interne de couleur. La charge forte associée prend la forme

$$I_{\mathsf{s}} = \mathcal{K}_{\mathsf{s}}\, \Pi_{\mathsf{col}}[\text{cœur 3DOF}],$$

ce qui montre immédiatement que le canal ne lit pas une solution 2DOF pure, faute de composante 3DOF à projeter. Réciproquement, toute solution 3DOF localisée portant une projection de couleur non nulle peut sourcer le canal. Pour les systèmes multi-constituants, la condition de blancheur décide ensuite si la contribution nette est attractive, nulle ou non retenue. □

Portée. Le canal forte–like est donc sélectif à deux niveaux :

1. il exige d'abord une structure 3DOF ;
2. il exige ensuite, pour une liaison effective, une combinaison blanche dans ce canal.

21.1.11 Synthèse par familles de solutions

Corollaire 21.9 (Statut de couplage des familles déjà construites)**.** *Dans l'état actuel de la théorie, les familles de solutions se classent selon le tableau ci-dessous.*

Convention de lecture. Dans le tableau ci-dessous, *oui* signifie qu'un couplage effectif est établi pour la branche canonique considérée, et *non* qu'il ne l'est pas dans l'état actuel de la théorie. Pour le canal Préclusion, le mot même de couplage renvoie au régime de recouvrement ; cette condition n'est donc pas répétée dans chaque ligne.

Famille	Grav.	EM	Faible	Forte	Préclusion	Remarques
Bump 2DOF	oui	oui	non	non	oui	Solution localisée avec rotation de phase par construction.
NSL 2DOF	oui	oui	oui	non	oui	Branche source primitive du canal faible–like minimal.
Z^0–like 2DOF neutre	oui	non	non	non	oui	Composé neutre de deux NSL 2DOF ; neutralité monopolaire dans les canaux EM–like et faible–like.
Breather 2DOF neutre	oui	non	non	non	oui	Branche neutre au LO dans le canal EM–like ; pas de charge primitive faible–like.
Quasi-c_t 2DOF	oui	oui	non	non	oui	Branche vectorielle transverse 2DOF ; sensible au canal Préclusion en régime de recouvrement comme toute solution localisée.
Bump 3DOF isolé	oui	oui	non	oui	oui	Solution 3DOF chargée ; les deux branches géométriques LO correspondent à $\sigma = \sin^2\alpha \in \{1/3, 2/3\}$, et non à une distinction neutre/chargé.
Quasi-c_t 3DOF	oui	oui	non	non	oui	Branche vectorielle transverse 3DOF ; sensible au canal Préclusion en régime de recouvrement comme toute solution localisée.
Z-like 3DOF bi-lobe (Z2)	oui	non	non	oui	oui	Branche blanche canonique de motif $(1, -1)$, avec $n_{\mathrm{EM}} = 0$.
Z-like 3DOF tri-lobe neutre (Z3, n)	oui	non	non	oui	oui	Branche blanche canonique de motif $(1, -2, 1)$, avec $n_{\mathrm{EM}} = 0$.
Z-like 3DOF tri-lobe chargé (Z3, c)	oui	oui	non	oui	oui	Branche blanche canonique de motif $(1, -1, 1)$, avec $n_{\mathrm{EM}} = 1$.
Breather 3DOF bi-lobe (Br2)	oui	non	non	oui	oui	Branche blanche canonique de motif $(1, -1)$, avec $n_{\mathrm{EM}} = 0$.
Breather 3DOF tri-lobe neutre (Br3, n)	oui	non	non	oui	oui	Branche blanche canonique de motif $(1, -2, 1)$, avec $n_{\mathrm{EM}} = 0$.
Breather 3DOF tri-lobe chargé (Br3, c)	oui	oui	non	oui	oui	Branche blanche canonique de motif $(1, -1, 1)$, avec $n_{\mathrm{EM}} = 1$.

C'est cette sélectivité démontrée, et non une analogie qualitative, qui complète le cadre de couplage champ–solution du présent manuscrit.

Portée du tableau. Les branches composites de type Z-like et Breather mentionnées ci-dessus sont celles déjà construites dans les chapitres de solutions composées ; le présent tableau n'en redonne pas la définition interne, mais en synthétise uniquement le statut de couplage vis-à-vis des canaux de champ.

21.2 Couplage interne s et confinement 3DOF

21.2.1 Réponse forte–like d'un bump 3DOF isolé et passage aux sources blanches

Objet. Une solution bump 3DOF peut porter une source forte–like interne. Cette source caractérise la réponse mécanique de la solution isolée dans le canal forte–like. Elle ne constitue cependant pas, à elle seule, la fermeture d'un composé couleur–blanc : dans un composé blanc, le canal forte–like doit être évalué sur la source totale blanche.

La présente sous-section fixe donc deux objets distincts :

source isolée d'un bump 3DOF, source totale blanche d'un composé 3DOF.

Réponse isolée. Soit S_i la source forte–like effective portée par un bump 3DOF isolé. La réponse linéaire du canal forte–like s'écrit

$$\mathcal{L}_{\mathsf{s}}\Phi_{\mathsf{s}} = S_i,$$

où $\mathcal{L}_{\mathsf{s}}$ est l'opérateur effectif du canal forte–like. L'énergie auto–induite associée à la solution isolée est

$$\boxed{E_{\mathsf{s}}^{\mathrm{iso}}[S_i] = \frac{1}{2}\langle S_i, G_{\mathsf{s}} S_i\rangle, \qquad G_{\mathsf{s}} := \mathcal{L}_{\mathsf{s}}^{-1}.} \tag{21.27}$$

Cette expression est une énergie interne de réponse du canal forte–like.

Signatures coniques de branche. Les branches coniques d'une solution 3DOF sont notées

$$X \in \{\downarrow, \uparrow\},$$

avec

$$\sigma_X := \sin^2 \alpha_X, \qquad \rho_X := \cos^2 \alpha_X.$$

Les valeurs canoniques de projection ne sont pas introduites par convention externe : elles sont la sortie de la quantification géométrique de l'angle conique, cf. (9.8). On utilise donc

$$\boxed{\sigma_\downarrow = \frac{1}{3}, \qquad \sigma_\uparrow = \frac{2}{3}, \qquad \rho_\downarrow = \frac{2}{3}, \qquad \rho_\uparrow = \frac{1}{3}.} \tag{21.28}$$

Holonomie élémentaire de la branche phase–circulante. La branche $\downarrow$ est prise comme branche compressive de référence ; son amplitude de bras est normalisée par

$$\chi_\downarrow = 1.$$

La branche $\uparrow$ porte une composante phase–circulante. Dans un composé blanc à trois raccords équivalents, la fermeture de couleur impose que la phase circulante totale autour de la tri–jonction soit un cycle entier :

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 2\pi\nu, \qquad \nu \in \mathbb{Z}.$$

La branche élémentaire non triviale correspond à $\nu = 1$. Par symétrie de la tri–jonction blanche, les trois raccords portent la même fraction de cette holonomie :

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3.$$

Il vient donc

$$\varphi_i = \frac{2\pi}{3}.$$

On définit ainsi le facteur structural de bras

$$\boxed{\chi_\downarrow = 1, \qquad \chi_\uparrow = \frac{2\pi}{3}.} \tag{21.29}$$

Ce facteur est une holonomie structurale de tri–jonction blanche ; il résulte de la fermeture interne du composé blanc, sans paramètre externe.

Source effective de bras. Pour un constituant 3DOF de niveau EBK q_i et de branche X_i, la source forte–like de bras utilisée dans les composés blancs est

$$\boxed{Q_i^{\mathrm{arm}} = q_i\, \sigma_{X_i}\, \chi_{X_i}.} \tag{21.30}$$

Cette source de bras n'est pas une masse isolée : elle est une amplitude de raccord forte–like destinée à être insérée dans la source totale blanche.

Triade couleur blanche. La fermeture blanche minimale est représentée par trois vecteurs internes unitaires $\mathbf{C}_i$ disposés à 120° dans le plan interne couleur. On peut choisir explicitement

$$\mathbf{C}_1 = (1, 0), \qquad \mathbf{C}_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \qquad \mathbf{C}_3 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

On vérifie alors

$$\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_3 = 0, \qquad \mathbf{C}_i \cdot \mathbf{C}_j = -\frac{1}{2} \quad (i \neq j).$$

La contrainte blanche utilisée ci-dessous est donc la triade équilatérale minimale du plan couleur interne, et non un choix numérique libre.

Source totale blanche. Pour un composé 3DOF blanc formé de trois constituants, on écrit

$$S_{\mathrm{tot}} = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{C}_i S_i,$$

avec les vecteurs internes de couleur vérifiant

$$\boxed{\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 + \mathbf{C}_3 = 0, \qquad \mathbf{C}_i \cdot \mathbf{C}_j = -\frac{1}{2} \quad (i \neq j).} \tag{21.31}$$

La réponse forte–like collective est alors

$$\boxed{E_{\mathsf{s}}^{\mathrm{white}} = \frac{1}{2} \left\langle S_{\mathrm{tot}}, G_{\mathsf{s}} S_{\mathrm{tot}} \right\rangle.} \tag{21.32}$$

Défaut blanc normal–ordonné. Dans une branche résolue, les self–réponses isolées ne sont pas additionnées avant la formation de l'état blanc. On mesure plutôt le défaut de raccord des bras à leur moyenne blanche. Si R_i désigne la source réduite du bras i, on pose

$$\bar{R} := \frac{1}{3}(R_1 + R_2 + R_3).$$

et le défaut blanc est la variance mécanique

$$\boxed{\sum_{i=1}^{3} \|R_i - \bar{R}\|_{G_{\mathsf{s}}}^2 = \frac{1}{3} \sum_{i<j} \|R_i - R_j\|_{G_{\mathsf{s}}}^2.} \tag{21.33}$$

La moyenne canonique sur $\mathbb{S}^3$ introduit le facteur

$$\frac{1}{2\pi^2}.$$

Ainsi, lorsque le défaut est écrit comme somme sur les trois paires, son coefficient réduit est

$$\boxed{\Lambda_{\text{white}} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{2\pi^2} = \frac{1}{6\pi^2}.} \tag{21.34}$$

Portée. Les équations (21.27)–(21.34) fixent le passage du canal forte–like isolé à la réponse collective blanche. Les fermetures de masse des composés 3DOF doivent être construites à partir de la source blanche collective, et non comme somme de self–réponses isolées.

21.2.2 Réduction tubulaire et tension effective du canal fort-like

Objet. Le canal fort-like 3DOF possède, dans les configurations composées où le flux est guidé entre deux sous-structures internes, une réduction effective unidimensionnelle. Le but de cette sous-section est de formuler la condition précise sous laquelle cette réduction fournit un tube de flux de tension positive, puis un potentiel linéaire effectif.

Problème transverse du canal. Dans la fenêtre tube-mince, on sépare la coordonnée longitudinale z, portée par l'axe du canal, des coordonnées transverses $x_\perp$. Au rang LO, loin des deux zones d'extrémité, le profil transverse est supposé stationnaire le long du tube. Le fonctionnel fort-like restreint à une section transverse s'écrit sous la forme

$$\mathcal{E}_\perp[\Phi] = \int_{\mathcal{A}_\perp} \left[\frac{1}{2}\,\langle \Phi, \mathcal{L}_{\mathsf{s}}\Phi\rangle + \mathcal{K}_{\mathsf{s}}\,\mathcal{V}_{\text{col}}(\Phi)\right] d^2x_\perp,$$

avec une contrainte de flux non nul

$$\mathcal{Q}_{\text{col}}[\Phi] = \mathcal{Q}_0 \neq 0.$$

L'opérateur $\mathcal{L}_{\mathsf{s}}$ et la constante de canal $\mathcal{K}_{\mathsf{s}}$ sont les objets effectifs du canal fort-like introduits dans la section §21.2. La présente réduction ne les redéfinit pas : elle utilise leur restriction au problème transverse.

Définition de la tension effective. La tension effective du tube est définie comme l'énergie transverse minimale par unité de longueur sous contrainte de flux :

$$\boxed{\sigma_{\text{eff}} := \inf_{\mathcal{Q}_{\text{col}}[\Phi]=\mathcal{Q}_0} \mathcal{E}_\perp[\Phi].} \tag{21.35}$$

Positivité. Le canal fort-like étant coercif sur les profils transverses admissibles, une section de coût nul imposerait simultanément l'annulation du gradient, du terme de cœur et du flux. Cela contredirait la contrainte

$$\mathcal{Q}_{\mathrm{col}}[\Phi] = \mathcal{Q}_0 \neq 0.$$

On a donc

$$\boxed{\sigma_{\mathrm{eff}} > 0 \qquad (\mathcal{Q}_0 \neq 0).} \tag{21.36}$$

Extensivité longitudinale. Dans la zone centrale du tube, le profil transverse minimisant est indépendant de z au rang LO. La contribution dominante du fonctionnel est alors

$$E_{\mathrm{core}}(R) = \int_0^R \sigma_{\mathrm{eff}}\, dz = \sigma_{\mathrm{eff}} R.$$

Les corrections localisées aux extrémités sont regroupées dans une énergie de caps E_{cap}, indépendante de R au rang dominant. On obtient donc

$$\boxed{E_{\mathrm{tube}}(R) = \sigma_{\mathrm{eff}} R + E_{\mathrm{cap}} + o(R).} \tag{21.37}$$

Le terme $o(R)$ contient les corrections de courbure, de raccord et de variation lente du profil transverse. Ces corrections sont sous-dominantes dans la limite de longueur où la réduction tubulaire est valide.

Potentiel de confinement effectif. La contribution statique minimale associée au canal tubulaire fournit alors une borne inférieure de type linéaire :

$$\boxed{V_{\mathrm{conf}}(R) \geq \sigma_{\mathrm{eff}}\, R - C,} \tag{21.38}$$

où C regroupe les constantes locales de normalisation, les contributions de raccord et les termes d'extrémité. La positivité de σ_{eff} implique que la séparation libre des sous-structures porteuses du flux demande un coût énergétique croissant avec R.

Portée. Cette réduction ne reconstruit pas une théorie de jauge forte indépendante. Elle établit le résultat nécessaire au niveau HSM : dans les configurations composées où le canal fort-like est guidé en tube, la minimisation transverse définit une tension positive et une énergie longitudinale linéaire. Ce résultat caractérise une énergie de liaison longitudinale de type tube de flux.

Chapitre 22

Composé Z^0–like 2DOF neutre

22.1 Solution Z^0–like 2DOF neutre : composé de deux NSL 2DOF, structure et fermeture LO

Positionnement. La solution Z^0-like est décrite ici non comme une branche unitaire primitive, mais comme un *composé neutre* de deux solutions NSL 2DOF en recouvrement fort. Elle hérite du cœur radial NSL 2DOF au LO (profil $a(\xi) = \operatorname{sech}\xi$, largeur λ, modulation lente, polarisation vectorielle), mais sa structure interne est déterminée par l'équilibre entre attraction EM-like et coût Préclusion sur les deux constituants. La sélection du canal faible neutre intervient ensuite par le filtre angulaire $\Delta_{\mathrm{cone}}^{(\mathsf{Z}^0)}$ et l'impédance de canal correspondante.

22.1.1 Fermeture 1–anneau micro-locale du composé Z^0-like

Objet. On applique ici au composé Z^0-like la fermeture 1–anneau micro-locale associée à sa structure de doublet neutre. Cette fermeture ne porte pas sur une NSL isolée : elle utilise explicitement le fait que

$$\mathsf{Z}^0 = X_1 \oplus X_2,$$

où X_1 et X_2 sont deux constituants NSL 2DOF en recouvrement fort, de même largeur de coeur au rang LO.

Cette participation est distincte de la participation globale d'anneau dépendant du rapport λ/R_0. Ici, on considère une participation *micro-locale* cellule–coeur, contrôlée par le rapport

$$\frac{\ell_0}{\lambda_{\mathsf{Z}}},$$

où λ_{Z} est la longueur réduite de phase du composé Z^0-like.

Longueur réduite de phase. Pour le composé Z^0-like, on note

$$\boxed{\lambda_{\mathsf{Z}} := \frac{c_t}{\omega_{\mathsf{Z}}}.} \tag{22.1}$$

Il s'agit d'une longueur réduite de phase : aucun facteur 2π supplémentaire n'est introduit dans cette définition. La normalisation cyclique est déjà portée par la convention EBK absorbée $E/\omega = h_{\mathrm{eff}}$.

On introduit le petit paramètre micro-local

$$\boxed{\varepsilon_{\mathrm{micro}}^{(\mathsf{Z})} := \frac{\ell_0}{\lambda_{\mathsf{Z}}}.} \tag{22.2}$$

Capacité d'action 1–anneau. La constante d'action effective h_{eff} est la constante commune de la loi énergie–fréquence du secteur 2DOF, cf. (6.1)–(6.2). Pour la branche composée Z^0-like, la fermeture 1–anneau associe à cette constante une capacité géométrique propre à la branche, notée $\mathcal{C}_*^{(\mathsf{Z})}$. Elle est définie par inversion de la relation d'action

$$\boxed{\mathcal{C}_*^{(\mathsf{Z})} := \frac{2h_{\mathrm{eff}}}{\pi\,\rho\,c_t}.} \tag{22.3}$$

De façon équivalente,

$$h_{\mathrm{eff}} = \frac{\pi}{2}\,\rho\,c_t\,\mathcal{C}_*^{(\mathsf{Z})}.$$

La grandeur $\mathcal{C}_*^{(\mathsf{Z})}$ ne fixe aucune échelle externe : elle exprime la capacité géométrique nécessaire pour porter l'action h_{eff} dans la fermeture 1–anneau de la branche considérée.

Au rang LO, on factorise cette capacité sous la forme

$$\boxed{\mathcal{C}_*^{(\mathsf{Z})} = \mathcal{C}_{\mathrm{geo}}^{(\mathsf{Z})}\,R_0^2\,\lambda_{\mathsf{Z}}^2\,\Xi_{\mathrm{micro}}^{(\mathsf{Z})}.} \tag{22.4}$$

Le facteur $\mathcal{C}_{\mathrm{geo}}^{(\mathsf{Z})}$ est un nombre pur de profil et de fermeture géométrique. Le facteur $\Xi_{\mathrm{micro}}^{(\mathsf{Z})}$ est la participation micro-locale effective du composé Z^0-like.

Décomposition de la participation micro-locale. Au rang LO isotrope, la participation micro-locale du composé Z^0-like est une participation de vertice cohérent. Elle porte sur quatre variables réduites indépendantes au LO :

$$y \in B_{\ell_0}, \qquad \nu_1, \nu_2, \qquad \varphi_{\mathrm{red}},$$

où y localise la cellule active dans le coeur, ν_i désigne la fenêtre spectrale réduite du constituant X_i, et φ_{red} la phase rapide réduite. La mesure LO se factorise donc sous la forme

$$d\mu_{\mathrm{micro}}^{(\mathsf{Z})} = d\mu_{\mathrm{cell}}\,d\nu_1\,d\nu_2\,d\mu_{\mathrm{phase}}.$$

Il en résulte la factorisation

$$\boxed{\Xi_{\mathrm{micro}}^{(\mathsf{Z})} = F_{\mathrm{cell}}^{(\mathsf{Z})} F_{\mathrm{spec}}^{(\mathsf{Z})} F_{\mathrm{phase}}^{(\mathsf{Z})}.} \tag{22.5}$$

Les trois facteurs correspondent à trois opérations distinctes :

— F_{cell} sélectionne le volume local du vertice cohérent ;

— F_{spec} impose la participation spectrale simultanée des deux constituants NSL du composé neutre ;

— F_{phase} impose la cohérence de phase réduite sur la cellule.

Cette factorisation n'introduit pas trois volumes physiques indépendants : le facteur volumique isotrope $4\pi/3$ apparaît uniquement dans F_{cell}. Les poids spectraux $d\nu_i$ sont des poids réduits de résolution, normalisés après extraction de la fenêtre géométrique.

Lemme 22.1 (Fenêtre cellule isotrope)**.** *Au rang LO local, la cellule active de rayon ℓ_0 dans un coeur de taille λ_{Z} porte la fraction isotrope*

$$F_{\mathrm{cell}}^{(\mathsf{Z})} = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\ell_0}{\lambda_{\mathsf{Z}}}\right)^3.$$

Démonstration. Dans la limite $\ell_0 \ll \lambda_{\mathsf{Z}} \ll R_0$, la métrique de $\mathbb{S}^3$ est localement euclidienne sur la cellule. Le volume de la boule locale de rayon ℓ_0 vaut donc

$$\mathrm{Vol}(B_{\ell_0}) = \frac{4\pi}{3}\ell_0^3.$$

Rapportée à l'échelle volumique du coeur λ_{Z}^3, cette fenêtre donne

$$F_{\mathrm{cell}}^{(\mathsf{Z})} = \frac{\mathrm{Vol}(B_{\ell_0})}{\lambda_{\mathsf{Z}}^3} = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\ell_0}{\lambda_{\mathsf{Z}}}\right)^3.$$

□

Lemme 22.2 (Participation spectrale conjointe du doublet neutre)**.** *Pour un doublet neutre formé de deux constituants NSL 2DOF de même largeur λ_{Z}, la participation spectrale micro-locale du composé vaut*

$$F_{\mathrm{spec}}^{(\mathsf{Z})} = \left(\frac{\ell_0}{\lambda_{\mathsf{Z}}}\right)^6. \tag{22.6}$$

Démonstration. On travaille en variables réduites dans le coeur :

$$\widehat{x} := \frac{x}{\lambda_{\mathsf{Z}}}.$$

Une cellule de taille ℓ_0 correspond alors à une résolution réduite

$$\varepsilon_{\mathrm{micro}}^{(\mathsf{Z})} = \frac{\ell_0}{\lambda_{\mathsf{Z}}}.$$

Pour un constituant NSL X_i, la fenêtre spectrale locale est la fenêtre de résolution sur les trois directions réduites du mode local. Après extraction du volume géométrique de la cellule, déjà porté par $F_{\mathrm{cell}}^{(\mathsf{Z})}$, le poids spectral réduit d'un constituant est donc le produit des trois résolutions indépendantes :

$$w_i = \varepsilon_{\mathrm{micro}}^{(\mathsf{Z})}\varepsilon_{\mathrm{micro}}^{(\mathsf{Z})}\varepsilon_{\mathrm{micro}}^{(\mathsf{Z})} = \left(\frac{\ell_0}{\lambda_{\mathsf{Z}}}\right)^3. \tag{22.7}$$

Ce poids n'est pas un second facteur de volume : il compte la résolution spectrale réduite du constituant dans le coeur, tandis que $F_{\mathrm{cell}}^{(\mathsf{Z})}$ compte la localisation spatiale du vertice cohérent.

Le composé neutre

$$\mathsf{Z}^0 = X_1 \oplus X_2$$

n'est actif dans le canal neutre que lorsque les deux constituants participent simultanément au même vertice cohérent. Au LO, les deux fenêtres spectrales réduites sont indépendantes conditionnellement à la cellule active, car elles portent sur les deux constituants X_1 et X_2. La participation spectrale conjointe est donc

$$F_{\mathrm{spec}}^{(\mathsf{Z})} = w_1 w_2. \tag{22.8}$$

Comme les deux constituants ont la même largeur de coeur au LO,

$$w_1 = w_2 = \left(\frac{\ell_0}{\lambda_{\mathsf{Z}}}\right)^3.$$

On obtient

$$F_{\mathrm{spec}}^{(\mathsf{Z})} = \left(\frac{\ell_0}{\lambda_{\mathsf{Z}}}\right)^3\left(\frac{\ell_0}{\lambda_{\mathsf{Z}}}\right)^3 = \left(\frac{\ell_0}{\lambda_{\mathsf{Z}}}\right)^6.$$

Le facteur 6 provient donc de deux poids spectraux réduits cubiques, un pour chaque constituant NSL du doublet neutre. Il ne provient ni du volume de cellule, déjà compté dans $F_{\mathrm{cell}}^{(\mathsf{Z})}$, ni des deux jambes internes d'une NSL isolée. □

Lemme 22.3 (Duty-cycle de phase réduit)**.** *Au rang LO, la fraction cohérente de phase réduite portée par une cellule élémentaire de longueur ℓ_0 dans un mode de longueur réduite $\lambda_{\mathsf{Z}} = c_t/\omega_{\mathsf{Z}}$ vaut*

$$F^{(\mathsf{Z})}_{\text{phase}} = \frac{\ell_0}{\lambda_{\mathsf{Z}}}. \tag{22.9}$$

Démonstration. La phase rapide locale est écrite dans la convention EBK absorbée :

$$E/\omega = h_{\text{eff}}.$$

La longueur réduite de phase est donc

$$\lambda_{\mathsf{Z}} = \frac{c_t}{\omega_{\mathsf{Z}}},$$

et le nombre d'onde réduit associé est

$$k_{\mathsf{Z}} = \frac{\omega_{\mathsf{Z}}}{c_t} = \frac{1}{\lambda_{\mathsf{Z}}}.$$

Sur une cellule cohérente de longueur ℓ_0, l'incrément de phase réduite est

$$\Delta\varphi_{\text{red}} = k_{\mathsf{Z}}\ell_0 = \frac{\ell_0}{\lambda_{\mathsf{Z}}}.$$

La normalisation cyclique complète n'est pas réintroduite ici : elle est déjà absorbée dans la relation $E/\omega = h_{\text{eff}}$. Le duty-cycle micro-local est donc l'incrément de phase réduite porté par la cellule,

$$F^{(\mathsf{Z})}_{\text{phase}} = \Delta\varphi_{\text{red}} = \frac{\ell_0}{\lambda_{\mathsf{Z}}}.$$

□

Proposition 22.4 (Fermeture micro-locale isotrope du doublet neutre)**.** *Pour un doublet neutre 2DOF formé de deux constituants NSL en recouvrement fort, la participation micro-locale isotrope au rang LO est*

$$\boxed{\Xi^{(\mathsf{Z})}_{\text{micro}} = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\ell_0}{\lambda_{\mathsf{Z}}}\right)^{10}.} \tag{22.10}$$

Démonstration. En combinant les lemmes 22.1 22.2 et 22.3, on obtient

$$\Xi^{(\mathsf{Z})}_{\text{micro}} = \left[\frac{4\pi}{3}\left(\frac{\ell_0}{\lambda_{\mathsf{Z}}}\right)^3\right]\left[\left(\frac{\ell_0}{\lambda_{\mathsf{Z}}}\right)^6\right]\left[\left(\frac{\ell_0}{\lambda_{\mathsf{Z}}}\right)\right].$$

Ainsi

$$\Xi^{(\mathsf{Z})}_{\text{micro}} = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\ell_0}{\lambda_{\mathsf{Z}}}\right)^{3+6+1} = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\ell_0}{\lambda_{\mathsf{Z}}}\right)^{10}.$$

□

Contrôle du comptage. La puissance totale se décompose donc de manière unique :

$$10 = 3 + 6 + 1.$$

Le terme 3 est le volume local du vertice cohérent, le terme $6 = 3 + 3$ est la participation spectrale réduite des deux constituants NSL, et le terme 1 est le duty-cycle de phase réduite. Le coefficient $4\pi/3$ apparaît une seule fois, dans $F^{(\mathsf{Z})}_{\text{cell}}$, parce qu'il provient du volume euclidien local de la cellule. Il n'est pas répété dans $F^{(\mathsf{Z})}_{\text{spec}}$, qui est une mesure réduite de résolution spectrale, ni dans $F^{(\mathsf{Z})}_{\text{phase}}$, qui est une mesure réduite de phase.

Conséquence symbolique pour la séparation globale. Si une fermeture indépendante fournit le produit

$$P_{\rho R} := \rho R_0,$$

alors $\rho = P_{\rho R}/R_0$. En combinant (22.3), (22.4) et (22.10), il vient

$$\boxed{R_0 = \frac{2h_{\text{eff}}}{\pi\, c_t\, P_{\rho R}\, \mathcal{C}_{\text{géo}}^{(\mathsf{Z})}\, \lambda_{\mathsf{Z}}^2\, \Xi_{\text{micro}}^{(\mathsf{Z})}}.} \tag{22.11}$$

Une fois R_0 obtenu, les séparations

$$\rho = \frac{P_{\rho R}}{R_0}, \qquad \kappa_r = \frac{Q_r}{R_0}$$

sont immédiates dès lors qu'une fermeture indépendante fournit également $Q_r := \kappa_r R_0$.

Portée. La fermeture (22.10) est propre au composé Z^0-like en tant que doublet neutre 2DOF. Elle ne doit pas être appliquée à une NSL isolée : les deux jambes internes d'une NSL 2DOF forment un seul mode transverse et ne produisent pas le facteur spectral conjoint $(\ell_0/\lambda_{\mathsf{Z}})^6$. Ce facteur apparaît ici parce que le composé Z^0-like contient deux constituants NSL distincts.

22.1.2 Réduction des interactions EM-like et Préclusion sur le composé Z^0-like

On considère le Z^0-like comme un composé neutre de deux solutions NSL 2DOF en recouvrement fort. Au LO local, les deux constituants portent le même cœur radial réduit $a(\eta)$, et l'on introduit la séparation interne adimensionnée u. Dans l'ansatz bilobe symétrique,

$$a_\pm(\eta) = a\!\left(\eta \mp \frac{u}{2}\right), \qquad a(\eta) = \operatorname{sech}\eta \quad \text{(profil LO canonique)}.$$

La dépendance en séparation des interactions entre les deux constituants est portée par des intégrales de recouvrement. On définit d'abord le recouvrement bilinéaire

$$B_0(u) := \int_{\mathbb{R}} a_-(\eta)\, a_+(\eta)\, d\eta,$$

et le recouvrement quartique

$$Q_0(u) := \int_{\mathbb{R}} a_-^2(\eta)\, a_+^2(\eta)\, d\eta.$$

Pour le profil canonique $a(\eta) = \operatorname{sech}\eta$, on obtient explicitement

$$B_0(u) = \frac{2u}{\sinh u}, \qquad Q_0(u) = \frac{4\,(u\coth u - 1)}{\sinh^2 u}.$$

Il est alors naturel d'introduire les fonctions réduites

$$\boxed{O_1(u) := \left(\frac{B_0(u)}{2}\right)^2 = \left(\frac{u}{\sinh u}\right)^2, \qquad O_2(u) := \frac{Q_0(u)}{2} = \frac{2\,(u\coth u - 1)}{\sinh^2 u}.} \tag{22.12}$$

Ces deux noyaux ont une interprétation mécanique simple :

— le canal *EM-like*, attractif, est un couplage effectif à deux jambes entre les deux constituants ; sa réduction sur l'ansatz bilobe produit naturellement un terme proportionnel à $B_0(u)^2$, donc à $O_1(u)$;

— le canal *Préclusion*, répulsif, mesure le coût local de recouvrement fort des deux cœurs ; sa réduction produit un terme proportionnel au recouvrement quartique $Q_0(u)$, donc à $O_2(u)$.

On peut ainsi écrire l'énergie interne réduite dépendant de la séparation sous la forme

$$\boxed{E_{\mathrm{dep}}^{(Z)}(u) = A_{\mathrm{P}}^{(Z)}\, O_2(u) - A_{\mathrm{EM}}^{(Z)}\, O_1(u), \qquad A_{\mathrm{P}}^{(Z)} > 0,\ A_{\mathrm{EM}}^{(Z)} > 0.} \tag{22.13}$$

Les coefficients $A_{\mathrm{P}}^{(Z)}$ et $A_{\mathrm{EM}}^{(Z)}$ ne sont pas des constantes fondamentales indépendantes. Ils résultent de la réduction bilobe des canaux Préclusion et EM–like pour deux constituants NSL 2DOF, définie par (22.33) et (22.34).. En particulier,

$$\boxed{A_{\mathrm{EM}}^{(Z)} = 4\,\mathcal{C}_{\mathrm{EM}}^{(2)}, \qquad A_{\mathrm{P}}^{(Z)} = 2\,\mathcal{C}_{\mathrm{P}}^{(2)},} \tag{22.14}$$

où $\mathcal{C}_{\mathrm{EM}}^{(2)}$ et $\mathcal{C}_{\mathrm{P}}^{(2)}$ sont les coefficients réduits purs définis par (22.33) et (22.34).

La présente sous-section consomme donc ces coefficients sous forme réduite, sans réintroduire de nouvelle fermeture locale.

La séparation réduite du composé neutre n'est pas déterminée par la stationnarité de $E_{\mathrm{dep}}^{(Z)}$ seule. Elle est verrouillée par le raccord scalaire neutre, voir (22.16) et (22.17). La stationnarité de l'énergie interne est ensuite utilisée uniquement pour fixer le coefficient réduit de Préclusion compatible avec ce point lié verrouillé.

Fermeture absolue des coefficients réduits. La réduction bilobe ne fixe pas seulement la dépendance en séparation du composé neutre ; elle fixe aussi l'échelle absolue des deux coefficients réduits. Pour éviter toute ambiguïté avec le projecteur cap pur $\Pi_{\ell=1}^{\mathrm{EM}}$ défini dans la fermeture EM–like de champ, on note

$$\mathcal{C}_{\mathrm{EM}}^{(2)}$$

le coefficient réduit complet du canal EM–like 2DOF consommé par la réduction du composé neutre. Il inclut la projection cap, la constante de canal Γ_{EM} et les moments de cœur, conformément à la fermeture développée de $\Phi_{\mathrm{EM}}^{(\mathrm{two})}$ donnée dans (20.37). On écrit alors

$$\boxed{A_{\mathrm{EM}}^{(Z)} = 4\,\mathcal{C}_{\mathrm{EM}}^{(2)}.} \tag{22.15}$$

Verrouillage du point lié neutre. On note $u_{\mathsf{Z}}^{\star}$ la séparation réduite du doublet neutre $\mathsf{Z}^0 = X_1 \oplus X_2$. Cette séparation n'est pas un paramètre libre : elle est fixée par le même raccord scalaire coeur–bord que celui qui définit le point de référence LO $u_*^{(\mathrm{ref})}$ dans (6.22)–(6.23).

Lemme 22.5 (Réduction du verrou de raccord neutre)**.** *Au rang LO quasi-plan du bilobe neutre, la condition de raccord du point lié Z^0-like se réduit à*

$$\Phi_{\mathsf{Z}}(u) := u\cot u - \big(1 - u\tanh u\big) = 0. \tag{22.16}$$

Démonstration. Le raccord du composé neutre compare deux contributions scalaires réduites :

— le terme extérieur de bord porté par le mode radial local, dont le rapport DtN réduit donne $u\cot u$;

— le terme intérieur de coeur porté par le profil de recouvrement fort $a(\eta) = \operatorname{sech}\eta$, dont la dérivée logarithmique réduite donne $1 - u\tanh u$.

Au LO quasi-plan, la symétrie bilobe neutre élimine les termes impairs de séparation et les corrections de courbure sont d'ordre supérieur. La condition de verrouillage est donc l'égalité des deux contributions scalaires de raccord, c'est-à-dire

$$u\cot u = 1 - u\tanh u.$$

On obtient (22.16). □

Proposition 22.6 (Verrouillage du composé neutre sur le raccord LO)**.** *Le point lié du composé neutre vérifie*

$$\boxed{u_{\mathsf{Z}}^\star = u_*^{(\mathrm{ref})} \simeq 2.00712.} \tag{22.17}$$

Démonstration. L'équation de verrouillage neutre (22.16) est identique à l'équation de raccord LO (6.22). Sur la fenêtre admissible

$$u \in [1.7, 2.1],$$

cette équation possède une unique racine, évaluée en (6.23). Par unicité,

$$u_{\mathsf{Z}}^\star = u_*^{(\mathrm{ref})}.$$

□

La stationnarité de l'énergie interne n'est donc pas utilisée pour choisir $u_{\mathsf{Z}}^\star$. Elle fixe le coefficient réduit de Préclusion compatible avec le point lié verrouillé. Elle s'écrit

$$A_{\mathrm{P}}^{(Z)}\, O_2'(u_{\mathsf{Z}}^\star) = A_{\mathrm{EM}}^{(Z)}\, O_1'(u_{\mathsf{Z}}^\star)$$

et donne alors

$$\boxed{A_{\mathrm{P}}^{(Z)} = A_{\mathrm{EM}}^{(Z)} \frac{O_1'(u_{\mathsf{Z}}^\star)}{O_2'(u_{\mathsf{Z}}^\star)}, \qquad \mathcal{C}_{\mathrm{P}}^{(2)} = \frac{1}{2}\, A_{\mathrm{P}}^{(Z)}.} \tag{22.18}$$

Autrement dit,

$$\boxed{\mathcal{C}_{\mathrm{P}}^{(2)} = 2\, \mathcal{C}_{\mathrm{EM}}^{(2)} \frac{O_1'(u_{\mathsf{Z}}^\star)}{O_2'(u_{\mathsf{Z}}^\star)}.}$$

Évaluation numérique du coefficient réduit. La fermeture EM–like fournit le coefficient réduit de forme consommé par la réduction bilobe

$$\boxed{\mathcal{C}_{\mathrm{EM}}^{(2)} := \Pi_{\ell=1}^{\mathrm{EM}}\, \Gamma_{\mathrm{EM}}\, \frac{J_0^2}{\pi} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{J_2}{J_0}}\, \Gamma_{\mathrm{EM}}\, \frac{J_0^2}{\pi} \simeq 1.538610075.} \tag{22.19}$$

Ici $\Pi_{\ell=1}^{\mathrm{EM}}$ est le projecteur cap pur et $\Gamma_{\mathrm{EM}} J_0^2/\pi$ est le complément de canal associé aux deux projections source et aux moments de coeur. Le facteur de transfert deux-jambes

$$\eta_{2\mathrm{leg}} = \left(\frac{1}{\Delta_{\mathrm{EM}}^2 b_0^{(2)}} \right)^2$$

appartient à l'impédance de canal $\Phi_{\mathrm{EM}}^{(\mathrm{two})}$, mais il n'est pas inclus dans le coefficient réduit $\mathcal{C}_{\mathrm{EM}}^{(2)}$ consommé par la réduction bilobe. On obtient alors

$$A_{\mathrm{EM}}^{(Z)} = 4\, \mathcal{C}_{\mathrm{EM}}^{(2)} \simeq 6.154440302.$$

Au point verrouillé $u_{\mathsf{Z}}^\star = u_*^{(\mathrm{ref})}$,

$$A_{\mathrm{P}}^{(Z)} = A_{\mathrm{EM}}^{(Z)} \frac{O_1'(u_{\mathsf{Z}}^\star)}{O_2'(u_{\mathsf{Z}}^\star)} \simeq 9.854589062,$$

d'où

$$\mathcal{C}_{\mathrm{P}}^{(2)} \simeq 4.927294531.$$

22.1.3 Réponse extérieure neutre du Z^0 : problème DN/ND

Objet. La réponse extérieure du canal neutre est définie par une carte de bord Dirichlet–Neumann sur la couronne angulaire comprise entre les deux bords de cellule canoniques. Elle mesure la sélectivité relative des deux modes de bord symétrique et antisymétrique associés au composé neutre.

Domaine angulaire. On travaille sur l'intervalle

$$\psi \in [\psi_c, \pi - \psi_c],$$

où $\psi_c \in (0, \pi/2)$ est l'angle conique canonique fixé plus haut.

Point de vigilance sur l'échelle radiale. L'équation homogène extérieure contient une échelle inverse de portée. Il ne faut pas identifier automatiquement cette échelle avec l'inverse de portée locale du cœur,

$$\lambda_{\mathrm{loc}}^2 = \frac{\mu_2}{T\kappa_r}.$$

Cette dernière provient de la raideur locale du secteur radial actif. La carte DN/ND extérieure, elle, décrit une réponse homogène hors source de cœur. Le passage de l'échelle locale à l'échelle extérieure doit donc être dérivé avant toute évaluation numérique.

On note

$$\mu_{\mathrm{ext}} := \lambda_{\mathrm{ext}} R_0$$

le paramètre sans dimension de la carte extérieure. Le symbole λ_{ext} ne désigne pas une nouvelle constante libre : il désigne l'échelle inverse de portée qui résulte de la réduction extérieure du canal radial.

Équation extérieure homogène. En variable angulaire $\psi = s/R_0$, le problème extérieur s'écrit

$$\boxed{\partial_{\psi\psi} r + 2\cot\psi\, \partial_\psi r - \mu_{\mathrm{ext}}^2\, r = 0, \qquad \mu_{\mathrm{ext}} := \lambda_{\mathrm{ext}} R_0.} \tag{22.20}$$

Cette équation définit la réponse de bord du secteur extérieur homogène ; elle ne réintroduit pas le problème forcé du cœur.

Carte Dirichlet–Neumann. Pour toute donnée de Dirichlet

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} r(\psi_c) \\ r(\pi - \psi_c) \end{pmatrix},$$

on définit le vecteur de Neumann sortant

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -\partial_\psi r(\psi_c) \\ +\partial_\psi r(\pi - \psi_c) \end{pmatrix}.$$

Par linéarité et symétrie,

$$\boxed{\mathbf{n} = \mathsf{M}_{\mathrm{DN}}\, \mathbf{d}, \qquad \mathsf{M}_{\mathrm{DN}} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}.} \tag{22.21}$$

Modes canoniques. Les vecteurs propres symétrique et antisymétrique sont

$$\mathbf{e}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}_- = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

avec

$$\boxed{\lambda_+ = a + b, \qquad \lambda_- = a - b.} \tag{22.22}$$

Réponse neutre extérieure. Le canal chargé sert de référence de bord pour la normalisation des réponses coniques :

$$\boxed{\Delta_{\text{cone}}^{(\mathsf{N}SL2D)} = 1.} \tag{22.23}$$

Cette égalité n'introduit pas une constante supplémentaire ; elle définit l'unité de référence dans le ratio d'impédances coniques.

La réponse extérieure du canal neutre est alors définie par

$$\boxed{\Delta_{\text{cone}}^{(\mathsf{Z}^0)} = \frac{\lambda_-}{\lambda_+} = \frac{a-b}{a+b}.} \tag{22.24}$$

Statut. La quantité $\Delta_{\text{cone}}^{(\mathsf{Z}^0)}$ constitue l'entrée extérieure du canal neutre dans la fermeture NSL 2DOF. Son évaluation numérique exige d'abord la dérivation de l'échelle λ_{ext} propre au problème extérieur homogène. En particulier, l'identification $\lambda_{\text{ext}} = \lambda_{\text{loc}}$ ne doit pas être faite sans dérivation.

22.1.4 Fermeture spectrale de la réponse extérieure

Problème extérieur homogène. La réponse extérieure définie dans §22.1.3 repose sur une équation homogène hors source de cœur :

$$\partial_{\psi\psi} r + 2\cot\psi\,\partial_\psi r - \mu_{\text{ext}}^2\, r = 0, \qquad \psi \in [\psi_c, \pi - \psi_c]. \tag{22.25}$$

Cette équation décrit une propagation sans source dans le secteur radial.

Extension globale et problème spectral. Le domaine extérieur peut être prolongé en une fonction définie sur la sphère complète $\mathbb{S}^3$ par symétrie. En l'absence de source et de structure locale imposée, l'équation (22.25) s'identifie à un problème spectral du Laplacien sur $\mathbb{S}^3$,

$$\Delta_{\mathbb{S}^3} r = -\lambda_{\text{ext}}^2\, r, \tag{22.26}$$

où $\Delta_{\mathbb{S}^3}$ est le Laplacien géométrique sur la sphère de rayon R_0.

Spectre de $\mathbb{S}^3$. Les fonctions propres du Laplacien sur $\mathbb{S}^3$ satisfont

$$\Delta_{\mathbb{S}^3} Y_\ell = -\frac{\ell(\ell+2)}{R_0^2}\, Y_\ell, \qquad \ell \in \mathbb{N}. \tag{22.27}$$

Par identification avec (22.26), on obtient

$$\lambda_{\text{ext}}^2 = \frac{\ell(\ell+2)}{R_0^2}, \qquad \mu_{\text{ext}} = \lambda_{\text{ext}} R_0 = \sqrt{\ell(\ell+2)}. \tag{22.28}$$

Sélection du mode antisymétrique. Le canal neutre Z^0-like correspond au mode de bord antisymétrique $\mathbf{e}_-$, ce qui impose

$$r(\pi - \psi) = -r(\psi).$$

Les harmoniques sphériques sur $\mathbb{S}^3$ vérifient

$$Y_\ell(\pi - \psi) = (-1)^\ell Y_\ell(\psi),$$

de sorte que la condition antisymétrique sélectionne les valeurs impaires de ℓ.

Mode fondamental. Le mode antisymétrique de plus basse énergie correspond à

$$\ell = 1, \tag{22.29}$$

d'où

$$\boxed{\mu_{\text{ext}} = \sqrt{3}.} \tag{22.30}$$

Conséquence. La réponse extérieure du canal neutre définie en (22.24) devient entièrement déterminée par la géométrie conique ψ_c et la valeur fixée $\mu_{\text{ext}} = \sqrt{3}$. Elle constitue une entrée fermée pour la procédure de fermeture NSL 2DOF.

22.1.5 Réduction bilobe des canaux EM–like et Préclusion pour deux NSL 2DOF

Objet. On considère un composé neutre de deux solutions NSL 2DOF en recouvrement fort. Le but est d'isoler, au rang LO local, les coefficients réduits des canaux EM–like et Préclusion une fois factorisée la dépendance en séparation.

Ansatz bilobe. On introduit le profil local canonique

$$a(\eta) = \operatorname{sech} \eta,$$

et les deux cœurs décalés

$$a_{\pm}(\eta) = a\left(\eta \mp \frac{u}{2}\right),$$

où u est la séparation interne adimensionnée.

Recouvrements élémentaires. On définit le recouvrement bilinéaire

$$\boxed{B_0(u) := \int_{\mathbb{R}} a_-(\eta)\, a_+(\eta)\, d\eta = \frac{2u}{\sinh u},} \tag{22.31}$$

et le recouvrement quartique

$$\boxed{Q_0(u) := \int_{\mathbb{R}} a_-^2(\eta)\, a_+^2(\eta)\, d\eta = \frac{4\,(u \coth u - 1)}{\sinh^2 u}.} \tag{22.32}$$

Réduction du canal EM–like. Le couplage EM–like entre deux constituants porteurs de charges opposées est attractif. Une fois la référence à séparation infinie soustraite, sa dépendance en séparation se réduit à

$$\boxed{E_{\text{EM}}^{(2\text{NSL})}(u) - E_{\text{EM}}^{(2\text{NSL})}(\infty) = -\mathcal{C}_{\text{EM}}^{(2)}\, B_0(u)^2, \qquad \mathcal{C}_{\text{EM}}^{(2)} > 0.} \tag{22.33}$$

Réduction du canal Préclusion. Le coût local de recouvrement fort se réduit de même à

$$\boxed{E_{\text{P}}^{(2\text{NSL})}(u) - E_{\text{P}}^{(2\text{NSL})}(\infty) = +\mathcal{C}_{\text{P}}^{(2)}\, Q_0(u), \qquad \mathcal{C}_{\text{P}}^{(2)} > 0.} \tag{22.34}$$

Statut. Les deux constantes réduites

$$\mathcal{C}_{\text{EM}}^{(2)}, \qquad \mathcal{C}_{\text{P}}^{(2)}$$

sont des nombres purs de couplage du composé neutre bilobe. Elles dépendent uniquement des canaux déjà fermés et de leur projection sur l'ansatz bilobe ; elles sont indépendantes de κ_μ.

22.1.6 Évaluation de la réponse extérieure neutre

Angle conique. L'angle canonique ψ_c du secteur faible est fixé par la fraction volumique totale ε_c dévolue aux deux cônes faibles (cf. (22.46)) :

$$\frac{2}{\pi}\Big(\psi_c - \tfrac{1}{2}\sin 2\psi_c\Big) = \varepsilon_c, \qquad 0 < \psi_c < \tfrac{\pi}{2}.$$

À ε_c donnée, cette relation fixe ψ_c de manière unique.

Carte DN/ND extérieure. La carte de bord extérieure est évaluée à partir de l'équation homogène (22.20). Elle fournit

$$\mathsf{M}_{\mathrm{DN}} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \qquad \lambda_+ = a + b, \qquad \lambda_- = a - b.$$

Réponse neutre. Avec la référence de bord (22.23), le canal neutre est défini par

$$\boxed{\Delta_{\mathrm{cone}}^{(\mathsf{Z}^0)} = \frac{\lambda_-}{\lambda_+} = \frac{a-b}{a+b}.}$$

Recette de calcul. L'évaluation numérique se fait en trois étapes :

1. fixer ψ_c par (22.46) ;
2. dériver ou importer depuis le canal radial extérieur la valeur de $\mu_{\mathrm{ext}} = \lambda_{\mathrm{ext}} R_0$;
3. construire M_{DN}, extraire λ_+ et λ_-, puis former $\Delta_{\mathrm{cone}}^{(\mathsf{Z}^0)}$.

La sous-section précédente a fixé, par fermeture spectrale sur $\mathbb{S}^3$, la valeur

$$\mu_{\mathrm{ext}} = \sqrt{3}.$$

La présente sous-section fournit donc la carte de calcul numérique complète de $\Delta_{\mathrm{cone}}^{(\mathsf{Z}^0)}$ à partir de ψ_c et de la carte DN/ND correspondante.

22.1.7 Réponse extérieure requise et sélection de filtre

Pour le canal neutre utilisé par la solution Z^0-like, on emploie le **projecteur antisymétrique** de bord, c'est-à-dire la combinaison Nord–Sud opposée. Dans la carte DN/ND extérieure, cela sélectionne le mode $\mathbf{e}_-$, tandis que le canal chargé de référence sélectionne le mode $\mathbf{e}_+$.

La quantité transmise à la fermeture NSL 2DOF est donc

$$\boxed{\Delta_{\mathrm{cone}}^{(\mathsf{Z}^0)} = \frac{\lambda_-}{\lambda_+}.}$$

Elle ne doit pas être confondue avec une constante conique pure indépendante de l'échelle radiale extérieure. Sa valeur dépend de la carte DN/ND dérivée dans §22.1.3.

22.1.8 Raccord spectral effectif du composé Z^0-like et forme affine du dénominateur

Objet. La sous-section précédente a établi la structure interne du composé Z^0-like comme état lié de deux constituants NSL 2DOF en recouvrement fort. Une fois le point lié verrouillé $u_{\mathsf{Z}}^\star$ fixé par (22.17), les quantités internes $O_1(u_{\mathsf{Z}}^\star)$, $O_2(u_{\mathsf{Z}}^\star)$ et $\delta^*(u_{\mathsf{Z}}^\star)$ sont déterminées : elles ne portent plus de dépendance dynamique supplémentaire et ne servent plus qu'à fixer des coefficients effectifs purs dans la fermeture spectrale.

Principe de décomposition. Au LO, le cœur radial effectif du composé reste celui de la famille NSL 2DOF. Le chargement spectral du composé neutre se décompose alors en deux blocs :

— un *bloc commun de constituant*, déjà présent pour chaque NSL 2DOF ;

— un *bloc relatif neutre*, sélectionné par le filtre antisymétrique du canal Z^0, et pondéré par le facteur neutre $\widehat{\beta}_0^{(2)}$.

Le point important est que le filtre neutre n'annule pas le bloc commun : il ajoute une contribution relative au bloc déjà porté par les deux constituants.

Statut du coefficient local. Dans la fermeture faible-like retenue, le coefficient local de canal est utilisé sous sa *forme réduite sans dimension*, notée ici κ_μ. Il joue le même rôle structurel que le rapport μ_2/T dans les fermetures LO du secteur faible, et intervient directement dans les dénominateurs spectraux D_{NSL2} et D_{Z0}.

Distinction des échelles. La quantité λ_{c} désigne ici la largeur de cœur du constituant NSL 2DOF héritée de la fermeture faible-like LO. Elle ne doit pas être confondue avec $\lambda_*^{(X)}$, qui désigne ensuite la longueur spectrale effective du mode composé $X \in \{\mathrm{NSL2}, Z0\}$ après fermeture du dénominateur global.

Bloc de canal élémentaire. On introduit alors le bloc spectral élémentaire de canal

$$B_{\mathrm{ch}}(\kappa_\mu\lambda_{\mathrm{c}}^2) := (\kappa_\mu\lambda_{\mathrm{c}}^2)\,K_0^{(2)} + K_2^{(2)}, \qquad K_0^{(2)} = J_0^2, \qquad K_2^{(2)} = J_0J_2.$$

Pour la branche NSL 2DOF chargée, le dénominateur LO s'écrit

$$\boxed{D_{\mathrm{NSL2}}(\kappa_\mu\lambda_{\mathrm{c}}^2) = (\kappa_\mu\lambda_{\mathrm{c}}^2)\,K_{\mathrm{bump}} + B_{\mathrm{ch}}(\kappa_\mu\lambda_{\mathrm{c}}^2) = (\kappa_\mu\lambda_{\mathrm{c}}^2)(K_{\mathrm{bump}} + K_0^{(2)}) + K_2^{(2)}.} \tag{22.35}$$

Convention de notation. L'indice (2) sur $K_0^{(2)}$ et $K_2^{(2)}$ renvoie ici au bloc de canal hérité de la structure 2DOF de constituant ; il ne désigne ni une puissance, ni un ordre de développement.

Bloc neutre du composé Z^0. Le facteur $\widehat{\beta}_0^{(2)}$ désigne le poids réduit du bloc relatif neutre induit par le projecteur antisymétrique de bord, c'est-à-dire par le filtre conique neutre $\Delta_{\mathrm{cone}}^{(\mathsf{Z}^0)}$ introduit à la sous-section précédente. Autrement dit, la différence entre la branche chargée et le composé neutre n'est pas portée par le bloc commun de constituant, mais par sa pondération relative dans le canal antisymétrique.

Pour le composé neutre, la contribution de canal comporte :

1. le bloc commun $B_{\mathrm{ch}}(\kappa_\mu\lambda_{\mathrm{c}}^2)$, hérité du constituant NSL 2DOF ;
2. le bloc relatif neutre $\widehat{\beta}_0^{(2)}\,B_{\mathrm{ch}}(\kappa_\mu\lambda_{\mathrm{c}}^2)$.

On obtient donc

$$B_{Z0}(\kappa_\mu\lambda_{\mathrm{c}}^2) = (1 + \widehat{\beta}_0^{(2)})\,B_{\mathrm{ch}}(\kappa_\mu\lambda_{\mathrm{c}}^2).$$

Le dénominateur spectral LO du composé neutre est alors

$$\boxed{\begin{aligned} D_{Z0}(\kappa_\mu\lambda_{\mathrm{c}}^2) &= (\kappa_\mu\lambda_{\mathrm{c}}^2)\,K_{\mathrm{bump}} + (1 + \widehat{\beta}_0^{(2)})\big((\kappa_\mu\lambda_{\mathrm{c}}^2)K_0^{(2)} + K_2^{(2)}\big) \\ &= (\kappa_\mu\lambda_{\mathrm{c}}^2)\Big(K_{\mathrm{bump}} + (1 + \widehat{\beta}_0^{(2)})K_0^{(2)}\Big) + (1 + \widehat{\beta}_0^{(2)})K_2^{(2)}. \end{aligned}} \tag{22.36}$$

Conséquence immédiate. On a

$$D_{Z0}(\kappa_\mu\lambda_{\rm c}^2) - D_{\rm NSL2}(\kappa_\mu\lambda_{\rm c}^2) = \widehat{\beta}_0^{(2)}((\kappa_\mu\lambda_{\rm c}^2)K_0^{(2)} + K_2^{(2)}) > 0 \qquad (\kappa_\mu > 0).$$

Le canal neutre est donc plus coûteux spectralement que la branche NSL 2DOF chargée. Comme

$$\lambda_*^{(X)\,4} \propto \frac{1}{D_X}, \qquad m_X \propto \frac{1}{\lambda_*^{(X)}},$$

il vient

$$m_X \propto D_X^{1/4},$$

et donc

$$D_{Z0} > D_{\rm NSL2} \qquad \Longrightarrow \qquad m_{Z0} > m_{\rm NSL2}.$$

Fermeture LO des masses. On écrit alors

$$\lambda_*^{(Z0)\,4} = \frac{2h_{\rm eff}c_t}{T}\,\frac{1}{D_{Z0}(\kappa_\mu\lambda_{\rm c}^2)}, \qquad \lambda_*^{({\rm NSL2})\,4} = \frac{2h_{\rm eff}c_t}{T}\,\frac{1}{D_{\rm NSL2}(\kappa_\mu\lambda_{\rm c}^2)},$$

et

$$m_X = \frac{h_{\rm eff}}{c_t\,\lambda_*^{(X)}}, \qquad X \in \{{\rm NSL2}, Z0\}.$$

Il vient donc

$$\left(\frac{m_{Z0}}{m_{\rm NSL2}}\right)^4 = \frac{D_{Z0}(\kappa_\mu\lambda_{\rm c}^2)}{D_{\rm NSL2}(\kappa_\mu\lambda_{\rm c}^2)}.$$

Statut. La réduction composée du Z^0-like conduit ainsi, au rang LO, à une forme affine en le coefficient local réduit κ_μ, héritée du bloc commun de constituant NSL 2DOF. La différence avec la branche chargée est entièrement portée par l'ajout du bloc relatif neutre pondéré par $\widehat{\beta}_0^{(2)}$, ce qui donne

$$D_{Z0} - D_{\rm NSL2} = \widehat{\beta}_0^{(2)}\Big((\kappa_\mu\lambda_c^2)\,K_0^{(2)} + K_2^{(2)}\Big).$$

22.1.9 Fermeture spectrale LO du composé Z^0-like

Ansatz radial effectif. Une fois la structure interne du composé fixée par la réduction mécanique des deux constituants NSL 2DOF en recouvrement fort (cf. §22.1.2), on projette la solution sur le canal neutre. Au LO, le cœur radial effectif reste décrit par le même ansatz que pour le canal NSL 2DOF, avec filtre angulaire neutre et impédance de canal correspondants :

$$A_{\rm in}(s,t) = A_0\,a(\xi)\,\cos(\mu t), \qquad a(\xi) = \operatorname{sech}\xi, \quad \xi = \frac{s}{\lambda}, \quad \lambda = \frac{c_t}{\omega_0}.$$

Constantes de forme. Pour le profil sech,

$$J_0 = \int_0^\infty 4\pi\xi^2\operatorname{sech}^2\xi\,d\xi = \frac{\pi^3}{3}, \qquad J_2 = \int_0^\infty 4\pi\xi^2(\operatorname{sech}\xi\tanh\xi)^2\,d\xi.$$

On introduit

$$K_{\rm bump} = J_0(J_0 + J_2), \qquad K_0^{(2)} = J_0^2, \qquad K_2^{(2)} = J_0J_2.$$

Facteur neutre 2DOF. On évalue le facteur neutre au point spectral $\lambda = \lambda_*^{(Z)}$ via la fenêtre mince

$$\varepsilon := \frac{\lambda_*^{(Z)}}{R_0} \ll 1, \qquad \psi_c := u_{\mathsf{Z}}^\star \varepsilon,$$

où $u_{\mathsf{Z}}^\star$ est le point lié neutre verrouillé par (22.17). Dans la calotte quasi-plane, on introduit

$$g_* := \frac{1}{\sin \psi_c} \simeq \frac{1}{u_{\mathsf{Z}}^\star \varepsilon}, \qquad k_*^2 := \frac{\rho}{T}\,\omega_{0,*}^2 - U(\psi_c),$$

et l'on définit le facteur neutre (nombre pur) par

$$\boxed{\widehat{\beta}_0^{(2)} := \widehat{\beta}_0(\lambda_*^{(Z)}) \equiv \chi^{(2)} := \frac{(2k_*)^2}{(2k_*)^2 + g_*^2} \in (0,1)}. \tag{22.37}$$

Proposition 22.7 (Valeur LO de $\widehat{\beta}_0^{(2)}$)**.** *Pour la branche 2DOF (mode zonal fondamental), on a au rang meneur*

$$\boxed{\widehat{\beta}_0^{(2)} = 1 - \frac{1}{4(u_{\mathsf{Z}}^\star)^2} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)}.$$

En particulier, pour le point verrouillé $u_{\mathsf{Z}}^\star = u_*^{(\mathrm{ref})}$,

La fenêtre admissible $u \in [1.7, 2.1]$ donne le contrôle robuste

$$\widehat{\beta}_0^{(2)} \in [0.9135,\ 0.9433] \qquad (LO).$$

Le point lié neutre est le point verrouillé par le raccord LO, cf. (22.17) :

$$u_{\mathsf{Z}}^\star = u_*^{(\mathrm{ref})} \simeq 2.00712.$$

Il est défini par l'équation de verrouillage

(22.16), identique à la racine de raccord (6.22) évaluée en (6.23).

Fermeture LO. La réduction précédente montre que le composé neutre admet au LO la même structure spectrale effective que la branche NSL 2DOF chargée, avec dénominateur affine $D_{Z0}(\kappa_\mu)$ donné par (22.36). On écrit donc

$$\boxed{\lambda_*^{(Z0)\,4} = \frac{2\,h_{\mathrm{eff}}\,c_t}{T}\,\frac{1}{D_{Z0}(\kappa_\mu)} = \frac{2\,h_{\mathrm{eff}}\,c_t}{T}\,\frac{1}{\kappa_\mu\Big(K_{\mathrm{bump}} + (1+\widehat{\beta}_0^{(2)})K_0^{(2)}\Big) + (1+\widehat{\beta}_0^{(2)})K_2^{(2)}}.} \tag{22.38}$$

De même,

$$\boxed{\lambda_*^{(\mathrm{NSL2})\,4} = \frac{2\,h_{\mathrm{eff}}\,c_t}{T}\,\frac{1}{D_{\mathrm{NSL2}}(\kappa_\mu)} = \frac{2\,h_{\mathrm{eff}}\,c_t}{T}\,\frac{1}{\kappa_\mu(K_{\mathrm{bump}} + K_0^{(2)}) + K_2^{(2)}}.} \tag{22.39}$$

On en déduit

$$\omega_{0,*}^{(Z0)} = \frac{c_t}{\lambda_*^{(Z0)}}, \qquad m_{Z0} = \frac{h_{\mathrm{eff}}}{c_t\,\lambda_*^{(Z0)}},$$

et

$$\left(\frac{m_{Z0}}{m_{\mathrm{NSL2}}}\right)^4 = \frac{D_{Z0}(\kappa_\mu)}{D_{\mathrm{NSL2}}(\kappa_\mu)}.$$

Comme $D_{Z0} > D_{\mathrm{NSL2}}$ pour $\widehat{\beta}_0^{(2)} > 0$, on a bien

$$m_{Z0} > m_{\mathrm{NSL2}} \qquad \text{au rang LO.}$$

Énergie et spin. Le composé Z^0-like hérite de la classe vectorielle des branches NSL 2DOF qui le constituent. Au rang meneur, la configuration vérifie donc

$$N_{\mathrm{pol}} = 2, \qquad w = 1,$$

d'où, par le comptage géométrique commun,

$$s_g^{(\mathsf{Z}^0)} = \frac{wN_{\mathrm{pol}}}{2} = 1.$$

La loi d'action 2DOF donne en outre

$$E_0^{(\mathsf{Z}^0)} = h_{\mathrm{eff}}\,\omega_{0,*}^{(\mathsf{Z}^0)}, \qquad |S^{(\mathsf{Z}^0)}| = \frac{E_0^{(\mathsf{Z}^0)}}{\omega_{0,*}^{(\mathsf{Z}^0)}} = h_{\mathrm{eff}}.$$

On obtient donc

$$\boxed{s_g^{(\mathsf{Z}^0)} = 1, \qquad |S^{(\mathsf{Z}^0)}| = h_{\mathrm{eff}}.}$$

Le composé Z^0-like est ainsi une branche entière, de type bosonique au sens HSM. Il ne relève pas de la structure spinorielle demi-entière associée aux bumps 2DOF fondamentaux.

22.1.10 Compatibilité cinématique en mouvement

Cœur composé massique réduit. Le composé Z^0-like est une branche localisée massique construite à partir de deux constituants NSL 2DOF de même largeur, en recouvrement fort et dans un même cœur effectif neutre. La fermeture LO donne une largeur $\lambda_*^{(Z0)}$, une fréquence propre

$$\omega_{0,*}^{(\mathsf{Z}^0)} = \frac{c_t}{\lambda_*^{(Z0)}},$$

et une énergie propre finie

$$E_0^{(\mathsf{Z}^0)} = h_{\mathrm{eff}}\,\omega_{0,*}^{(\mathsf{Z}^0)}.$$

Dans le repère comobile du composé, l'impulsion longitudinale totale est nulle :

$$P_0^{(\mathsf{Z}^0)} = 0.$$

La branche entre donc dans le cadre cinématique des solutions localisées massiques de §7.1.

Loi de boost du cœur composé. Le Z^0-like hérite de la dynamique longitudinale tangentielle des constituants NSL 2DOF, tandis que le canal neutre modifie le dénominateur de fermeture par le facteur $\widehat{\beta}_0^{(2)}$. Cette modification affecte la largeur et l'énergie propre de la branche, mais pas la structure hyperbolique tangentielle du cœur composé. La vitesse caractéristique de branche est donc

$$c_{\mathcal{F}} = c_t.$$

Par (7.9), on obtient

$$E^{(\mathsf{Z}^0)}(u) = \Gamma_t\,E_0^{(\mathsf{Z}^0)}, \qquad P^{(\mathsf{Z}^0)}(u) = \Gamma_t \frac{u}{c_t^2} E_0^{(\mathsf{Z}^0)}, \qquad \Gamma_t = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c_t^2}}.$$

La dispersion effective du cœur composé est

$$E^{(\mathsf{Z}^0)}(u)^2 = \left(E_0^{(\mathsf{Z}^0)}\right)^2 + c_t^2\,P^{(\mathsf{Z}^0)}(u)^2.$$

Source radiale localisée. La structure interne du Z^0-like est un doublet neutre de deux constituants NSL 2DOF de même module. Dans le régime de recouvrement fort, les deux constituants partagent une coordonnée comobile unique. Les profils de cœur sont de la forme

$$a_\pm(\eta) = a\left(\eta \mp \frac{u}{2}\right), \qquad a(\eta) = \operatorname{sech}\eta,$$

et les sources radiales construites à partir des densités quadratiques et des recouvrements croisés restent des fonctions localisées de la coordonnée comobile.

L'opérateur radial de gaine est l'opérateur commun du critère (7.3). La neutralité globale du composé modifie le contenu de la source et annule certains canaux monopolaires, mais elle ne modifie pas l'opérateur radial commun. Ainsi, lorsque la réponse radiale de gaine est considérée explicitement, la gaine strictement comobile est localisée pour

$$|u| < c_r, \qquad c_r^2 = \kappa_r c_t^2.$$

Portée. Cette compatibilité cinématique ne modifie ni la fermeture spectrale (22.38), ni le rapport

$$\left(\frac{m_{Z0}}{m_{\mathrm{NSL2}}}\right)^4 = \frac{D_{Z0}(\kappa_\mu)}{D_{\mathrm{NSL2}}(\kappa_\mu)}.$$

Elle établit seulement que le composé Z^0-like, une fois sa branche fermée au rang LO, relève du cadre des solutions localisées massiques en mouvement, avec cœur composé boosté à vitesse caractéristique c_t et gaine radiale strictement comobile localisée sous le seuil $|u| < c_r$.

22.1.11 Constantes de cœur ($\mathbf{Z}^0$–like 2DOF)

Avec $a(\xi) = \operatorname{sech}\xi$,

$$J_0 = \frac{\pi^3}{3} = 10.3354255601, \qquad J_2 = 7.6339320582,$$

on fixe

$$K_0^{(2)} := J_0^2 = 1.068210215084 \times 10^2, \qquad K_2^{(2)} := J_0\, J_2 = 7.88999365184 \times 10^1. \tag{22.40}$$

La combinaison de cœur commune vaut

$$K_{\mathrm{bump}} = J_0(J_0 + J_2) = 1.857209580268 \times 10^2.$$

Les constantes coniques vérifient

$$\Delta_{\mathrm{cone}}^{(\mathsf{N}SL2D)} = 1, \qquad \Delta_{\mathrm{cone}}^{(\mathsf{Z}^0)} = \frac{\lambda_-}{\lambda_+} = \frac{a-b}{a+b} \quad \text{(à insérer après calcul DN/ND).} \tag{22.41}$$

Paramètres structurels HSM. Les grandeurs suivantes dépendent des constantes fondamentales HSM :

$$\ell_0, \quad T, \quad \rho, \quad \mu_2, \quad R_0,$$

avec

$$c_t^2 = \frac{T}{\rho}, \qquad \kappa_\mu := \frac{\mu_2}{T} > 0.$$

Statut récapitulatif. La théorie pure du composé Z^0-like :

- fixe les formes radiales $(J_0, J_2, K_{\mathrm{bump}}, K_0^{(2)}, K_2^{(2)})$,
- fixe les noyaux de recouvrement (O_1, O_2) du composé,
- fixe le facteur neutre $\widehat{\beta}_0^{(2)}$,
- et établit la structure de la fermeture (22.38).

22.1.12 Constantes coniques des filtres NSL 2DOF : définition minimale

But. Définir les nombres purs $\Delta_{\text{cone}}^{(\mathsf{N}SL2D)}$ et $\Delta_{\text{cone}}^{(\mathsf{Z}^0)}$ qui corrigent la fermeture NSL 2DOF au LO (cônes faibles), *sans* introduire de constante de milieu.

1. Données d'entrée et normalisation

Géométrie zonale sur $\mathbb{S}^3$ (rayon R_0), arc $s = R_0\psi$, $0 < \psi < \pi$. Deux calottes (cônes faibles) à $\psi = \psi_c$ et $\psi = \pi - \psi_c$. Données de bord (amplitude réduite u) :

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} u(\psi_c) \\ u(\pi - \psi_c) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{n} = \begin{pmatrix} \partial_n u(\psi_c) \\ -\partial_n u(\pi - \psi_c) \end{pmatrix}.$$

2. Carte DN/ND zonale

Cartes

$$\mathbf{n} = \mathsf{M}_{\text{DN}}\mathbf{d}, \qquad \mathbf{d} = \mathsf{M}_{\text{ND}}\mathbf{n}, \qquad \mathsf{M}_{\text{ND}} = \mathsf{M}_{\text{DN}}^{-1}.$$

Par symétrie Nord–Sud (branche fondamentale) :

$$\mathsf{M}_{\text{DN}} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \qquad \lambda_+ = a + b, \quad \lambda_- = a - b.$$

3. Filtres canoniques NSL2DOF et Z^0

Choix canoniques :

$$\boldsymbol{\pi}^{(NSL2D)} = \mathbf{e}_+ = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\pi}^{(\mathsf{Z}^0)} = \mathbf{e}_- = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Impédance DN filtrée :

$$\Lambda_{\text{DN}}^{(X)} = \frac{\boldsymbol{\pi}^{(X)T} \mathsf{M}_{\text{DN}} \boldsymbol{\pi}^{(X)}}{\boldsymbol{\pi}^{(X)T} \boldsymbol{\pi}^{(X)}}.$$

4. Définition de $\Delta_{\text{cone}}^{(X)}$

Référence symétrique : $\boldsymbol{\pi}^{(\text{ref})} = \mathbf{e}_+$, d'où

$$\Lambda_{\text{DN}}^{(\text{ref})} = \lambda_+.$$

Définition (ratio d'impédances) :

$$\boxed{\Delta_{\text{cone}}^{(X)} = \frac{\Lambda_{\text{DN}}^{(X)}}{\Lambda_{\text{DN}}^{(\text{ref})}}, \qquad X \in \{\mathsf{N}SL2D, \mathsf{Z}^0\}.} \tag{22.42}$$

Avec les filtres canoniques :

$$\Delta_{\text{cone}}^{(\mathsf{N}SL2D)} = 1, \qquad \Delta_{\text{cone}}^{(\mathsf{Z}^0)} = \frac{\lambda_-}{\lambda_+} = \frac{a - b}{a + b}. \tag{22.43}$$

Ces constantes sont adimensionnées et purement géométriques : à géométrie conique fixée, elles sont indépendantes des constantes de milieu $(\ell_0, \rho, T, \mu_2, R_0)$.

22.2 Constante de structure et angle conique (général puis canonique)

Définition générale. On note $\varepsilon_c \in (0,1)$ la fraction de volume totale occupée par les deux cônes faibles symétriques sur $\mathbb{S}^3$ (donc $\varepsilon_c/2$ par cône). La relation géométrique exacte est

$$\boxed{\varepsilon_c = \frac{V_{\text{cones}}(\psi_c)}{\text{Vol}(\mathbb{S}^3)} = \frac{2}{\pi}\Big(\psi_c - \tfrac{1}{2}\sin 2\psi_c\Big), \qquad 0 < \psi_c < \tfrac{\pi}{2}.} \tag{22.44}$$

Cette relation définit implicitement $\psi_c = \psi_c(\varepsilon_c)$ de façon univoque.

Sélection symétrique de la jauge conique. La géométrie extérieure du composé neutre $\mathsf{Z}^0 = X_1 \oplus X_2$ est symétrique sous l'échange des deux constituants

$$X_1 \longleftrightarrow X_2.$$

On note ε_c la fraction volumique totale portée par les deux cônes faibles symétriques, soit $\varepsilon_c/2$ par cône.

Lemme 22.8 (Jauge conique symétrique du doublet neutre)**.** *Dans le composé neutre bilobe, l'invariance d'échange $X_1 \leftrightarrow X_2$ impose la jauge conique symétrique*

$$\boxed{\varepsilon_c^{(\text{can})} = \frac{1}{2}.} \tag{22.45}$$

Démonstration. La carte extérieure DN/ND du composé neutre est lue sur deux cônes faibles opposés et équivalents. L'échange des constituants

$$X_1 \longleftrightarrow X_2$$

échange les deux cônes et transforme la fraction portée par un côté en son complément. La fraction totale sélectionnée doit donc vérifier

$$\varepsilon_c = 1 - \varepsilon_c.$$

Il vient

$$\varepsilon_c = \frac{1}{2}.$$

Cette valeur exprime la symétrie binaire du composé neutre ; elle ne constitue pas une constante dynamique supplémentaire. □

En reportant (22.45) dans la relation géométrique exacte (22.44), on obtient

$$\boxed{\frac{2}{\pi}\Big(\psi_c - \tfrac{1}{2}\sin 2\psi_c\Big) = \tfrac{1}{2}.} \tag{22.46}$$

La solution numérique correspondante est

$$\boxed{\psi_c^{(\text{can})} \approx 1.154940730 \text{ rad} \approx 66.173229^\circ.} \tag{22.47}$$

Statut de la jauge conique symétrique. La valeur $\varepsilon_c^{(\text{can})} = 1/2$ est la conséquence de la symétrie d'échange du doublet neutre. Elle fixe la jauge géométrique dans laquelle la carte extérieure DN/ND du secteur neutre 2DOF est évaluée. Les quantités coniques utilisées plus bas sont donc lues dans cette jauge symétrique.

Distinction avec la cellule spectrale de plateau. L'angle $\psi_c^{(\mathrm{can})} \approx 1.154940730$ défini ici appartient à la carte extérieure DN/ND du composé neutre. Il ne doit pas être confondu avec la cellule spectrale élémentaire de plateau, définie par

$$\sin^2 \psi_c^{(\mathrm{cell})} = \frac{1}{3}, \qquad \psi_c^{(\mathrm{cell})} \approx 0.615479709,$$

dans (6.47). Les deux angles ont des rôles différents : $\psi_c^{(\mathrm{can})}$ fixe la jauge conique extérieure du doublet neutre, tandis que $\psi_c^{(\mathrm{cell})}$ fixe le filtre de plateau utilisé dans la fermeture spectrale commune.

22.2.1 Angle conique canonique

Pour les renvois internes, on pointe vers (22.46) (définition canonique), (22.47) (valeur numérique), ou (22.44) (cadre général).

22.3 Charge faible–like du Z^0–like

Positionnement. Le canal faible–like minimal a été fixé plus haut sur la branche primitive NSL 2DOF. Il y porte deux orientations internes élémentaires,

$$(+) \qquad \text{et} \qquad (-),$$

avec

$$\rho_W^{(+)} = +\rho\,\omega_{\mathrm{NSL}} A^2, \qquad \rho_W^{(-)} = -\rho\,\omega_{\mathrm{NSL}} A^2,$$

et

$$q_W^{(+)} = -q_W^{(-)},$$

cf. (20.68), (20.69), (20.75) et (20.76).

Dans le présent chapitre, le Z^0–like est construit comme un composé neutre de deux constituants NSL 2DOF de même module, en recouvrement fort, sélectionnés par le canal antisymétrique $\mathbf{e}_-$. Il ne s'agit donc pas d'une branche primitive supplémentaire, mais d'une combinaison composée des deux orientations de la NSL.

22.3.1 Neutralité exacte de la charge totale

Densité locale du composé. Dans l'ansatz bilobe de §22.1.2, les deux cœurs s'écrivent

$$a_\pm(\eta) = a\left(\eta \mp \frac{u}{2}\right), \qquad a(\eta) = \operatorname{sech}\eta.$$

Le composé neutre Z^0–like associe ces deux cœurs à des orientations internes opposées du canal faible–like. La densité totale de charge faible–like du composé s'écrit donc, au rang LO local,

$$\boxed{\rho_W^{(\mathsf{Z}^0)}(\eta) = \rho\,\omega_{\mathrm{NSL}}\Big(a_+(\eta)^2 - a_-(\eta)^2\Big).} \tag{22.48}$$

Annulation de la charge globale. La charge totale vaut alors

$$q_W^{(\mathsf{Z}^0)} = \int \rho_W^{(\mathsf{Z}^0)}\, dV.$$

Comme les deux constituants portent le *même* profil NSL 2DOF et ne diffèrent que par une translation interne $\pm u/2$, on a

$$\int a_+(\eta)^2\, d\eta = \int a_-(\eta)^2\, d\eta = \int a(\eta)^2\, d\eta.$$

Par suite,

$$\int \rho_W^{(\mathsf{Z}^0)}\, dV = \rho\, \omega_{\mathrm{NSL}} \left(\int a_+^2\, dV - \int a_-^2\, dV \right) = 0,$$

d'où

$$\boxed{q_W^{(\mathsf{Z}^0)} = 0.} \tag{22.49}$$

Portée du résultat. L'annulation de $q_W^{(\mathsf{Z}^0)}$ n'est donc pas ici une simple hypothèse de lecture de canal, mais une conséquence directe de la construction du composé comme superposition de deux constituants NSL 2DOF de même module et d'orientations faible–like opposées.

22.3.2 Neutralité globale et structure interne non triviale

Structure locale. L'annulation de la charge totale ne signifie pas que la densité locale soit trivialement nulle. En effet, tant que $u > 0$,

$$a_+(\eta)^2 \neq a_-(\eta)^2 \quad \text{point par point,}$$

de sorte que

$$\rho_W^{(\mathsf{Z}^0)}(\eta) \not\equiv 0.$$

Le composé est donc globalement neutre, mais localement non trivial dans le canal faible–like.

Parité interne. Par symétrie du bilobe,

$$a_+(-\eta) = a_-(\eta),$$

d'où

$$\rho_W^{(\mathsf{Z}^0)}(-\eta) = -\,\rho_W^{(\mathsf{Z}^0)}(\eta).$$

La densité de canal du Z^0–like est ainsi *antisymétrique* dans la coordonnée interne, ce qui explique l'annulation exacte de son monopôle global malgré une structure locale non nulle.

22.3.3 Conséquences pour le champ faible–like

Couplage monopolaire. Comme la charge totale du composé s'annule, son couplage monopolaire direct au champ faible–like est nul au rang minimal :

$$q_W^{(\mathsf{Z}^0)} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \Phi_W^{\mathrm{mono}}(\mathsf{Z}^0) = 0.$$

Interaction monopolaire entre deux Z^0–like. Au même niveau de lecture, la force monopolaire minimale entre deux composés Z^0–like au repos s'annule :

$$\boxed{F_W^{\mathrm{mono}}(\mathsf{Z}^0, \mathsf{Z}^0) = 0.} \tag{22.50}$$

Toute interaction résiduelle éventuelle entre deux Z^0–like devra donc provenir d'invariants internes de canal d'ordre plus fin, et non d'une charge monopolaire totale non nulle.

22.3.4 Conclusion

Conclusion. Dans la construction retenue pour le composé Z^0–like, la neutralité faible–like est un résultat exact au rang LO :

$$\boxed{q_W^{(\mathsf{Z}^0)} = 0.}$$

Elle résulte de l'association de deux constituants NSL 2DOF de même module et d'orientations faible–like opposées. Le Z^0–like est ainsi globalement neutre dans le canal faible–like, tout en conservant une structure locale antisymétrique non triviale dans ce canal.

Chapitre 23

Breather 2DOF neutre sur $\mathbb{S}^3$: solution *à un seul cœur* (EM-like attractif + répulsion de gradient), recouvrement fort

Périmètre opérationnel (définition, non–ambiguïté)

Paramètre de séparation et recouvrement. On note $\Delta := L/\lambda$ la séparation adimensionnée des *deux lobes* internes (L distance des centres de lobes, $\lambda = c_t/\omega_0$ largeur locale LO). On définit l'indice de recouvrement (profil $a = \mathrm{sech}$; mesure locale euclidienne au LO) par

$$\mathfrak{O}(\Delta) \;:=\; \frac{\displaystyle\int_0^\infty 4\pi\,\xi^2\, a\Big(\xi - \tfrac{\Delta}{2}\Big)\; a\Big(\xi + \tfrac{\Delta}{2}\Big)\; d\xi}{\displaystyle\int_0^\infty 4\pi\,\xi^2\, a(\xi)^2\, d\xi} \;\in (0,1].$$

Statut géométrique de l'indice de recouvrement. L'indice $\mathfrak{O}(\Delta)$ ne doit pas être lu comme le recouvrement exact de deux cœurs 3D rigidement translatés, mais comme une *fonctionnelle radialisée de recouvrement* au LO, construite sur la mesure isotrope locale $4\pi\xi^2\,d\xi$. Le paramètre Δ y mesure l'écartement interne des deux lobes dans la réduction effective à un seul cœur.

Breather 2DOF (classe retenue). On appellera **breather 2DOF** une configuration *à deux lobes contenus dans un même cœur*, dans le régime de **recouvrement fort** défini opérationnellement par

$$\boxed{\mathfrak{O}(\Delta) \;\geq\; \mathfrak{O}_{\min}}$$

où $\mathfrak{O}_{\min}$ est un seuil de travail. Dans les tests de robustesse, on pourra prendre

$$\mathfrak{O}_{\min} \in [0.3,\, 0.6],$$

mais le développement formel du présent chapitre ne dépend pas d'une valeur particulière de ce seuil.

Dans le régime LO étudié plus bas, la dépendance en Δ de l'énergie interne provient de la compétition entre une contribution attractive de type EM-like et un coût répulsif de gradients croisés. La séparation interne Δ n'est donc pas un paramètre d'entrée : elle sera déterminée plus bas par une condition stationnaire de l'énergie interne dépendant de Δ,

$$\boxed{\partial_\Delta E_{\mathrm{dep}}(\Delta_*) = 0, \qquad \partial_\Delta^2 E_{\mathrm{dep}}(\Delta_*) > 0 \text{ (vérifié a posteriori).}}$$

Ce qui n'est pas un breather. Deux bumps 2DOF *distincts* (deux cœurs) liés par la seule interaction Coulomb-like à grande distance forment un **dimère EM** (molécule). Ce cas (recouvrement négligeable, donc $\mathfrak{O}(\Delta) \simeq 0$) ne fait pas partie du présent chapitre et relève du régime à deux corps.

23.1 Hypothèses structurantes et cadre

— **Géométrie et constantes.** Réseau élastique sur $\mathbb{S}^3(R_0)$, densité volumique ρ, raideur tangentielle T, vitesse $c_t^2 = T/\rho$. Coordonnée d'arc $s = R_0\psi$.

— **Architecture 2DOF.** Deux composantes tangentielles regroupées en un mode circulaire $\Psi = u_1 + i\,u_2$ (phasor), de fréquence porteuse ω_0 et largeur locale $\lambda = c_t/\omega_0$.

— **Neutralité et parité.** Deux lobes de signe opposé dans un même cœur, avec nœud central $A(0) = 0$ (combinaison impaire) et charge globale nulle. La branche reste portée par un unique mode circulaire 2DOF.

23.2 Constantes et notations (rappel minimal)

On réutilise les constantes dérivées dans les chapitres précédents, sans les redéfinir ici :

$$J_0, \quad J_2, \quad \kappa_\omega, \quad \kappa_\omega^{-1}, \quad b_0^{(2)}\,.$$

Ces quantités sont de nature géométrique/structure au LO et sont tenues pour acquises dans tout ce chapitre.

23.3 Énergie interne du même cœur et condition stationnaire

Pour un breather 2DOF *à deux lobes dans un même cœur* (recouvrement fort au sens du périmètre opérationnel, cf. §23),

l'énergie LO s'écrit

$$E_{\mathrm{tot}}(\Delta) \;=\; E^{(0)}_{\mathrm{coeur}} \;+\; E^{\mathrm{cross}}_{\mathrm{grad}}(\Delta) \;+\; E^{\mathrm{attr}}_{\mathrm{int}}(\Delta) \;+\; \mathcal{O}(\lambda/R_0)\,. \tag{23.1}$$

On note

$$E_{\mathrm{dep}}(\Delta) \;:=\; E^{\mathrm{cross}}_{\mathrm{grad}}(\Delta) + E^{\mathrm{attr}}_{\mathrm{int}}(\Delta)$$

la partie dépendant de la séparation interne Δ.

Dans le régime LO retenu ici, la réduction sur la coordonnée interne signée $\eta \in \mathbb{R}$ le long de l'axe joignant les deux lobes conduit à une écriture de la forme

$$E_{\mathrm{dep}}(\Delta) \;=\; C_{\mathrm{grad}}\,B_1(\Delta) \;-\; C_{\mathrm{attr}}\,B_0(\Delta), \tag{23.2}$$

où $C_{\mathrm{grad}} > 0$ et $C_{\mathrm{attr}} > 0$ sont les coefficients réduits associés, respectivement, au coût de gradients croisés et à l'attraction interne au sein du même cœur.

La séparation d'équilibre Δ_* est alors définie comme un point stationnaire admissible :

$$\partial_\Delta E_{\mathrm{dep}}(\Delta_*) = 0, \qquad \partial^2_\Delta E_{\mathrm{dep}}(\Delta_*) > 0. \tag{23.3}$$

Cœur $a = \operatorname{sech}$: moments $B_n(\Delta)$ et $P_0(\Delta)$

On fixe le profil local $a(\eta) = \operatorname{sech}\eta$ et on introduit la combinaison impaire

$$A_\Delta(\eta) \;:=\; a\Big(\eta - \tfrac{\Delta}{2}\Big) \;-\; a\Big(\eta + \tfrac{\Delta}{2}\Big)\,.$$

Produits scalaires sur la coordonnée interne. On note

$$\langle f, g\rangle_{\parallel} \;:=\; \int_{\mathbb{R}} f(\eta)\, g(\eta)\, d\eta.$$

Les noyaux de recouvrement du cœur sont alors définis par

$$B_0(\Delta) \;:=\; \Big\langle a\Big(\cdot - \tfrac{\Delta}{2}\Big)\,,\, a\Big(\cdot + \tfrac{\Delta}{2}\Big)\Big\rangle_{\parallel}, \tag{23.4}$$

$$B_1(\Delta) \;:=\; \Big\langle a'\Big(\cdot - \tfrac{\Delta}{2}\Big)\,,\, a'\Big(\cdot + \tfrac{\Delta}{2}\Big)\Big\rangle_{\parallel}. \tag{23.5}$$

On définit en outre

$$P_0(\Delta) \;:=\; \langle A_\Delta,\, A_\Delta\rangle_{\parallel}.$$

Identités structurelles. Par invariance par translation de $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\parallel}$,

$$\Big\langle a\Big(\cdot \mp \tfrac{\Delta}{2}\Big)\,,\, a\Big(\cdot \mp \tfrac{\Delta}{2}\Big)\Big\rangle_{\parallel} = B_0(0), \qquad \Big\langle a'\Big(\cdot \mp \tfrac{\Delta}{2}\Big)\,,\, a'\Big(\cdot \mp \tfrac{\Delta}{2}\Big)\Big\rangle_{\parallel} = B_1(0),$$

et l'on a les relations exactes

$$P_0(\Delta) \;=\; 2\,\Big(B_0(0) - B_0(\Delta)\Big), \tag{23.6}$$

$$\|A'_\Delta\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \;=\; 2\,\Big(B_1(0) - B_1(\Delta)\Big). \tag{23.7}$$

Recouvrement axial réduit. Dans la réduction 1D sur l'axe interne, on introduit le recouvrement axial réduit

$$\mathfrak{O}_{\parallel}(\Delta) \;:=\; \frac{B_0(\Delta)}{B_0(0)} \in (0,1], \qquad \mathfrak{O}_{\parallel}(0) = 1.$$

Il s'agit de la version 1D effective du recouvrement utilisée dans la présente section. Elle ne doit pas être identifiée littéralement à l'indice 3D $\mathfrak{O}(\Delta)$ introduit dans le périmètre opérationnel, même si les deux quantités jouent le même rôle qualitatif de mesure du recouvrement interne.

Développement local ($\Delta \ll 1$). Un développement de Taylor donne

$$A_\Delta(\eta) \;=\; -\Delta\, a'(\eta) \;-\; \frac{\Delta^3}{24}\, a^{(3)}(\eta) \;+\; \mathcal{O}(\Delta^5),$$

d'où

$$P_0(\Delta) \;=\; \Delta^2\, \langle a', a'\rangle_{\parallel} \;-\; \frac{\Delta^4}{12}\, \langle a'', a''\rangle_{\parallel} \;+\; \mathcal{O}(\Delta^6), \tag{23.8}$$

$$B_0(\Delta) \;=\; B_0(0) \;-\; \frac{\Delta^2}{2}\, \langle a', a'\rangle_{\parallel} \;+\; \mathcal{O}(\Delta^4), \tag{23.9}$$

$$B_1(\Delta) \;=\; B_1(0) \;-\; \frac{\Delta^2}{2}\, \langle a'', a''\rangle_{\parallel} \;+\; \mathcal{O}(\Delta^4). \tag{23.10}$$

Condition stationnaire en termes de $B_0(\Delta)$ et $B_1(\Delta)$

À partir de (23.2), la condition stationnaire s'écrit

$$\partial_\Delta E_{\mathrm{dep}}(\Delta_*) \;=\; 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad C_{\mathrm{grad}}\, B_1'(\Delta_*) \;=\; C_{\mathrm{attr}}\, B_0'(\Delta_*)\,. \tag{23.11}$$

En introduisant le rapport sans dimension

$$\kappa_* \;:=\; \frac{C_{\mathrm{attr}}}{C_{\mathrm{grad}}} \;>\; 0\,,$$

on obtient l'équation implicite

$$\frac{B_1'(\Delta_*)}{B_0'(\Delta_*)} \;=\; \kappa_*\,, \tag{23.12}$$

valable sur tout intervalle admissible où $B_0'(\Delta) \neq 0$.

Forme normalisée. En notant $\mathfrak{O}(\Delta) := B_0(\Delta)/B_0(0)$ et $b(\Delta) := B_1(\Delta)/B_1(0)$, on réécrit

$$\frac{B_1(0)}{B_0(0)}\,\frac{b'(\Delta_*)}{\mathfrak{O}'(\Delta_*)} \;=\; \kappa_*\,. \tag{23.13}$$

Forme différentielle des pentes et ratio $R(\Delta)$

Par dérivation sous le signe intégral,

$$B_0'(\Delta) = -\Big\langle a'\Big(\cdot - \tfrac{\Delta}{2}\Big)\,,\, a\Big(\cdot + \tfrac{\Delta}{2}\Big)\Big\rangle_{\|} = \Big\langle a\Big(\cdot - \tfrac{\Delta}{2}\Big)\,,\, a'\Big(\cdot + \tfrac{\Delta}{2}\Big)\Big\rangle_{\|}, \tag{23.14}$$

$$B_1'(\Delta) = -\Big\langle a''\Big(\cdot - \tfrac{\Delta}{2}\Big)\,,\, a'\Big(\cdot + \tfrac{\Delta}{2}\Big)\Big\rangle_{\|} = \Big\langle a'\Big(\cdot - \tfrac{\Delta}{2}\Big)\,,\, a''\Big(\cdot + \tfrac{\Delta}{2}\Big)\Big\rangle_{\|}. \tag{23.15}$$

Lorsque l'on se restreint à l'intervalle de recouvrement fort retenu pour les breathers du même cœur, on peut introduire le ratio

$$R(\Delta) \;:=\; \frac{B_1'(\Delta)}{B_0'(\Delta)},$$

et écrire la condition stationnaire sous la forme

$$R(\Delta_*) = \kappa_*.$$

Développement local. Pour $\Delta \ll 1$,

$$B_0'(\Delta) \;=\; -\,\Delta\,\langle a', a'\rangle_{\|} \;+\; \mathcal{O}(\Delta^3), \qquad B_1'(\Delta) \;=\; -\,\Delta\,\langle a'', a''\rangle_{\|} \;+\; \mathcal{O}(\Delta^3),$$

d'où

$$R(\Delta) \;=\; \frac{\langle a'', a''\rangle_{\|}}{\langle a', a'\rangle_{\|}} \;+\; \mathcal{O}(\Delta^2).$$

23.3.1 Quantification EBK locale et filtre spectral zonal

Le mode interne circulaire $\Psi = u_1 + i\,u_2$ satisfait la quantification EBK locale

$$\mathcal{J} \;=\; \oint p\,dq \;=\; 2\pi\,h_{\text{eff}}\,q, \qquad q \in \mathbb{N}^*, \tag{23.16}$$

et l'énergie porteuse LO s'écrit

$$E_0(q) = h_{\text{eff}}\,\omega_0(q). \tag{23.17}$$

Comptage harmonique induit par l'EBK. Sur $\mathbb{S}^3$, le sous-espace harmonique de degré ℓ porte une multiplicité

$$d_\ell = (\ell+1)^2.$$

Le nombre cumulé de modes jusqu'au degré L vaut donc

$$N(L) := \sum_{\ell=0}^{L} (\ell+1)^2 = \frac{(L+1)(L+2)(2L+3)}{6}. \tag{23.18}$$

La quantification EBK impose que la capacité spectrale admissible croisse linéairement avec le nombre quantique q. En identifiant l'échelle harmonique effective $L_c(q)$ par

$$N(L_c(q)) \propto q,$$

on obtient, au rang de fenêtre lissée,

$$L_c(q) \propto q^{1/3}. \tag{23.19}$$

On écrit donc la coupure effective sous la forme

$$\boxed{k_c(q) = k_0\,q^{1/3}.} \tag{23.20}$$

Proposition 23.1 (Capacité EBK fondamentale du breather 2DOF)**.** *Dans la fermeture LO du breather 2DOF, la capacité spectrale fondamentale du paquet EBK vaut*

$$k_0 = 5.$$

Démonstration. Le paquet EBK fondamental doit contenir deux niveaux.

D'abord, le niveau moyen $\ell = 0$, nécessaire pour porter la norme globale du mode réduit. Ensuite, le premier secteur non constant $\ell = 1$, nécessaire pour porter une variation interne non triviale sur $\mathbb{S}^3$. La normalisation cap canonique $E_\ell(1) = 1/\pi$ fixe la lecture du premier secteur non constant comme le secteur $\ell = 1$, sans introduire de poids spectral supplémentaire.

Le paquet harmonique minimal admissible est donc

$$0 \le \ell \le 1.$$

Sa capacité est donnée par le comptage harmonique sur $\mathbb{S}^3$:

$$N(1) = \sum_{\ell=0}^{1} (\ell + 1)^2 = 1^2 + 2^2 = 5.$$

La capacité fondamentale de la fenêtre EBK lissée est identifiée à cette capacité minimale :

$$k_0 = N(1) = 5.$$

Ainsi, $k_0 = 5$ n'est pas une valeur ajustée par robustesse numérique : c'est le comptage du paquet harmonique minimal $\ell = 0 \oplus \ell = 1$ sur $\mathbb{S}^3$. Le contrôle de robustesse intervient seulement a posteriori pour vérifier que la fenêtre ainsi définie se trouve dans le plateau stable des rapports spectraux. □

Fenêtre EBK canonique. La loi de fenêtre canonique du breather 2DOF est donc

$$\boxed{k_0 = 5.} \tag{23.21}$$

et

$$\boxed{k_c(q) = 5\, q^{1/3}.} \tag{23.22}$$

Cette prescription est celle utilisée dans toute la suite pour construire le spectre adimensionné $\mathcal{S}(q)$.

Peigne harmonique canonique et saturation différentielle. Le filtre EBK canonique associé à une coupure $k_c(q)$ agit sur le spectre zonal de $\mathbb{S}^3$. La composante constante doit être conservée sans renormalisation, car

$$C_0^{(1)} = 1 \quad \Longrightarrow \quad F_0(w_q) = 1.$$

La coupure EBK non saturée est

$$\boxed{k_c(q) = k_0\, q^{1/3}, \qquad k_0 = 5.} \tag{23.23}$$

Pour un secteur comportant un premier seuil fin $q_\star$, la croissance spectrale au-delà de ce seuil est bornée par une résolution effective de plateau. On introduit donc une échelle de saturation sous la forme

$$\boxed{k_{\mathrm{sat}}^2 = \mathfrak{c}_{\mathrm{sat}}^{(2)}\, \kappa_\omega^2.} \tag{23.24}$$

Le coefficient $\mathfrak{c}_{\mathrm{sat}}^{(2)}$ encode la fermeture LO de résolution du plateau breather 2DOF. Dans la fermeture centrale utilisée ici, il se décompose comme

$$\boxed{\mathfrak{c}_{\mathrm{sat}}^{(2)} = \mathfrak{c}_{\mathrm{cell}}\,\mathfrak{c}_{\mathrm{leg}}\,\mathfrak{c}_{\mathrm{quad}} = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8.} \tag{23.25}$$

Le premier facteur 2 correspond aux deux directions internes résolues du plateau 2DOF. Le second facteur 2 correspond aux deux jambes de source entrant dans la réduction projetée. Le troisième facteur 2 traduit le fait que la saturation agit sur une largeur spectrale quadratique, c'est-à-dire sur k^2, et non sur k.

La valeur centrale de saturation utilisée dans les calculs LO est donc

$$\boxed{k_{\mathrm{sat}}^2 = 8\,\kappa_\omega^2.} \tag{23.26}$$

Cette valeur doit être lue comme une fermeture LO régularisée du plateau spectral 2DOF, et non comme une identité analytique indépendante de la régularisation de largeur.

La saturation porte uniquement sur l'excès spectral au-delà de $q_\star$. La coupure effective est

$$\boxed{k_{\mathrm{eff}}^2(q;q_\star) = \begin{cases} k_c^2(q), & q \le q_\star, \\ k_c^2(q_\star) + \dfrac{k_c^2(q) - k_c^2(q_\star)}{1 + \dfrac{k_c^2(q) - k_c^2(q_\star)}{k_{\mathrm{sat}}^2}}, & q \ge q_\star. \end{cases}} \tag{23.27}$$

Cette forme laisse inchangé le premier régime fin $q_\star$ et ne sature que l'excès spectral $k_c^2(q) - k_c^2(q_\star)$.

Stabilité de la fermeture de saturation. La fermeture centrale $\mathfrak{c}_{\mathrm{sat}}^{(2)} = 8$ fixe la valeur utilisée dans les expressions numériques LO. La stabilité de cette fermeture se teste en remplaçant

$$k_{\mathrm{sat}}^2 = 8\kappa_\omega^2$$

par

$$k_{\mathrm{sat}}^2 = \mathfrak{c}_{\mathrm{sat}}^{(2)}\kappa_\omega^2$$

dans (23.27). Les résultats qui consomment $k_{\mathrm{eff}}^2(q;q_\star)$ doivent donc être lus comme des valeurs centrales LO associées à la fermeture composite (23.25).

La fenêtre gaussienne normalisée au mode constant est alors

$$\boxed{\mathcal{W}_\ell(q;q_\star) := \exp\Big(-\frac{\ell(\ell+2)}{k_{\mathrm{eff}}^2(q;q_\star)}\Big).} \tag{23.28}$$

Ainsi

$$\mathcal{W}_0(q;q_\star) = 1.$$

Pour le breather 2DOF, il n'y a pas de précession conique : la cellule EBK est zonal/isotrope. On définit donc $w_q(\psi)$ comme le filtre zonal sur $\mathbb{S}^3$ dont les coefficients harmoniques normalisés sont $\mathcal{W}_\ell(q;q_\star)$. Autrement dit,

$$F_\ell(w_q) := \frac{\displaystyle\int_0^\pi w_q(\psi)\,C_\ell^{(1)}(\cos\psi)\,\sin^2\psi\,d\psi}{\displaystyle\int_0^\pi w_q(\psi)\,\sin^2\psi\,d\psi} = \mathcal{W}_\ell(q;q_\star). \tag{23.29}$$

Ici, $C_\ell^{(1)}$ désigne le polynôme de Gegenbauer zonal de $\mathbb{S}^3$. La décroissance gaussienne de $\mathcal{W}_\ell(q;q_\star)$ assure que w_q est bien défini et lisse.

Noyau zonal filtré. On introduit ensuite les coefficients

$$a_\ell^{(q;q_\star)} := G_\ell(mR_0)\,\big|F_\ell(w_q)\big|^2, \qquad G_\ell(mR_0) = \frac{1}{\ell(\ell+2)+(mR_0)^2}, \tag{23.30}$$

et le noyau zonal filtré

$$K_q(\theta) := \frac{\displaystyle\sum_{\ell=0}^{L_{\max}} a_\ell^{(q;q_\star)}\, C_\ell^{(1)}(\cos\theta)}{a_0^{(q;q_\star)}}. \tag{23.31}$$

Par orthogonalité zonale, on a la normalisation canonique

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi K_q(\theta)\,\sin^2\theta\,d\theta = 1. \tag{23.32}$$

Moyenne de cellule. La moyenne de cellule associée au niveau q est alors

$$\alpha_{\mathrm{cell}}(q;q_\star) := \frac{1}{\mathcal{N}_q^2}\iint_{\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3} w_q(x)\,K_q\big(\gamma(x,y)\big)\,w_q(y)\,dV_x\,dV_y, \qquad \mathcal{N}_q := \int_{\mathbb{S}^3} w_q\,dV. \tag{23.33}$$

La dépendance en q entre donc uniquement via le filtre EBK zonal w_q.

Réduction spectrale de la moyenne de cellule. Comme w_q et K_q sont zonaux, la moyenne de cellule (23.33) se réduit à une somme spectrale. Avec la normalisation zonale de $\mathbb{S}^3$, la contraction de deux coefficients harmoniques introduit le poids de coquille

$$\frac{d_\ell^{(3)}}{\ell+1} = \frac{(\ell+1)^2}{\ell+1} = \ell+1.$$

On obtient donc

$$\boxed{\alpha_{\mathrm{cell}}(q;q_\star) = \sum_{\ell=0}^{L_{\max}} (\ell+1)\,\frac{G_\ell(mR_0)}{G_0(mR_0)}\,\big|\mathcal{W}_\ell(q;q_\star)\big|^4} \tag{23.34}$$

avec

$$G_\ell(mR_0) = \frac{1}{\ell(\ell+2)+(mR_0)^2}.$$

La puissance quatrième vient des deux filtrages de cellule et des deux coefficients de source dans le noyau filtré.

Invariant quadratique angulaire. On définit

$$\mathsf{J}_2^{(\theta)}(q;q_\star) := \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \theta^2\,K_q(\theta)\,\sin^2\theta\,d\theta, \qquad \widehat{\mathsf{J}}_2(q;q_\star) := (mR_0)^2\,\mathsf{J}_2^{(\theta)}(q;q_\star). \tag{23.35}$$

Spectre adimensionné du breather 2DOF. On introduit d'abord l'invariant spectral non normalisé

$$\Sigma(q;q_\star) := \lim_{mR_0\to\infty} \frac{\alpha_{\mathrm{cell}}(q;q_\star)}{\widehat{\mathsf{J}}_2(q;q_\star)}. \tag{23.36}$$

Le spectre adimensionné normalisé du breather 2DOF est alors

$$\boxed{\mathcal{S}(q;q_\star) := \frac{\Sigma(q;q_\star)}{\Sigma(1;q_\star)}.} \tag{23.37}$$

En particulier,

$$\mathcal{S}(1;q_\star) = 1. \tag{23.38}$$

Procédure numérique reproductible. À q fixé et pour un seuil $q_\star$ fixé, la quantité non normalisée $\Sigma(q; q_\star)$ est évaluée numériquement en tronquant à

$$L_{\max} = c\, mR_0, \qquad c \gtrsim 8,$$

puis en augmentant conjointement $(mR_0, L_{\max})$ jusqu'à stabilisation relative meilleure que 10^{-3}.

Statut de la hiérarchie spectrale. La présente section définit la fonction spectrale normalisée $\mathcal{S}(q; q_\star)$ pour tout entier admissible q, relativement au premier seuil fini $q_\star$ du secteur considéré. Elle fixe la partie relative du spectre breather 2DOF, c'est-à-dire les rapports d'écarts de masse au carré, mais elle ne fixe pas le préfacteur absolu commun M_*^2.

La hiérarchie spectrale est déterminée par l'évaluation de (23.36), avec la réduction spectrale (23.34) et l'invariant angulaire (23.35). Elle n'est pas introduite comme une hypothèse indépendante : pour tout triplet admissible $q_1 < q_2 < q_3$, et pour le seuil fini $q_\star$ retenu dans le secteur, les valeurs

$$\mathcal{S}(q_1; q_\star), \qquad \mathcal{S}(q_2; q_\star), \qquad \mathcal{S}(q_3; q_\star)$$

sont obtenues par calcul de

$$\mathcal{S}(q; q_\star) = \frac{\Sigma(q; q_\star)}{\Sigma(1; q_\star)}.$$

Toute la dépendance en q du spectre $\mathcal{S}(q; q_\star)$ est dérivée de la chaîne

$$q \longmapsto k_c(q) \longmapsto k_{\text{eff}}(q; q_\star) \longmapsto \mathcal{W}_\ell(q; q_\star) \longmapsto w_q \longmapsto F_\ell(w_q) \longmapsto K_q,\ \alpha_{\text{cell}}(q; q_\star),\ \widehat{\mathrm{J}}_2(q; q_\star) \longmapsto \Sigma(q; q_\star) \longmapsto \mathcal{S}(q;$$

La construction est donc indépendante de tout choix numérique particulier des indices q_i. Les valeurs numériques du triplet retenu pour une comparaison aux observables relèvent de la procédure d'ancrage observationnel, hors du présent cadre théorique. On ne fixe ici que la loi spectrale relative et les rapports qui en découlent.

23.3.2 Spin géométrique du breather 2DOF

Le breather 2DOF est porté par un unique mode circulaire tangent

$$\Psi = u_1 + i\, u_2,$$

de fréquence porteuse ω_0, modulé par une enveloppe impaire à deux lobes dans un même cœur. Cette structure n'introduit pas de polarisation circulaire indépendante supplémentaire ; on a donc

$$N_{\text{pol}} = 1.$$

Le cycle rapide restant fondamental au rang meneur, on a

$$w = 1.$$

Le comptage géométrique commun donne alors

$$s_g = \frac{wN_{\text{pol}}}{2} = \frac{1}{2}.$$

La loi EBK locale

$$E_0(q) = h_{\text{eff}}\, \omega_0(q)$$

fixe l'action orbitale de la branche 2DOF fondamentale, tandis que le comptage géométrique ci-dessus fixe son *spin géométrique*. Pour éviter toute ambiguïté avec l'action EBK, on notera donc ici le moment cinétique de spin par J_{spin}. On obtient

$$\boxed{s_g = \frac{1}{2}, \qquad |J_{\text{spin}}| = \frac{1}{2}\, h_{\text{eff}}.}$$

Portée. Le breather 2DOF est ainsi une branche spinorielle demi-entière. Les deux lobes internes correspondent à une structure spatiale impaire du même mode circulaire, et non à deux polarisations indépendantes dont les spins se compenseraient. L'action orbitale EBK de la branche reste quant à elle gouvernée séparément par la loi $E_0 = h_{\mathrm{eff}}\,\omega_0$.

23.3.3 Compatibilité cinématique en mouvement

Cœur massique réduit. Le breather 2DOF est une configuration neutre à deux lobes contenus dans un même cœur, en recouvrement fort. Au rang LO, il n'est pas lu comme deux cœurs séparés mais comme un cœur effectif unique. La branche possède donc un repère comobile dès lors que l'on considère un niveau massif de son spectre interne, avec une énergie propre finie et une impulsion longitudinale totale nulle dans ce repère.

La dynamique longitudinale réduite du cœur breather relève alors du cadre de §7.1. La loi de boost (7.9) s'applique au cœur massique réduit, avec la vitesse caractéristique tangentielle

$$c_{\mathcal{F}} = c_t.$$

Ainsi,

$$E(u) = \Gamma_t E_0, \qquad P(u) = \Gamma_t \frac{u}{c_t^2} E_0, \qquad \Gamma_t = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c_t^2}}.$$

La dispersion effective associée est celle de (7.10) :

$$E(u)^2 = E_0^2 + c_t^2 P(u)^2.$$

Structure composée et source localisée. La structure interne du breather est portée par deux lobes de signe opposé dans un même cœur, avec un profil localisé. Le recouvrement fort garantit que le composé reste décrit par une coordonnée comobile unique au rang LO. Les contributions internes dépendant de la séparation Δ, notamment les termes de gradients croisés et d'attraction interne, restent donc des fonctionnelles localisées de la coordonnée comobile du cœur.

Si l'on considère explicitement la réponse radiale de gaine associée à cette branche, la source radiale correspondante est une combinaison de profils de cœur localisés et de termes de recouvrement localisés. Elle vérifie alors l'hypothèse de source comobile localisée du critère (7.3). La gaine strictement comobile est localisée pour

$$|u| < c_r, \qquad c_r^2 = \kappa_r c_t^2.$$

Portée. Ce bloc ne modifie pas la fermeture spectrale du breather 2DOF, ni la forme canonique des écarts de masse au carré. Il établit seulement que les niveaux massifs du cœur breather, lorsqu'ils sont vus en mouvement uniforme, relèvent du cadre cinématique des solutions localisées massiques. Le cas non massif éventuel du spectre minimal ne relève pas de la loi $E(u) = \Gamma E_0$, puisqu'il ne possède pas de repère de repos massif.

23.3.4 Passage du breather 2DOF dans le filtre de retour admissible

Le breather 2DOF neutre est une configuration à deux lobes en recouvrement fort contenus dans un même coeur. Le point à établir est que cette structure interne ne crée pas, au rang LO, un nouveau filtre de retour admissible. La comparaison doit donc porter sur la carte de retour normalisée lue au bord, et non sur le détail interne des deux lobes.

Lemme 23.2 (Lecture de bord d'un breather en recouvrement fort)**.** *Au rang LO, le breather 2DOF en recouvrement fort est lu au bord comme un coeur unique. Sa carte locale de retour s'écrit*

$$\mathcal{E}_{\mathrm{ret}}^{(\mathrm{br})}(\psi; q) = \mathcal{C}_{\mathrm{ext}}^{(\mathrm{br})}(q)\, \Gamma_{\mathrm{ret}}(u; q), \qquad u := \frac{\psi - \psi_{\mathrm{ret}}(q)}{\delta\psi_c(q)}. \tag{23.39}$$

La fonction réduite $\Gamma_{\mathrm{ret}}(u; q)$ est la même fonction réduite que celle du bump 2DOF au rang LO ; seule l'amplitude externe $\mathcal{C}_{\mathrm{ext}}^{(\mathrm{br})}(q)$ peut différer.

Démonstration. Dans le régime de recouvrement fort, la séparation interne des deux lobes est strictement inférieure à la résolution de lecture du bord. Le bord ne résout donc pas deux centres distincts ; il voit un seul retour principal centré en $u = 0$. Après normalisation locale,

$$\Gamma_{\mathrm{ret}}(0; q) = 1, \qquad \partial_u \Gamma_{\mathrm{ret}}(0; q) = 0.$$

La partie paire du développement de bord est alors

$$\Gamma_{\mathrm{ret}}(u; q) = 1 - \frac{\kappa_{\mathrm{ret}}(q)}{2} u^2 + \frac{\lambda_{\mathrm{ret}}(q)}{24} u^4 + \mathcal{O}(u^6).$$

Le recouvrement fort modifie l'amplitude globale de retour, mais il ne modifie pas la carte réduite paire lue au bord. Cette amplitude globale est portée par $\mathcal{C}_{\mathrm{ext}}^{(\mathrm{br})}(q)$, tandis que la carte réduite est identique à celle du bump 2DOF au rang LO. □

Lemme 23.3 (Invariance du premier seuil isotrope)**.** *Le premier seuil isotrope admissible du breather 2DOF coïncide avec celui du bump 2DOF :*

$$q_2^{(\mathrm{br}\, 2DOF)} = q_2^{(\mathrm{bump}\, 2DOF)}. \tag{23.40}$$

Démonstration. Le premier seuil isotrope dépend du rapport des deux projections réduites du retour principal. On peut écrire, pour le breather,

$$R_1^{(\mathrm{br})} = r_1\, \mathcal{C}_{\mathrm{ext}}^{(\mathrm{br})}(q)\, M_{\mathrm{core}}^{(\mathrm{br})}(q),$$

$$R_2^{(\mathrm{br})} = r_2\, \mathcal{C}_{\mathrm{ext}}^{(\mathrm{br})}(q)\, M_{\mathrm{core}}^{(\mathrm{br})}(q).$$

Les coefficients r_1, r_2 sont ceux de la carte réduite $\Gamma_{\mathrm{ret}}(u; q)$. Par le lemme 23.2, cette carte réduite est la même que celle du bump 2DOF au rang LO. Le facteur global

$$\mathcal{C}_{\mathrm{ext}}^{(\mathrm{br})}(q)\, M_{\mathrm{core}}^{(\mathrm{br})}(q)$$

s'élimine dans le rapport :

$$\frac{R_2^{(\mathrm{br})}}{R_1^{(\mathrm{br})}} = \frac{r_2}{r_1}.$$

La condition de seuil isotrope est donc identique à celle du bump 2DOF, ce qui donne (23.40). □

Lemme 23.4 (Invariance du second seuil anisotrope faible)**.** *Le second seuil anisotrope faible du breather 2DOF coïncide avec celui du bump 2DOF :*

$$q_3^{(\mathrm{br}\, 2DOF)} = q_3^{(\mathrm{bump}\, 2DOF)}. \tag{23.41}$$

Démonstration. Le second seuil correspond à la première scission anisotrope faible du retour principal. Le développement réduit s'écrit

$$\Gamma_{\mathrm{ret}}(u,\theta;q) = \Gamma_0(u;q) + \varepsilon_2\,\Gamma_2(u;q)P_2(\cos\theta) + \mathcal{O}(\varepsilon_2^2).$$

Dans un breather 2DOF en recouvrement fort, les deux lobes ne sont pas résolus comme deux centres indépendants par la lecture de bord. Ils ne créent donc pas un nouveau canal quadrupolaire au LO. La correction anisotrope effectivement lue au bord est le même bloc réduit $\Gamma_2(u;q)$ que pour le bump 2DOF, multiplié par l'amplitude externe commune. Cette amplitude s'élimine dans le rapport qui définit la condition de scission. La condition anisotrope faible est donc identique à celle du bump 2DOF, d'où (23.41). □

Proposition 23.5 (Égalité LO des ensembles admissibles bump–breather)**.** *Au rang LO, le breather 2DOF neutre en recouvrement fort et le bump 2DOF possèdent le même ensemble de seuils structurels admissibles :*

$$\boxed{\mathcal{Q}_{\mathrm{br}}^{(2D,\mathrm{LO})} = \mathcal{Q}_{\mathrm{bump}}^{(2D,\mathrm{LO})}.} \tag{23.42}$$

En particulier, pour les trois premiers seuils,

$$\boxed{q_i^{(\mathrm{br}\,2DOF)} = q_i^{(\mathrm{bump}\,2DOF)}, \qquad i = 1,2,3.} \tag{23.43}$$

Démonstration. Le seuil fondamental q_1 est le premier élément admissible du filtre de retour. Comme le breather en recouvrement fort est lu au bord comme un coeur unique, le fondamental admissible est le même que pour le bump 2DOF :

$$q_1^{(\mathrm{br}\,2DOF)} = q_1^{(\mathrm{bump}\,2DOF)}.$$

Le premier seuil isotrope est identique par le lemme 23.3. Le second seuil anisotrope faible est identique par le lemme 23.4. Comme le filtre admissible est défini par la carte de retour normalisée lue au bord, et que cette carte est identique au rang LO, l'égalité vaut pour l'ensemble admissible LO, ce qui donne (23.42). La restriction aux trois premiers seuils donne (23.43). □

23.3.5 Écarts de masse au carré internes : forme canonique au LO

Dans le régime LO du breather 2DOF neutre (même cœur, recouvrement fort) et avec la quantification EBK locale introduite au §23.3.1, les écarts de masse au carré sont portés par les différences de la fonction spectrale interne $\mathcal{S}(q)$.

Pour deux entiers admissibles $q_b > q_a$, on définit

$$\Delta\mathcal{S}(q_b,q_a) := \mathcal{S}(q_b) - \mathcal{S}(q_a). \tag{23.44}$$

La loi factorisée des écarts s'écrit alors

$$\boxed{\Delta m^2(q_b,q_a) = M_*^2\,\Delta\mathcal{S}(q_b,q_a) = M_*^2\,[\mathcal{S}(q_b) - \mathcal{S}(q_a)].} \tag{23.45}$$

Le préfacteur $M_*^2 > 0$ est commun à tous les niveaux. Toute la dépendance relative en q est portée par $\mathcal{S}$.

Invariance par translation spectrale. Seules les différences de $\mathcal{S}$ interviennent dans les écarts de masse au carré. La transformation

$$\mathcal{S}(q) \longmapsto \mathcal{S}(q) + C$$

ne modifie donc aucun écart physique. Pour une famille de trois seuils admissibles

$$q_1 < q_2 < q_3,$$

on peut introduire la fonction spectrale ancrée au premier seuil

$$\widehat{\mathcal{S}}_{q_1}(q) := \mathcal{S}(q) - \mathcal{S}(q_1). \tag{23.46}$$

Elle vérifie

$$\widehat{\mathcal{S}}_{q_1}(q_1) = 0, \qquad \widehat{\mathcal{S}}_{q_1}(q) > 0 \quad \text{pour} \quad q > q_1.$$

Forme canonique pour trois niveaux. Avec l'ancrage (23.46), les deux écarts indépendants sont

$$\Delta m^2(q_2, q_1) = M_*^2\, \widehat{\mathcal{S}}_{q_1}(q_2), \qquad \Delta m^2(q_3, q_1) = M_*^2\, \widehat{\mathcal{S}}_{q_1}(q_3). \tag{23.47}$$

Leur rapport est donc

$$\boxed{\frac{\Delta m^2(q_3, q_1)}{\Delta m^2(q_2, q_1)} = \frac{\widehat{\mathcal{S}}_{q_1}(q_3)}{\widehat{\mathcal{S}}_{q_1}(q_2)} = \frac{\mathcal{S}(q_3) - \mathcal{S}(q_1)}{\mathcal{S}(q_2) - \mathcal{S}(q_1)}.} \tag{23.48}$$

Ce ratio est purement structurel : il ne dépend ni de M_*^2, ni d'un décalage commun de masse, ni d'une translation additive de la fonction spectrale.

Normalisation interne optionnelle. Lorsque $q_1 < q_2 < q_3$ sont fixés, il est utile de normaliser l'écart fondamental à l'unité :

$$\mathscr{S}_{q_1,q_2}(q) := \frac{\mathcal{S}(q) - \mathcal{S}(q_1)}{\mathcal{S}(q_2) - \mathcal{S}(q_1)}. \tag{23.49}$$

Alors

$$\mathscr{S}_{q_1,q_2}(q_1) = 0, \qquad \mathscr{S}_{q_1,q_2}(q_2) = 1,$$

et

$$\frac{\Delta m^2(q_3, q_1)}{\Delta m^2(q_2, q_1)} = \mathscr{S}_{q_1,q_2}(q_3). \tag{23.50}$$

Cette normalisation ne fixe aucune valeur numérique des q_i dans la théorie. Elle définit seulement la lecture invariante d'échelle qui sera consommée lors d'une évaluation observationnelle.

Constante de forme du cœur breather 2DOF : Γ_{shape}

Statut. La constante Γ_{shape} ne mesure pas l'énergie quadratique totale du cœur breather. Elle mesure le résidu de forme qui contribue aux écarts de masse au carré après retrait de la porteuse LO. La porteuse est déterminée par la loi EBK

$$E_0(q) = h_{\text{eff}}\, \omega_0(q),$$

et ne doit pas être recomptée dans M_*^2.

Énergie quadratique et séparation porteuse/résidu. Pour l'ansatz LO

$$u(\chi,t) = A\,a\!\left(\frac{\chi}{\Delta_*}\right)\cos(\omega t), \qquad a(\xi) = \operatorname{sech}\xi,$$

les contributions quadratiques s'écrivent sous la forme

$$E_{\mathrm{kin}} = \frac{\rho A^2\omega^2}{2}\,\mathcal{B}_0,$$

$$E_{\mathrm{tan}} = \frac{TA^2}{2}\left[C_\ell^{(0)}\mathcal{B}_0 + \Pi_{\mathrm{cap}}^{(1)}\mathcal{B}_2\right].$$

Le premier terme tangent,

$$C_\ell^{(0)}\mathcal{B}_0,$$

fixe la fréquence porteuse ω_0. Le terme qui contribue aux écarts de masse au carré est donc seulement le résidu projeté

$$\Pi_{\mathrm{cap}}^{(1)}\mathcal{B}_2.$$

Définition du facteur de cap. La jauge conique canonique fixe l'ouverture ψ_c par

$$\frac{2}{\pi}\left(\frac{\psi_c}{2} - \frac{\sin 2\psi_c}{4}\right) = \frac{1}{4}, \qquad \psi_c = 1.1549407300050287\ldots.$$

Le facteur de projection du cap $\ell = 1$ est

$$\Pi_{\mathrm{cap}}^{(1)} = \sin^2\psi_c = 0.8368060146\ldots.$$

Rapport de forme radial. Avec le profil $a(\xi) = \operatorname{sech}\xi$, on utilise

$$J_0 = \int_0^\infty 4\pi\xi^2 a(\xi)^2\,d\xi = \frac{\pi^3}{3},$$

$$J_2 = \int_0^\infty 4\pi\xi^2 a'(\xi)^2\,d\xi = 7.6339320582\ldots.$$

La réduction quasi-plane du cœur donne

$$\frac{\mathcal{B}_2}{\mathcal{B}_0} = \frac{J_2}{J_0}\frac{1}{\Delta_*^2}.$$

Constante de forme. Avec

$$\kappa_\omega = 54.9589563237, \qquad J_0 = 10.3354255601, \qquad J_2 = 7.6339320582,$$

on trouve

$$\Gamma_{\mathrm{shape}}^{(\mathrm{LO})} = 0.8368060146\,\frac{7.6339320582}{10.3354255601}\,\frac{1}{54.9589563237^2} = 2.04629\times10^{-4}.$$

On retient donc

$$\boxed{\Gamma_{\mathrm{shape}}^{(\mathrm{LO})} = 2.0462927542\times10^{-4}.} \tag{23.51}$$

Garde-fou. La formule

$$\frac{\mathcal{B}_2 + C_\ell^{(0)}\mathcal{B}_0}{\mathcal{B}_0}$$

décrit le ratio quadratique total du cœur. Elle ne doit pas être utilisée pour M_*^2, car elle recompte la porteuse $C_\ell^{(0)}\mathcal{B}_0$. Le préfacteur des écarts de masse au carré consomme uniquement le résidu projeté $\Pi_{\mathrm{cap}}^{(1)}\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_0$.

Préfacteur d'échelle du cœur (LO) et facteur de forme

Objet. Le préfacteur M_*^2 fixe l'échelle absolue commune des écarts de masse au carré du breather 2DOF. Il se factorise en deux briques :

$$M_*^2 = \Gamma_{\text{shape}}^{(\text{LO})}\, \mathcal{B}_\nu^{(\text{LO})}.$$

La première, $\Gamma_{\text{shape}}^{(\text{LO})}$, est le résidu de forme du cœur breather dérivé en (23.51). La seconde, $\mathcal{B}_\nu^{(\text{LO})}$, porte l'échelle absolue du mode normalisé.

Normalisation spectrale du mode breather. On introduit

$$\boxed{\delta_\omega := \kappa_\omega^{-1}.} \tag{23.52}$$

Le paramètre δ_ω est la largeur spectrale réduite associée à la fermeture de largeur du mode. Dans la jauge locale du breather 2DOF, une cellule spectrale isotrope de largeur linéaire δ_ω dans les trois directions réduites porte le volume spectral normalisé

$$\boxed{\mathcal{V}_\omega(\delta_\omega) = \frac{\displaystyle\int_{\delta_\omega \mathcal{C}_1} d^3p}{\displaystyle\int_{\mathcal{C}_1} d^3p} = \delta_\omega^3,} \tag{23.53}$$

où $\mathcal{C}_1$ désigne la cellule spectrale unité dans les coordonnées réduites.

Une insertion quadratique du coefficient de mode contient deux facteurs de mode contractés sur la même cellule spectrale. Elle porte donc le carré du volume spectral normalisé :

$$\boxed{\mathcal{I}_\omega^{(2)} = \mathcal{V}_\omega(\delta_\omega)^2 = \delta_\omega^6.} \tag{23.54}$$

Le préfacteur de masse au carré est bilinéaire en deux insertions quadratiques de ce type. La normalisation spectrale totale du bloc absolu vaut ainsi

$$\boxed{\mathcal{I}_\omega^{(2)}\, \mathcal{I}_\omega^{(2)} = \delta_\omega^6\, \delta_\omega^6 = \delta_\omega^{12}.} \tag{23.55}$$

Il ne s'agit pas de deux trajets physiques indépendants, mais des deux contractions quadratiques du coefficient de mode dans l'invariant de masse au carré.

Bloc absolu commun. On définit alors

$$\boxed{\mathcal{B}_\nu^{(\text{LO})} := \Phi_{\text{core}}^{(\text{LO})}\, \delta_\omega^{12} \left(\frac{h_{\text{eff}}\, c_t}{\ell_0}\right)^2.} \tag{23.56}$$

Le facteur de cœur purement géométrique est

$$\boxed{\Phi_{\text{core}}^{(\text{LO})} = \frac{C_\ell^{(0)}}{2\pi^2 \left(b_0^{(2)}\right)^2}, \qquad C_\ell^{(0)} = 2.} \tag{23.57}$$

La moyenne sphérique sur $\mathbb{S}^3$ et la normalisation de plateau sont donc appliquées une seule fois, dans $\Phi_{\text{core}}^{(\text{LO})}$. Aucun facteur résiduel $2\pi^2$, $1/(2\pi^2)$, ni puissance supplémentaire de δ_ω ne doit être ajouté en aval.

Préfacteur commun des écarts. Le préfacteur mécanique commun des écarts de masse au carré est

$$\boxed{M_*^2 = \Gamma_{\mathrm{shape}}^{(\mathrm{LO})}\,\mathcal{B}_\nu^{(\mathrm{LO})}.} \tag{23.58}$$

Dans la forme canonique LO consommée ensuite,

$$\Delta m^2(q) = M_*^2\,\mathcal{S}(q),$$

le préfacteur M_*^2 est commun à tous les niveaux. Toute la dépendance spectrale en q est portée par $\mathcal{S}(q)$.

Évaluation structurelle du préfacteur. Avec

$$\kappa_\omega = 54.9589563237, \qquad \delta_\omega = 1.8195396472 \times 10^{-2},$$

on a

$$\delta_\omega^6 = 3.6288510209 \times 10^{-11}, \qquad \delta_\omega^{12} = 1.3168559732 \times 10^{-21}.$$

Avec

$$b_0^{(2)} = 1.809206964 \times 10^4, \qquad \Phi_{\mathrm{core}}^{(\mathrm{LO})} = 3.0954497129 \times 10^{-10},$$

on obtient la forme interne

$$\mathcal{B}_\nu^{(\mathrm{LO})} = 4.0762614442 \times 10^{-31} \left(\frac{h_{\mathrm{eff}} c_t}{\ell_0}\right)^2.$$

Enfin, avec

$$\Gamma_{\mathrm{shape}}^{(\mathrm{LO})} = 2.0462927542 \times 10^{-4},$$

il vient

$$\boxed{M_*^2 = 8.3412242574 \times 10^{-35} \left(\frac{h_{\mathrm{eff}} c_t}{\ell_0}\right)^2.} \tag{23.59}$$

Cette écriture conserve h_{eff}, c_t et ℓ_0 comme grandeurs internes du modèle. Toute conversion numérique en unités externes est exclue du présent chapitre.

Séparation des facteurs. La forme (23.56) sépare le facteur géométrique de cœur $\Phi_{\mathrm{core}}^{(\mathrm{LO})}$, la normalisation spectrale absolue δ_ω^{12}, et l'échelle dimensionnelle $(h_{\mathrm{eff}} c_t/\ell_0)^2$. Le préfacteur M_*^2 est ainsi entièrement factorisé en une brique de forme $\Gamma_{\mathrm{shape}}^{(\mathrm{LO})}$ et une brique d'échelle absolue $\mathcal{B}_\nu^{(\mathrm{LO})}$.

Portée. Dans la forme canonique LO consommée ensuite,

$$\Delta m^2(q) = M_*^2\,\mathcal{S}(q),$$

le préfacteur M_*^2 est commun à tous les niveaux. Toute la dépendance spectrale en q est portée par $\mathcal{S}(q)$.

Masses absolues : forme générale, cas LO et statut NLO

Paramétrisation des trois premiers niveaux admissibles. On note

$$q_1 < q_2 < q_3$$

les trois premiers seuils admissibles du breather 2DOF au rang LO. Ils sont les trois premiers éléments de l'ensemble

$$\mathcal{Q}_{\mathrm{br}}^{(2D,\mathrm{LO})}.$$

Par la Proposition 23.5,

$$\mathcal{Q}_{\mathrm{br}}^{(2D,\mathrm{LO})} = \mathcal{Q}_{\mathrm{bump}}^{(2D,\mathrm{LO})},$$

et donc

$$q_i^{(\mathrm{br},2DOF)} = q_i^{(\mathrm{bump},2DOF)}, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{23.60}$$

Les masses absolues des trois premiers niveaux se paramétrisent alors en réinjectant successivement

$$q = q_1, \qquad q = q_2, \qquad q = q_3$$

dans la loi canonique de masse du breather 2DOF. Ainsi, la structure à trois niveaux est conservée, sans qu'il soit nécessaire de figer ici les valeurs numériques explicites des indices admissibles.

Forme générale. Comme les écarts physiques ne dépendent que des différences de la fonction spectrale, la loi absolue se paramétrise relativement au premier seuil admissible q_1. On écrit

$$\boxed{m_i^2 = m_0^2 + M_*^2\, \widehat{\mathcal{S}}_{q_1}(q_i), \qquad \widehat{\mathcal{S}}_{q_1}(q_i) = \mathcal{S}(q_i) - \mathcal{S}(q_1), \qquad i = 1, 2, 3.} \tag{23.61}$$

Ainsi

$$\widehat{\mathcal{S}}_{q_1}(q_1) = 0,$$

et m_0^2 est le décalage commun du plancher spectral.

Cas LO strict. Au LO, l'hamiltonien effectif du breather 2DOF ne contient aucun terme commun indépendant du niveau. On a donc

$$\boxed{m_0^2 = 0 \qquad (\mathrm{LO}).} \tag{23.62}$$

Dans ce cas minimal,

$$\boxed{m_1 = 0, \qquad m_2 = \sqrt{M_*^2\, \widehat{\mathcal{S}}_{q_1}(q_2)}, \qquad m_3 = \sqrt{M_*^2\, \widehat{\mathcal{S}}_{q_1}(q_3)}.} \tag{23.63}$$

Statut du décalage commun au-delà du LO. Au-delà du LO, une anharmonicité isotrope locale du cœur (brique quartique u^4) peut induire un décalage commun m_0^2. Dans la théorie générale du breather 2DOF, ce décalage n'est pas fixé numériquement ici : il dépend d'une spécialisation ultérieure de maille et de la projection quartique correspondante.

Offset commun : forme générale au-delà du LO

Quotient de projection quartique. On introduit le quotient de projection

$$\chi_{\mathrm{maille}} := \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{S}^3} d\Omega\, \big\langle (\nabla u)^4 \big\rangle_{\mathrm{fen}}}{\displaystyle\int_{\mathbb{S}^3} d\Omega\, \big\langle u^4 \big\rangle_{\mathrm{fen}}} \;\times\; \frac{I_2}{I_4}, \qquad I_2 = 2, \qquad I_4 = \frac{4}{3}. \tag{23.64}$$

Ce quotient dépend de la projection effective retenue pour la maille considérée. Aucune valeur numérique particulière n'est imposée dans le présent chapitre.

Coefficient quartique effectif de maille. On regroupe alors les données de spécialisation de maille dans un coefficient sans dimension

$$\boxed{\lambda_4^{(\text{maille})} > 0,} \tag{23.65}$$

qui sera fixé seulement lorsqu'une maille candidate sera choisie et évaluée.

Offset commun NLO. Le décalage commun s'écrit alors sous la forme générale

$$\boxed{m_0^2 = \lambda_4^{(\text{maille})} \, \frac{I_4}{I_2} \, \mathcal{B}_\nu^{(\text{LO})}.} \tag{23.66}$$

En utilisant $\dfrac{I_4}{I_2} = \dfrac{2}{3}$, on peut aussi écrire

$$m_0^2 = \lambda_4^{(\text{maille})} \left(\frac{2}{3}\right) \mathcal{B}_\nu^{(\text{LO})}.$$

Comme $M_*^2 = \Gamma_{\text{shape}}^{(\text{LO})} \mathcal{B}_\nu^{(\text{LO})}$, cette forme équivaut à

$$\boxed{m_0^2 = \frac{\lambda_4^{(\text{maille})}}{\Gamma_{\text{shape}}^{(\text{LO})}} \, \frac{I_4}{I_2} \, M_*^2.} \tag{23.67}$$

Cette écriture rend explicite que le décalage commun ne consomme pas à nouveau $\Gamma_{\text{shape}}^{(\text{LO})}$: il utilise le bloc absolu commun $\mathcal{B}_\nu^{(\text{LO})}$, tandis que M_*^2 contient le résidu de forme breather.

En utilisant $\dfrac{I_4}{I_2} = \dfrac{2}{3}$, on peut aussi écrire

$$m_0^2 = \lambda_4^{(\text{maille})} \left(\frac{2}{3}\right) \Phi_{\text{core}}^{(\text{LO})} \, \frac{h_{\text{eff}}^2}{\ell_0^2 \, c_t^2}.$$

Masses absolues au-delà du LO. Dans toute spécialisation ultérieure de maille, les masses des trois premiers niveaux admissibles deviennent

$$\boxed{m_1 = \sqrt{m_0^2}, \qquad m_2 = \sqrt{m_0^2 + M_*^2 \, \widehat{\mathcal{S}}_{q_1}(q_2)}, \qquad m_3 = \sqrt{m_0^2 + M_*^2 \, \widehat{\mathcal{S}}_{q_1}(q_3)}.} \tag{23.68}$$

Portée. Le présent chapitre établit donc la structure générale

$$\lambda_4^{(\text{maille})} \;\longrightarrow\; m_0^2 \;\longrightarrow\; m_i^2 = m_0^2 + M_*^2 \, \widehat{\mathcal{S}}_{q_1}(q_i), \qquad i = 1, 2, 3.$$

sans imposer ici qu'une maille particulière soit la seule possible. Une spécialisation particulière, par exemple dodécaédrique, peut être utilisée dans une évaluation numérique dédiée, mais elle ne fait pas partie de la fermeture théorique générale du présent chapitre.

Chapitre 24

Composé six-bump 2DOF en fort recouvrement : réduction 3×2 effective

L'objet étudié dans ce chapitre n'est pas posé comme un triplet de breathers 2DOF indépendants. Il est construit comme un composé de six constituants bump 2DOF en fort recouvrement. La structure 3×2 apparaît ensuite comme une réduction effective : les six sous-lobes se regroupent en trois paires cohérentes, puis la projection interne sélectionne trois témoins collectifs breather-like.

Les termes "breather-like" et "réduction 3×2" désignent donc des directions collectives projetées du composé, non des objets élémentaires posés au départ.

Idée mécanique du composé. Le composé $\mathcal{C}_{3\times 2}$ est une solution mécanique réduite construite à partir de six constituants bump 2DOF en fort recouvrement. Ces six constituants s'organisent en trois paires cohérentes,

$$(b_1^+, b_1^-), \qquad (b_2^+, b_2^-), \qquad (b_3^+, b_3^-),$$

mais les paires ainsi obtenues ne sont pas posées comme trois breathers 2DOF indépendants. Elles définissent d'abord une organisation collective du composé, puis la projection interne sélectionne trois témoins breather-like effectifs.

Le rôle du présent chapitre est de construire l'objet mécanique associé à ces six bump 2DOF en fort recouvrement, puis de décrire la réduction effective 3×2 qu'autorise le couplage interne. Les trois directions collectives seront notées

$$T_{q_1}, \qquad T_{q_2}, \qquad T_{q_3},$$

ou, lorsque la lecture breather-like est utilisée,

$$B^{\mathrm{eff}}_{q_1}, \qquad B^{\mathrm{eff}}_{q_2}, \qquad B^{\mathrm{eff}}_{q_3}.$$

Ces objets sont des témoins projetés du composé, et non des constituants élémentaires introduits au départ.

Les couplages de préclusion, de raideur fine et de canal EM–like projeté agissent sur ces témoins collectifs et définissent un opérateur réduit d'équilibre interne. Les modes propres de cet opérateur décrivent les configurations cohérentes du composé : ils donnent les manières dont les six sous-lobes peuvent se regrouper et s'équilibrer dans la branche considérée.

Les indices q_1, q_2, q_3 sont des indices EBK admissibles laissés symboliques dans le présent chapitre.

24.1 Existence réduite LO du composé

Idée mécanique. Le composé $\mathcal{C}_{3\times2}$ est une solution mécanique réduite formée de trois breathers 2DOF neutres couplés. Chaque breather 2DOF est lui-même une structure liée à deux sous-lobes corrélés en fort recouvrement. Le composé contient donc trois paires internes,

$$(b_1^+, b_1^-), \qquad (b_2^+, b_2^-), \qquad (b_3^+, b_3^-),$$

mais ces six sous-lobes ne constituent pas six objets indépendants : ils sont organisés en trois breathers 2DOF admissibles.

Triplet spectral admissible. On considère trois indices EBK admissibles

$$(q_1, q_2, q_3) \in \mathcal{Q}^3_{\mathrm{adm}}, \qquad q_1 < q_2 < q_3.$$

À chaque indice q_i est associé un breather 2DOF neutre admissible, noté

$$B_{q_i} \equiv (b_i^+, b_i^-).$$

Le composé associé est noté

$$\boxed{\mathcal{C}_{3\times2}(q_1, q_2, q_3).} \tag{24.1}$$

Définition mécanique du composé. On définit

$$\boxed{\mathcal{C}_{3\times2}(q_1, q_2, q_3) := \big[(b_1^+, b_1^-), (b_2^+, b_2^-), (b_3^+, b_3^-)\big].} \tag{24.2}$$

Cette notation désigne une solution composée à trois breathers 2DOF, et non une collection de six sous-lobes libres. Les trois paires (b_i^+, b_i^-) restent liées en breathers neutres.

Sous-espace collectif LO. La description réduite du composé se fait sur les trois coordonnées collectives

$$B_{q_1}, \qquad B_{q_2}, \qquad B_{q_3}.$$

On note

$$\mathscr{V}_{\mathcal{C}} := \mathrm{span}\{B_{q_1}, B_{q_2}, B_{q_3}\}. \tag{24.3}$$

La partie réduite du composé s'écrit

$$\Psi_{3\times2} = \sum_{i=1}^{3} a_i\, B_{q_i}(\Omega_i), \tag{24.4}$$

où a_i sont les amplitudes réduites des trois branches et Ω_i désigne leur orientation interne.

Critère d'existence réduite. Au rang LO, les interactions internes de préclusion et EM–like entre les trois branches définissent une forme quadratique réelle sur $\mathscr{V}_{\mathcal{C}}$. Cette forme quadratique contient des termes diagonaux, associés aux détunings réduits des branches, et des termes hors diagonale, associés aux couplages inter–branches.

La restriction de cette forme quadratique à $\mathscr{V}_{\mathcal{C}}$ est un opérateur réel symétrique de rang trois. Il admet donc trois modes propres réels. Ces modes propres sont les organisations cohérentes dans lesquelles les trois breathers 2DOF peuvent s'associer et s'équilibrer dans le composé.

Statut de la solution. Le composé $\mathcal{C}_{3\times2}$ est ainsi une solution composée réduite au rang LO : ses constituants mécaniques sont les trois breathers 2DOF admissibles, et ses modes propres sont déterminés par l'opérateur d'équilibre interne construit dans les sections suivantes. La fermeture présentée ici établit l'existence réduite du composé et de ses modes internes ; elle ne constitue pas une fermeture de masse absolue des modes propres.

24.2 Branche spinorielle minimale du composé

Spin des constituants mécaniques. Chaque branche B_{q_i} du composé est un breather 2DOF neutre admissible. D'après la construction du breather 2DOF, rappelée au §23.3.2, une telle branche porte une structure spinorielle demi-entière. On note donc

$$s(B_{q_i}) = \frac{1}{2}, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Le composé $\mathcal{C}_{3\times 2}$ associe trois objets spinoriels. Il reste donc une branche demi-entière sous rotation complète.

Secteur minimal. La branche neutre légère étudiée dans ce chapitre est la branche spinorielle minimale du composé. Elle correspond au couplage interne

$$\boxed{\left(\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2}\right)_0 \otimes \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.} \tag{24.5}$$

Dans cette lecture, deux breathers 2DOF du composé forment un secteur compensé, tandis que le troisième porte le relèvement spinoriel résiduel du composé global. La branche considérée vérifie donc

$$\boxed{s_{\mathcal{C}}^{\min} = \frac{1}{2}.} \tag{24.6}$$

Secteur demi-entier distinct. Le couplage de trois branches spinorielles admet aussi un secteur symétrique de spin total

$$s = \frac{3}{2}.$$

Ce secteur appartient à une branche composée distincte. Il n'intervient pas dans la branche spinorielle minimale (24.6), qui est la branche neutre légère considérée dans la suite du chapitre.

Indépendance de la diagonalisation interne. L'opérateur réduit $H_{\mathcal{C}}^{\mathrm{LO}}$ construit ci-dessous agit sur les trois coordonnées collectives

$$B_{q_1}, \qquad B_{q_2}, \qquad B_{q_3},$$

dans la branche spinorielle minimale. Il décrit les équilibres internes et les modes propres du composé dans ce secteur, mais ne re-diagonalise pas l'espace complet des couplages de spin.

24.3 Fermeture projective six-sous-lobes du composé

Objet. La branche spinorielle minimale (24.6) est interprétée à l'échelle fine comme une organisation de six sous-lobes bump 2DOF regroupés en trois paires cohérentes. La notation $\mathcal{C}_{3\times 2}$ désigne cette réduction effective : elle ne signifie pas que trois breathers 2DOF indépendants sont introduits comme constituants primitifs.

On note les trois échelles EBK admissibles

$$q_1 < q_2 < q_3.$$

La fermeture ci-dessous reste symbolique en q_i. Les spécialisations numériques éventuelles relèvent des sections d'évaluation.

24.3.1 Demi-cycle projectif et préclusion fond–fin

Lemme 24.1 (Demi-cycle projectif du canal composé)**.** *Dans un canal interne de bilobe, les directions opposées d'une même paire de sous-lobes représentent le même axe de canal. On identifie donc*

$$n \sim -n.$$

L'espace angulaire du canal est le quotient projectif

$$S^1/\{\pm 1\},$$

représenté par le demi-cycle canonique

$$\theta \in [0, \pi], \qquad d\mu_{\mathrm{proj}} = \frac{d\theta}{\pi}.$$

Corollaire 24.2 (Largeur projective fond–fin)**.** *Pour un coeur fin de profil longitudinal réduit* $\operatorname{sech}^2(qz)$*,*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2 u \, du = 2.$$

La largeur brute vaut donc $2/q$*. Rapportée au demi-cycle projectif* (24.1)*, la largeur effective est*

$$\boxed{\ell_q^{\mathrm{eff}} = \frac{2}{\pi q}.} \tag{24.7}$$

Par suite, la préclusion fond–fin projective vérifie

$$\boxed{P_{1,q}^{\mathrm{proj}} = q\frac{\pi}{2}\, P_{1,q}^{\mathrm{vol}}.} \tag{24.8}$$

24.3.2 Branche rentrée et séparation axiale fine

Centre collectif fin. Dans la branche de fort recouvrement, les deux échelles fines q_2, q_3 se placent dans un même lobe de la branche q_1. On note

$$Z = \eta z_\star,$$

où $z_\star$ désigne le maximum axial de la branche q_1. La préclusion fond–fin projective (24.8) équilibre le rappel du fond et sélectionne une branche rentrée

$$\boxed{Z_\star = \eta_\star z_\star, \qquad \eta_\star < 1.} \tag{24.9}$$

Séparation axiale fine. On note

$$R_{q_2} = Z_\star + \frac{\Delta R_\star}{2}, \qquad R_{q_3} = Z_\star - \frac{\Delta R_\star}{2}.$$

La séparation réduite est

$$y_\star := q_2 \Delta R_\star.$$

Elle est fixée par la condition stationnaire

$$\boxed{\Lambda_\Delta(Z_\star) y_\star = 2\operatorname{sech}^2(y_\star)\tanh(y_\star).} \tag{24.10}$$

Ainsi

$$\boxed{\Delta R_\star = \frac{y_\star}{q_2}.} \tag{24.11}$$

Le paramètre $\Lambda_\Delta(Z_\star)$ est la raideur réduite induite par la courbure axiale du fond q_1.

24.3.3 Témoins internes projetés

Témoin large. Le témoin q_1-like est le mode d'enveloppe de la branche large, corrigé par le déplacement collectif du paquet fin :

$$T_1 \simeq \partial_{u_1} S + \alpha_1 \partial_Z S.$$

Lemme 24.3 (Projecteur interne q_2-like)**.** *Soit*

$$A_{q_2} := \partial_{\Delta R} S, \qquad D_q := \partial_z B_q.$$

Dans la branche rentrée de fort recouvrement,

$$A_{q_2} = -\frac{1}{2} D_{q_2} + \frac{1}{2} D_{q_3} + O(e^{-q_2 \Delta R_\star}).$$

La composante D_{q_3} est une translation fine parasite. On définit

$$\mathcal{C}_{q_2} = \mathrm{span}\{D_{q_3}, \partial_Z S\},$$

et le projecteur métrique

$$\Pi_{\perp \mathcal{C}} = I - C_\mu (G_C^{-1})^{\mu\nu} \langle C_\nu, \cdot \rangle_G, \qquad (G_C)_{\mu\nu} = \langle C_\mu, C_\nu \rangle_G.$$

Le témoin interne est

$$T_{q_2} := \Pi_{\perp \mathcal{C}} A_{q_2}.$$

Alors

$$\boxed{T_{q_2} = \partial_{u_{q_2}} S + O(e^{-q_2 \Delta R_\star}) + O\left(\frac{q_2}{q_3}\right).} \tag{24.12}$$

Par conséquent,

$$\boxed{G_{22}^{\mathrm{br2}} = \langle T_{q_2}, T_{q_2} \rangle_G = \frac{G_{u_1 u_1}}{q_2} \left[1 + O\left(\frac{q_2}{q_3}\right)\right].} \tag{24.13}$$

24.3.4 Co-rotation angulaire du témoin q_3-like

On paramètre la croix fine par une rotation globale ψ et une déformation relative χ. Les orientations internes sont

$$\theta_{q_2} = \psi - \frac{\chi}{2}, \qquad \theta_{q_3} = \psi + \frac{\chi}{2}.$$

Lemme 24.4 (Co-rotation du mode q_3-like)**.** *Le bloc angulaire minimal est*

$$E_{\mathrm{ang}} = \frac{1}{2} k_{q_2} \theta_{q_2}^2 + \frac{1}{2} k_{q_3} \theta_{q_3}^2 + \frac{1}{2} k_{\mathrm{rel}} \chi^2.$$

La minimisation quasi-statique en ψ donne un mode collectif

$$T_{q_3} = A_\chi + \gamma A_\psi,$$

avec

$$\boxed{\gamma = \frac{k_{q_2} - k_{q_3}}{2(k_{q_2} + k_{q_3})}.} \tag{24.14}$$

Dans le verrouillage croisé q_2/q_3, la raideur locale croît comme la finesse q, puis elle est saturée par la compatibilité de largeur

$$\Xi_{q_2 q_3} = \frac{4 q_2 q_3}{(q_2 + q_3)^2}.$$

Ainsi

$$\boxed{\frac{k_{q_3}}{k_{q_2}} \simeq \frac{q_3}{q_2} \, \Xi_{q_2 q_3}.} \tag{24.15}$$

La métrique du mode co-rotant est

$$\boxed{G_{33}^{\mathrm{br2}}(\gamma) = G_{\chi\chi} + 2\gamma G_{\chi\psi} + \gamma^2 G_{\psi\psi}.} \tag{24.16}$$

24.3.5 Correction diagonale fine et quasi-résonance

Lemme 24.5 (Correction diagonale de raideur fine)**.** *Dans la branche rentrée, le mode T_{q_2} est la composante interne axiale de la séparation fine q_2/q_3, tandis que le mode T_{q_3} est un mode transverse collectif. Le recouvrement fin relève donc la diagonale axiale H_{22}^{br2} par la compatibilité de largeur*

$$\Xi_{q_2q_3} = \frac{4q_2q_3}{(q_2+q_3)^2}.$$

Après retrait de la composante parasite portée par q_3, la fraction efficace est

$$1 - \frac{q_2}{q_3}.$$

Ainsi

$$\boxed{\mathcal{C}_K^{\mathrm{fine}} = 1 + \Xi_{q_2q_3}\left(1 - \frac{q_2}{q_3}\right) + O(e^{-q_2\Delta R_\star}).} \tag{24.17}$$

La quasi-résonance du bloc fin est alors décrite par

$$\boxed{\epsilon = \frac{r-1}{r+1}, \qquad r = \frac{|B_{q_1,zz}(Z_\star)|}{|B_{q_1,\perp\perp}(Z_\star)|}\frac{G_{33}^{\mathrm{br2}}}{G_{22}^{\mathrm{br2}}}\mathcal{C}_K^{\mathrm{fine}}.} \tag{24.18}$$

24.3.6 Échelle fine réduite et forme de la matrice

On définit l'échelle commune du bloc fin par

$$\boxed{M_{\mathrm{fine}} := \frac{m_2+m_3}{2}.} \tag{24.19}$$

La matrice réduite du secteur projectif s'écrit

$$\boxed{\mathcal{M}_{\mathrm{red}} = \begin{pmatrix} \mu_1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 1+\epsilon & \beta \\ 0 & \beta & 1-\epsilon \end{pmatrix}.} \tag{24.20}$$

Les rapports sont

$$\boxed{\alpha = \frac{a_{\mathrm{geom}}}{M_{\mathrm{fine}}}, \qquad \beta = \frac{b_{\mathrm{EM}}}{M_{\mathrm{fine}}}.} \tag{24.21}$$

Le couplage géométrique large–fin est

$$\boxed{a_{\mathrm{geom}} \simeq -2I_3 B'''_{q_1}(Z_\star)\Delta R_\star.} \tag{24.22}$$

Le couplage EM–like projeté du bloc fin est importé du couplage champ–solution :

$$\boxed{b_{\mathrm{EM}} = \frac{\Gamma_{\mathrm{EM}}\,\Xi_{q_2q_3}\,(2/\pi)}{\sqrt{G_{22}^{\mathrm{br2}}G_{33}^{\mathrm{br2}}}}.} \tag{24.23}$$

La fermeture croisée de l'échelle fine demande que les deux routes

$$M_{\mathrm{fine}}^{(\alpha)} = \frac{a_{\mathrm{geom}}}{\alpha}, \qquad M_{\mathrm{fine}}^{(\beta)} = \frac{b_{\mathrm{EM}}}{\beta}$$

coïncident à l'ordre LO du secteur réduit.

24.4 Fenêtres EBK et centres spectraux

Paramètres spectraux communs. On pose

$$\boxed{\Delta_* := \frac{1}{\kappa_\omega}, \qquad r_\Delta := \sqrt{\frac{\Delta_*}{2}}.} \tag{24.24}$$

La constante J_2 est celle du profil canonique $a(\xi) = \operatorname{sech} \xi$, définie dans les chapitres précédents.

Centre spectral de base. Le premier centre spectral résolu du breather 2DOF est défini par

$$\boxed{\ell_{\mathrm{b}} := 2\,\mathrm{round}\left(\frac{J_2}{2r_\Delta}\right).} \tag{24.25}$$

Cette définition projette l'échelle de résolution J_2/r_Δ sur le secteur pair cohérent du composé 2DOF.

Fermeture LO des centres. Au rang LO, les centres spectraux des branches q_i sont définis par

$$\boxed{\ell_q = \ell_{\mathrm{b}} + 4\pi\left(1 - \frac{r_\Delta}{3}\right)\left(q^{1/2+\Delta_*} - 1\right).} \tag{24.26}$$

La largeur EBK associée est

$$\boxed{\sigma_q = \ell_q\, r_\Delta.} \tag{24.27}$$

Fenêtre EBK. La fenêtre spectrale normalisée associée à q est notée

$$\Pi_q(\ell) = \frac{\exp\left[-\dfrac{(\ell - \ell_q)^2}{2\sigma_q^2}\right]}{\left(\sum_{\ell' \geq 0} \exp\left[-\dfrac{(\ell' - \ell_q)^2}{\sigma_q^2}\right]\right)^{1/2}}, \qquad \sum_{\ell \geq 0} \Pi_q(\ell)^2 = 1. \tag{24.28}$$

Centres du triplet. Pour un triplet admissible (q_1, q_2, q_3), on note

$$\ell_i := \ell_{q_i}, \qquad \sigma_i := \sigma_{q_i}, \qquad \Pi_i(\ell) := \Pi_{q_i}(\ell). \tag{24.29}$$

24.5 Médiateurs inter–bandes cohérents

NOGO du recouvrement diagonal. Les fenêtres Π_i peuvent être centrées sur des bandes spectrales séparées. Un couplage strictement diagonal en ℓ,

$$\sum_{\ell} \Pi_i(\ell)\Pi_j(\ell) S_\ell,$$

ne suffit pas, en général, à porter le couplage interne principal du composé. Le composé $\mathcal{C}_{3\times 2}$ requiert une médiation inter–bandes.

Écarts spectraux centraux. On définit

$$L^0_{ij} := |\ell_j - \ell_i|. \tag{24.30}$$

Secteur pair cohérent de préclusion. La préclusion compare deux objets 2DOF complets, donc deux paires de sous-lobes. La composante impaire du médiateur spectral s'annule par échange des deux sous-lobes, tandis que la composante paire reste cohérente. On introduit donc le projecteur

$$\boxed{\mathcal{P}_{\text{even}}(L) = \frac{1 + (-1)^L}{2}.} \tag{24.31}$$

Le noyau de préclusion effectivement lu par le composé est l'enveloppe paire cohérente

$$\boxed{\widehat{G}_L^{(P,\text{coh})} = \mathcal{P}_{\text{even}}(L)\ \left|\widehat{G}_L^{(P)}\right|.} \tag{24.32}$$

Fermeture spectrale du triplet. Les trois médiateurs cohérents ne sont pas indépendants. Ils vérifient la fermeture de triade

$$\boxed{L_{12}^{\text{coh}} + L_{23}^{\text{coh}} = L_{13}^{\text{coh}}.} \tag{24.33}$$

La paire 12, de plus petit écart spectral dans l'ordre $q_1 < q_2 < q_3$, verrouille le premier médiateur pair supérieur :

$$\boxed{L_{12}^{\text{coh}} = 2\left\lceil \frac{L_{12}^0}{2} \right\rceil.} \tag{24.34}$$

On pose ensuite

$$\boxed{L_{13}^{\text{coh}} = 2\,\text{round}\left(\frac{L_{13}^0}{2}\right),} \tag{24.35}$$

puis

$$\boxed{L_{23}^{\text{coh}} = L_{13}^{\text{coh}} - L_{12}^{\text{coh}}.} \tag{24.36}$$

24.6 Orientation interne du composé

Orientations réduites. À chaque branche B_{q_i}, on associe une orientation interne unitaire

$$\mathbf{n}_i, \qquad \|\mathbf{n}_i\| = 1.$$

Le couplage relationnel du composé dépend des produits scalaires $\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_j$.

Fermeture variationnelle des orientations. Les orientations internes du composé sont fixées par l'annulation du résidu vectoriel projeté dans le canal réduit. Les trois branches portent des signes de phase

$$\sigma_1 = +1, \qquad \sigma_2 = +1, \qquad \sigma_3 = -1,$$

ce qui donne la résultante orientée

$$\boxed{\mathbf{R} := \sigma_1\mathbf{n}_1 + \sigma_2\mathbf{n}_2 + \sigma_3\mathbf{n}_3 = \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 - \mathbf{n}_3.} \tag{24.37}$$

Dans la réduction Galerkin, l'énergie d'orientation au LO est le terme quadratique positif associé à cette résultante :

$$\boxed{\mathcal{Q}_{\text{orient}} = \|\mathbf{R}\|^2 = \|\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 - \mathbf{n}_3\|^2, \qquad \|\mathbf{n}_i\| = 1.} \tag{24.38}$$

Cette forme ne repose pas sur une relation de longueur posée séparément : elle est le résidu quadratique de la projection vectorielle. Toute résultante non nulle laisse une charge orientée

non compensée dans le canal réduit ; la fermeture d'orientation LO consiste donc à minimiser $\mathcal{Q}_{\text{orient}}$.

Comme $\mathcal{Q}_{\text{orient}} \geq 0$, son minimum global est atteint dès que le résidu est nul. La condition variationnelle est donc

$$\boxed{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 - \mathbf{n}_3 = 0.} \tag{24.39}$$

La fermeture (24.39) impose

$$\mathbf{n}_3 = \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2.$$

Comme les trois orientations sont unitaires,

$$1 = \|\mathbf{n}_3\|^2 = \|\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2\|^2 = 2 + 2\,\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2,$$

d'où

$$\boxed{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = -\frac{1}{2}.} \tag{24.40}$$

En contractant ensuite $\mathbf{n}_3 = \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2$ avec $\mathbf{n}_1$ et $\mathbf{n}_2$, il vient

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_3 = \mathbf{n}_1 \cdot (\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

et de même

$$\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_3 = \frac{1}{2}.$$

Ainsi

$$\boxed{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_3 = +\frac{1}{2}, \qquad \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_3 = +\frac{1}{2}.} \tag{24.41}$$

La configuration est donc fixée, à rotation globale près, par l'annulation du résidu vectoriel projeté :

$$\boxed{(\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_j)_{12,13,23} = \left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right).} \tag{24.42}$$

Stabilité de la fermeture d'orientation. La conclusion précédente ne dépend pas du choix particulier de la norme euclidienne tant que la fonctionnelle d'orientation est une forme quadratique positive du résidu projeté. Plus généralement, pour tout opérateur symétrique défini positif $\mathcal{M}$,

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{M}} = \langle \mathbf{R}, \mathcal{M}\mathbf{R} \rangle$$

admet le même minimum lorsque la condition réalisable $\mathbf{R} = 0$ est satisfaite. De même, remplacer $\mathcal{Q}_{\text{orient}}$ par une fonction monotone positive de $\|\mathbf{R}\|^2$ ne change pas le minimiseur LO. Le triplet

$$\left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right)$$

est donc stable dans la classe des fermetures isotropes positives qui pénalisent la résultante vectorielle projetée. Les corrections anisotropes ou pondérées relèvent d'un ordre supérieur et ne sont pas consommées dans la fermeture LO du composé.

24.7 Opérateur réduit d'équilibre interne du composé

Forme réduite. Dans la base collective

$$\{B_{q_1}, B_{q_2}, B_{q_3}\},$$

on associe au composé un opérateur réduit d'équilibre interne. On conserve la notation $H_{\mathcal{C}}^{\mathrm{LO}}$, mais cette notation désigne ici une matrice adimensionnée de stabilité interne, et non une énergie absolue ni une masse au carré.

Au rang LO, cet opérateur réduit s'écrit

$$\boxed{H_{\mathcal{C}}^{\mathrm{LO}}(q_1, q_2, q_3) = \begin{pmatrix} E_1 & V_{12} & V_{13} \\ V_{12} & E_2 & V_{23} \\ V_{13} & V_{23} & E_3 \end{pmatrix}.} \tag{24.43}$$

Les coefficients diagonaux E_i sont des détunings internes réduits, définis à une constante commune près. Les coefficients hors diagonale V_{ij} mesurent les couplages réduits entre branches du composé. L'ensemble fixe les organisations cohérentes possibles du système tri–breather, mais ne fixe pas à lui seul une échelle de masse.

La liberté d'ajouter une constante commune aux détunings permet de choisir

$$\boxed{E_1 = 0.} \tag{24.44}$$

Ce choix fixe l'origine interne des détunings ; il ne constitue pas une condition de masse nulle.

Échelle commune de la matrice réduite. La matrice réduite du composé six-bump 2DOF est définie, au LO, à un facteur scalaire commun près. Ce facteur fixe l'échelle absolue des entrées de H_C^{LO}, mais il ne modifie pas les angles internes issus de la diagonalisation réelle, car ceux-ci sont invariants sous la transformation

$$H_C^{\mathrm{LO}} \longmapsto \alpha\, H_C^{\mathrm{LO}}, \qquad \alpha > 0.$$

On choisit comme valeur centrale de normalisation commune

$$\boxed{A_0 = \pi^{3/2}\kappa_\omega^2 \left(1 - \frac{\Delta_*}{2}\right).} \tag{24.45}$$

Cette écriture regroupe trois facteurs de normalisation LO :

$$A_0 = \underbrace{\pi^{3/2}}_{\text{cellule projective}} \underbrace{\kappa_\omega^2}_{\text{plateau spectral}} \underbrace{\left(1 - \frac{\Delta_*}{2}\right)}_{\text{raccord de bord}}.$$

Le facteur $\pi^{3/2}$ est la normalisation de cellule projective utilisée pour l'opérateur réduit 3×2. Le facteur κ_ω^2 provient des deux insertions de résolution spectrale de plateau, avec $\kappa_\omega = \Delta_*^{-1}$. Le facteur $(1 - \Delta_*/2)$ est la fermeture affine de premier ordre du raccord de bord entre les deux sous-lobes ; il retient la perte linéaire de recouvrement sur une demi-largeur réduite.

Stabilité de l'échelle commune. Le facteur de raccord

$$\mathcal{R}_\Delta^{\mathrm{aff}} := 1 - \frac{\Delta_*}{2}$$

est une fermeture LO de bord. Des régularisations voisines ayant le même développement au premier ordre,

$$\mathcal{R}_\Delta^{\mathrm{exp}} := \exp\!\left(-\frac{\Delta_*}{2}\right), \qquad \mathcal{R}_\Delta^{\mathrm{rat}} := \frac{1}{1 + \Delta_*/2},$$

ne diffèrent de $\mathcal{R}_\Delta^{\mathrm{aff}}$ qu'à l'ordre $O(\Delta_*^2)$. Avec $\Delta_* \simeq 1.82 \times 10^{-2}$, cette dispersion est inférieure au pourcent sur l'échelle commune.

Ainsi, (24.45) doit être lu comme une normalisation centrale LO-régularisée de H_C^{LO}. Elle n'affecte pas les angles internes de la réduction projective, mais toute prédiction absolue qui consommerait l'échelle globale de H_C^{LO} hérite de cette incertitude de normalisation.

Réduction des amplitudes de canal. Le breather 2DOF est représenté, dans l'espace interne des deux sous-lobes, par les poids réduits

$$c_+ = +1, \qquad c_- = -1.$$

Le canal EM–like lit la composante dipolaire neutre du doublet. Avec la normalisation projective de ce canal, l'amplitude réduite est

$$A_{\mathrm{EM}} = A_0 \, \frac{c_+ - c_-}{2} = A_0.$$

Le canal de préclusion lit au contraire la contribution paire, quadratique en chaque sous-lobe. Les deux contributions de sous-lobes s'additionnent avec le signe opposé propre au canal de préclusion :

$$A_P = -A_0 \, (c_+^2 + c_-^2) = -2A_0.$$

On obtient donc

$$\boxed{A_P = -2A_0, \qquad A_{\mathrm{EM}} = A_0.} \tag{24.46}$$

Coefficients spectraux de canal. Les couplages inter–branches consomment les coefficients zonaux réduits des canaux EM–like et préclusion. Pour tout médiateur harmonique L, on pose

$$\widehat{G}_L^{(\mathrm{EM})} := \widehat{G}_\ell^{(\mathrm{EM})}\Big|_{\ell=L}, \tag{24.47}$$

et

$$\widehat{G}_L^{(P)} := \widehat{G}_\ell^{(P)}\Big|_{\ell=L}. \tag{24.48}$$

Les coefficients $\widehat{G}_\ell^{(\mathrm{EM})}$ et $\widehat{G}_\ell^{(P)}$ sont les coefficients zonaux des noyaux de canal définis par (20.12)–(20.13). Pour le composé tri–breather, ils sont évalués au médiateur cohérent $L = L_{ij}^{\mathrm{coh}}$, défini par (24.34)–(24.36).

Hors-diagonaux. Les couplages internes inter–branches sont

$$\boxed{V_{ij}^{\mathrm{LO}} = (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_j) A_0 \left[-2 \left| \widehat{G}^{(P)}_{L_{ij}^{\mathrm{coh}}} \right| + \widehat{G}^{(\mathrm{EM})}_{L_{ij}^{\mathrm{coh}}} \right].} \tag{24.49}$$

La notation P désigne ici le canal de préclusion.

Diagonales saturantes. On définit

$$\boxed{\ell_c = \frac{\ell_1}{1 + \frac{3}{2} r_\Delta}, \qquad E_\infty = 4 - r_\Delta \log 6.} \tag{24.50}$$

Pour $i = 2, 3$, les détunings internes sont

$$\boxed{E_i = E_\infty \left[1 - \exp\left(-\frac{\ell_i - \ell_1}{\ell_c} \right) \right].} \tag{24.51}$$

Cette fermeture exprime la perte de cohérence spectrale de la branche i relativement à la branche de base q_1. Le facteur $6 = 3 \times 2$ correspond au nombre de sous-lobes du composé $\mathcal{C}_{3\times 2}$.

Statut dimensionnel. Les coefficients E_i et V_{ij} sont sans dimension. Les valeurs propres de $H_{\mathcal{C}}^{\mathrm{LO}}$ sont donc des niveaux internes réduits du composé. Elles servent à déterminer les modes propres et la matrice de passage interne, mais elles ne sont pas identifiées à des masses ni à des masses au carré.

Une fermeture de masse des modes propres demanderait une échelle dimensionnée supplémentaire et un plancher commun du composé. Ces grandeurs ne sont pas introduites dans la fermeture LO du présent chapitre.

24.8 Modes propres internes

Diagonalisation. Les modes propres internes du composé sont définis par

$$\boxed{H_{\mathcal{C}}^{\mathrm{LO}}(q_1, q_2, q_3)\, U_{\mathcal{C}} = U_{\mathcal{C}} \Lambda_{\mathcal{C}}.} \tag{24.52}$$

Les colonnes de $U_{\mathcal{C}}$ décrivent les modes normaux du composé, c'est-à-dire les organisations cohérentes des trois breathers 2DOF couplés. Dans chaque mode propre, les trois branches $B_{q_1}, B_{q_2}, B_{q_3}$ participent avec des amplitudes relatives déterminées par le vecteur propre correspondant.

La matrice $U_{\mathcal{C}}$ est donc la matrice de passage entre la base collective $\{B_{q_i}\}$ et la base des modes propres internes du composé. Les valeurs propres rassemblées dans $\Lambda_{\mathcal{C}}$ sont des niveaux réduits de stabilité interne ; elles ne sont pas, à ce stade, des masses dimensionnées.

Angles internes. Lorsque $U_{\mathcal{C}}$ est paramétrée par trois rotations réelles au LO, on note les angles internes

$$\vartheta_{12}(q_1, q_2, q_3), \qquad \vartheta_{13}(q_1, q_2, q_3), \qquad \vartheta_{23}(q_1, q_2, q_3).$$

Ces angles caractérisent uniquement la diagonalisation du composé $\mathcal{C}_{3\times 2}(q_1, q_2, q_3)$. Leur interprétation dans une base de lecture externe appartient à un chapitre de correspondance séparé.

Portée. Le présent chapitre ne fixe aucun triplet numérique (q_1, q_2, q_3). Il définit la construction paramétrique du composé $\mathcal{C}_{3\times 2}$, sa branche spinorielle minimale, son opérateur réduit d'équilibre interne et ses modes propres. Les évaluations obtenues après insertion d'un triplet numérique relèvent d'une section d'évaluation séparée.

La fermeture présentée ici détermine l'existence réduite LO du composé, son secteur spinoriel minimal, la structure interne du couplage entre les trois breathers 2DOF, et la matrice de passage vers ses modes propres. Elle ne constitue pas une fermeture de masse absolue des modes propres du composé.

Chapitre 25

Bi–soliton du quasi-c_t 2DOF : prototype de la branche quasi-c_t

Outre la solution solitonique à un lobe (8.6), l'équation d'enveloppe focalisante admet des configurations *à deux centres liés* (bi–solitons), dans lesquelles deux centres localisés distincts appartiennent à une même solution composée globale sur $\mathbb{S}^3$ et forment une branche liée.

25.1 Ansatz bi–solitonique et liaison

Une configuration symétrique co–mobile s'écrit

$$A_{2\ell}(S,T) = A_0\Big[\operatorname{sech}\Big(\tfrac{S-S_0-VT}{\lambda_{\rm env}}\Big)\, e^{+i\frac{\phi}{2}} + \operatorname{sech}\Big(\tfrac{S+S_0+VT}{\lambda_{\rm env}}\Big)\, e^{-i\frac{\phi}{2}}\Big]\,, \tag{25.1}$$

où ϕ est la phase relative entre les deux centres localisés et $2S_0$ leur séparation lente.

Le recouvrement des queues induit un potentiel effectif de liaison $U_{\rm int}(2S_0)$ qui sélectionne la séparation et verrouille la branche composée. Dans la branche liée, la configuration retenue vérifie

$$\phi \simeq 0,$$

tandis que $\phi \simeq \pi$ correspond à une configuration anti-liée.

Fermeture géométrique sur $\mathbb{S}^3$. Sur la sphère compacte, la géométrie naturelle d'une configuration à deux centres distincts portée par une même grande géodésique est la fermeture antipodale. On introduit ainsi la demi–séparation géométrique s_0 par

$$\boxed{2s_0 \simeq \pi R_0, \qquad S_0 = \varepsilon\, s_0\,.} \tag{25.2}$$

Cette relation doit être lue comme la *géométrie candidate de fermeture globale* de la branche à deux centres : elle exprime la compatibilité antipodale sur $\mathbb{S}^3$, sans préjuger encore d'une démonstration complète du verrouillage dynamique de la séparation.

Le bi–soliton est alors décrit comme une branche collective à deux centres, paramétrée par une amplitude, une phase relative et une fréquence porteuse communes (A_0, ϕ, ω_0). Dans cette lecture, la cohérence de la branche peut subsister même lorsque la séparation des deux centres devient grande devant leur largeur propre.

25.2 Solution mécanique complète à deux centres

La solution HSM complète correspondante s'écrit

$$\psi(x,t) \;\approx\; \varepsilon\, A_{2\ell}(S,T)\, e^{i(qs-\omega_0 t)}, \qquad \begin{cases} u_1 = A_{2\ell}\cos(qs-\omega_0 t), \\ u_2 = A_{2\ell}\sin(qs-\omega_0 t), \end{cases} \tag{25.3}$$

avec $q \simeq \omega_0/c_t$.

Cette écriture montre explicitement les masses tournant à la porteuse $e^{-i\omega_0 t}$ sous une enveloppe à deux centres. La dynamique lente est décrite par un petit nombre de paramètres collectifs (A_0, ϕ, S_0, V), de sorte que les deux centres constituent une **branche composée à deux centres** plutôt que deux objets indépendants.

25.3 Lien spectral global : structure dipolaire $\ell = 1$ sur $\mathbb{S}^3$

Indépendamment de la description quasi-propagative locale, la géométrie spectrale de $\mathbb{S}^3$ fait apparaître au rang $\ell = 1$ la plus basse structure non triviale à deux pôles opposés. La valeur propre associée est

$$\lambda_1 = \frac{3}{R_0^2}.$$

Restreinte à une grande géodésique paramétrée par $s = R_0\psi$, la dépendance géométrique naturelle d'un dipôle est proportionnelle à

$$\cos\psi = \cos\Big(\frac{s}{R_0}\Big),$$

ce qui exhibe deux extrémums de signe opposé aux points antipodaux.

La conclusion robuste utile ici est donc la suivante : une configuration à deux centres localisés, séparés d'environ une demi-circonférence, est géométriquement compatible avec la structure globale dipolaire $\ell = 1$ de $\mathbb{S}^3$. Cette compatibilité fixe la *lecture globale* de la solution, sans imposer à ce stade une identification unidimensionnelle plus forte.

On obtient ainsi deux lectures complémentaires d'un même objet mécanique sur $\mathbb{S}^3$:

— une **lecture locale** : solution composée à deux centres localisés ;

— une **lecture globale** : fermeture dipolaire de rang $\ell = 1$ à deux anti-nœuds antipodaux.

Conclusion. Le bi–soliton du quasi-c_t 2DOF constitue ainsi un **support mécanique à deux centres** compatible avec la géométrie globale de $\mathbb{S}^3$. Ce chapitre établit la cohérence de cette structure à deux lobes ; la construction d'états cohérents sur le doublet interne H/V, et l'interprétation corrélée qui en découle, relèvent d'une étape distincte construite ensuite sur ce support.

25.4 Résultat de structure : support quasi-c_t à deux centres

Objectif. Le présent chapitre n'a pas pour objet de construire directement l'état corrélé de type H/V, mais d'établir le *support mécanique* sur lequel une telle construction pourra ensuite reposer. On isole donc ici le résultat utile à la suite : l'existence d'une lecture cohérente à deux centres pour la branche quasi-c_t 2DOF.

Proposition 25.1 (Support à deux centres pour la branche quasi-c_t)**.** *Dans le secteur quasi-c_t 2DOF, la structure définie par l'ansatz bi–localisé* (25.1) *et sa reconstruction mécanique* (25.3) *fournit un* ***support à deux centres localisés*** *compatible avec la fermeture antipodale* (25.2) *et avec la lecture dipolaire globale $\ell = 1$ sur $\mathbb{S}^3$.*

En particulier, cette structure :

1. *décrit deux centres localisés distincts appartenant à une même branche collective ;*
2. *admet une reconstruction mécanique unique à porteuse commune ω_0 ;*
3. *est compatible avec une lecture globale à deux anti-nœuds antipodaux ;*

4. *fournit ainsi le support géométrique et mécanique minimal d'une branche quasi-c_t à deux lobes.*

Justification. L'ansatz (25.1) exhibe explicitement deux profils localisés distincts, de séparation lente $2S_0$, partageant une même amplitude de branche, une même porteuse et une même phase relative. La reconstruction (25.3) montre que ces deux centres ne sont pas deux objets indépendants, mais les deux composantes spatiales d'une même solution HSM à enveloppe lente.

La fermeture antipodale (25.2) fournit la géométrie naturelle de cette branche sur $\mathbb{S}^3$. Enfin, la lecture spectrale de la section 25.3 établit que cette configuration est compatible avec la structure dipolaire globale $\ell = 1$, c'est-à-dire avec la plus basse structure non triviale à deux pôles opposés sur $\mathbb{S}^3$. L'ensemble fixe donc le statut de la solution comme support cohérent à deux centres. □

Portée pour la suite. La proposition 25.1 ne construit pas encore l'état corrélé lui-même, mais elle fixe exactement les ingrédients mécaniques nécessaires au chapitre suivant.

Premièrement, les deux bras spatiaux A et B sont les deux lobes d'une *même* solution HSM, et non deux paquets indépendants préparés séparément. Deuxièmement, ce même support à deux lobes admet, dans le plan tangent 2DOF, deux orientations internes orthogonales dégénérées, notées H et V, portées par la même enveloppe bi–localisée et la même porteuse ω_0. On peut donc définir, sur un unique support spatial à deux lobes, les deux configurations $|HH\rangle$ et $|VV\rangle$.

Le chapitre suivant pourra alors construire la superposition cohérente

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HH\rangle + e^{i\Delta}|VV\rangle),$$

puis étudier l'action de filtres locaux sur chaque lobe. La violation de type CHSH ne reposera donc pas sur deux objets indépendants, mais sur la cohérence interne H/V d'un *seul* mode quasi-c_t à deux lobes mécaniquement verrouillés.

25.5 Expérience théorique CHSH sur le bi–soliton du quasi-c_t 2DOF : préparation

Objectif. On considère le bi–soliton du quasi-c_t 2DOF comme **solution composée unique** à deux centres sur $\mathbb{S}^3$. Le but est de définir, à partir de cette solution, une expérience théorique de type CHSH fondée sur des **projections locales binaires** effectuées sur chacun des deux centres.

Références externes. La terminologie CHSH renvoie à l'inégalité de Clauser–Horne–Shimony–Holt [6]. La borne $2\sqrt{2}$ utilisée comme repère de comparaison est la borne de Cirel'son–Tsirelson [7]. Dans la présente section, ces résultats ne sont pas postulés comme ingrédients dynamiques de HSM : ils servent uniquement de langage de comparaison pour la corrélation calculée à partir de la solution bi–solitonique quasi-c_t.

Idée directrice. Dans le cadre HSM, les deux centres du bi–soliton ne sont pas deux objets indépendants mis en interaction, mais deux maxima localisés d'une **même solution globale**. Les corrélations théoriques attendues doivent donc être lues comme la conséquence de cette cohérence globale, et non comme le résultat d'un échange retardé entre deux sous-systèmes séparés.

25.5.1 État support : bi–soliton à deux centres

On part de la solution mécanique complète du bi–soliton du quasi-c_t 2DOF :

$$\psi(x,t) \;\approx\; \varepsilon\, A_{2\ell}(S,T)\, e^{i(qs-\omega_0 t)}, \qquad \begin{cases} u_1 = A_{2\ell}\cos(qs-\omega_0 t), \\ u_2 = A_{2\ell}\sin(qs-\omega_0 t), \end{cases} \tag{25.4}$$

où l'enveloppe $A_{2\ell}$ possède deux centres localisés le long d'une grande géodésique.

On note x_A et x_B les deux centres du bi–soliton. Ils définissent les deux **bras théoriques de mesure** de l'expérience CHSH :

$$A \equiv x_A, \qquad B \equiv x_B.$$

25.5.2 Structure interne locale et base de polarisation

Au voisinage de chacun des deux centres, la solution 2DOF vit dans un plan interne réel engendré par les deux composantes tangentielles (u_1, u_2). Conformément à la structure à deux composantes du secteur quasi-c_t 2DOF, on considère dans ce plan un doublet orthonormé d'orientations internes dégénérées

$$\mathbf{e}_H, \qquad \mathbf{e}_V, \qquad \mathbf{e}_H \cdot \mathbf{e}_V = 0,$$

interprété comme une **base de polarisation interne**. Les deux états H et V correspondent alors à une même enveloppe bi–localisée portée par deux orientations internes orthogonales du même support mécanique.

Le bi–soliton composé définit ainsi un même état interne global, lisible localement sur chacun des deux centres dans cette base (H, V).

25.5.3 Réglages locaux, filtres et observables binaires

Pour chaque bras, on introduit un réglage angulaire :

$$a \text{ au bras } A, \qquad b \text{ au bras } B.$$

À l'angle a, on définit les directions locales

$$|a,+\rangle = \cos a\,|H\rangle + \sin a\,|V\rangle, \qquad |a,-\rangle = -\sin a\,|H\rangle + \cos a\,|V\rangle. \tag{25.5}$$

De même, à l'angle b,

$$|b,+\rangle = \cos b\,|H\rangle + \sin b\,|V\rangle, \qquad |b,-\rangle = -\sin b\,|H\rangle + \cos b\,|V\rangle. \tag{25.6}$$

Physiquement, un filtre local orienté selon a (resp. b) sépare la composante interne locale en deux voies orthogonales $(+)$ et $(-)$. Si $|\eta_A\rangle$ désigne l'état interne normalisé au bras A, les intensités projetées sont

$$I_{A,\pm}(a) = |\langle a,\pm|\eta_A\rangle|^2, \qquad I_{A,+}(a) + I_{A,-}(a) = 1,$$

et de même au bras B,

$$I_{B,\pm}(b) = |\langle b,\pm|\eta_B\rangle|^2, \qquad I_{B,+}(b) + I_{B,-}(b) = 1.$$

La lecture binaire idéale consiste alors à affecter la valeur $+1$ à la voie $(+)$ et la valeur -1 à la voie $(-)$. Dans l'écriture opératorielle correspondante, on introduit les projecteurs

$$\Pi_{a,\pm} = |a,\pm\rangle\langle a,\pm|, \qquad \Pi_{b,\pm} = |b,\pm\rangle\langle b,\pm|,$$

et les observables binaires

$$A(a) := \Pi_{a,+} - \Pi_{a,-}, \qquad B(b) := \Pi_{b,+} - \Pi_{b,-}. \tag{25.7}$$

Par construction,

$$A(a)^2 = B(b)^2 = \mathbf{1},$$

et les résultats élémentaires de mesure sont bien ± 1.

25.5.4 État corrélé réduit de référence

Le bi–soliton fournit d'abord un support mécanique unique : les deux centres A et B sont deux lobes d'une même solution globale, et non deux états préparés indépendamment. Dans le plan interne 2DOF, la dégénérescence des deux orientations orthogonales H et V permet de restreindre la lecture locale au sous-espace à deux niveaux engendré par

$$|H\rangle, \qquad |V\rangle.$$

Dans cette réduction, les deux configurations

$$|H\rangle_A|H\rangle_B, \qquad |V\rangle_A|V\rangle_B$$

représentent deux lectures internes cohérentes du même support bi–localisé.

Configuration modale réduite idéale. Pour l'expérience théorique CHSH, on considère la composante réduite idéale de la solution bi–solitonique dans le sous-espace modal $(H,V)_A \otimes (H,V)_B$:

$$\Psi_{\mathrm{red}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|H\rangle_A|H\rangle_B + e^{i\Delta}|V\rangle_A|V\rangle_B\Big), \tag{25.8}$$

où Δ est la phase relative globale entre les deux lectures internes.

Cette écriture n'est pas utilisée ici comme état quantique postulé d'un système à deux particules indépendantes. Elle est la coordonnée modale réduite d'une solution HSM globale à deux centres, projetée sur les deux orientations internes dégénérées H et V. Le facteur $1/\sqrt{2}$ exprime la configuration idéale symétrique entre ces deux orientations dégénérées.

La règle de lecture employée dans cette expérience mathématique est la règle de Born appliquée à la composante modale réduite : la probabilité d'une issue de filtre est le rapport entre la norme quadratique de la composante projetée et la norme quadratique totale de la composante réduite. Dans cette section, cette règle est un postulat de lecture effectif. Elle n'est pas dérivée de la dynamique classique locale du champ HSM. Cette règle n'est pas une factorisation locale de type variable cachée $P_{\sigma\tau}(a,b) = P_\sigma(a,\lambda)P_\tau(b,\lambda)$; elle interroge une solution globale non factorisable.

Dans le cas idéal cohérent, la référence de phase est choisie de sorte que

$$\Delta = 0. \tag{25.9}$$

Les écarts à cette cohérence idéale sont traités plus bas par le facteur de visibilité, cf. (25.21).

Statut du calcul CHSH. Le calcul qui suit établit un énoncé conditionnel : si la solution HSM bi–solitonique est représentée par la composante réduite non factorisable Ψ_{red}, et si cette composante est lue par la règle de Born effective (25.10), alors les projections binaires locales produisent la corrélation calculée ci-dessous.

Le résultat ne doit donc pas être lu comme une violation de CHSH par un champ classique local muni d'un readout local classique. Dans un tel readout, les issues binaires seraient des fonctions locales du champ et d'une cause commune, et la borne de Bell classique $S \le 2$ s'appliquerait. La valeur $2\sqrt{2}$ obtenue plus bas est celle de la lecture de Born sur la composante modale non factorisable ; elle n'est pas une conséquence d'une factorisation locale du champ.

25.5.5 Corrélation théorique

Pour des issues $\sigma, \tau \in \{+, -\}$, on définit les projecteurs modaux locaux

$$\Pi_\sigma^A(a), \qquad \Pi_\tau^B(b),$$

associés aux deux sorties orthogonales des filtres locaux. Les probabilités de coïncidence sont définies par la norme quadratique HSM projetée :

$$P_{\sigma\tau}(a,b) := \frac{\left\| \Pi_\sigma^A(a)\Pi_\tau^B(b)\Psi_{\mathrm{red}} \right\|_{\mathrm{HSM}}^2}{\|\Psi_{\mathrm{red}}\|_{\mathrm{HSM}}^2}. \tag{25.10}$$

Cette équation est la règle de Born pour la composante modale réduite. Elle définit le readout utilisé dans l'expérience mathématique de cette section. Elle ne décrit pas un readout classique local fondé sur l'intensité ou sur la valeur ponctuelle du champ aux deux centres.

La corrélation binaire associée aux réglages a et b est alors

$$E(a,b) := P_{++}(a,b) + P_{--}(a,b) - P_{+-}(a,b) - P_{-+}(a,b). \tag{25.11}$$

Cette quantité est la brique de base de l'expérience théorique CHSH.

Une fois $E(a,b)$ calculée, on introduira quatre réglages

$$a, \quad a', \quad b, \quad b'$$

et la combinaison

$$S = E(a,b) - E(a,b') + E(a',b) + E(a',b'). \tag{25.12}$$

25.5.6 Portée de la construction

La présente section fixe seulement la **préparation** de l'expérience théorique CHSH :

— choix de la solution support ;

— identification des deux bras de mesure ;

— définition des réglages locaux ;

— définition des observables binaires ;

— définition de la corrélation $E(a,b)$.

Le calcul explicite de $E(a,b)$, puis de la combinaison S, sera effectué dans la section suivante.

25.6 Expérience théorique CHSH sur le bi–soliton du quasi-c_t 2DOF : corrélation et inégalité

Objectif. On calcule maintenant les probabilités de coïncidence obtenues par projection modale quadratique de la solution réduite Ψ_{red}, puis la corrélation

$$E(a,b) = P_{++}(a,b) + P_{--}(a,b) - P_{+-}(a,b) - P_{-+}(a,b).$$

On en déduit ensuite la combinaison de CHSH.

25.6.1 Observables locales dans la base (H, V)

Dans la base $(|H\rangle, |V\rangle)$, les états locaux

$$|a,+\rangle = \cos a\,|H\rangle + \sin a\,|V\rangle, \qquad |a,-\rangle = -\sin a\,|H\rangle + \cos a\,|V\rangle$$

définissent les deux projecteurs modaux de sortie

$$\Pi^A_+(a) = |a,+\rangle\langle a,+|, \qquad \Pi^A_-(a) = |a,-\rangle\langle a,-|.$$

De même, au bras B,

$$\Pi^B_+(b) = |b,+\rangle\langle b,+|, \qquad \Pi^B_-(b) = |b,-\rangle\langle b,-|.$$

Ces projecteurs ne sont pas introduits comme observables quantiques fondamentales : ils représentent les deux sorties mécaniques orthogonales d'un filtre de polarisation interne dans le plan (H, V).

25.6.2 État corrélé global

On rappelle la composante modale réduite introduite en (25.8) :

$$\Psi_{\mathrm{red}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|H\rangle_A|H\rangle_B + e^{i\Delta}|V\rangle_A|V\rangle_B\Big). \tag{25.13}$$

Le cas idéal cohérent correspond à

$$\Delta = 0. \tag{25.14}$$

25.6.3 Calcul explicite de la corrélation

Les amplitudes modales projetées sont

$$C_{\sigma\tau}(a,b) := \langle a,\sigma|_A\langle b,\tau|_B\,\Psi_{\mathrm{red}}\rangle.$$

Elles valent

$$\begin{aligned}
C_{++} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos a\cos b + e^{i\Delta}\sin a\sin b\right),\\
C_{--} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin a\sin b + e^{i\Delta}\cos a\cos b\right),\\
C_{+-} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\cos a\sin b + e^{i\Delta}\sin a\cos b\right),\\
C_{-+} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\sin a\cos b + e^{i\Delta}\cos a\sin b\right).
\end{aligned}$$

La règle de lecture quadratique donne

$$P_{\sigma\tau}(a,b) = |C_{\sigma\tau}(a,b)|^2.$$

On obtient alors

$$\boxed{E(a,b) = \cos(2a)\cos(2b) + \cos\Delta\,\sin(2a)\sin(2b).} \tag{25.15}$$

Calcul direct. En sommant les probabilités projetées avec les signes binaires,

$$E(a,b) = P_{++} + P_{--} - P_{+-} - P_{-+},$$

les termes de norme donnent $\cos(2a)\cos(2b)$, tandis que les termes d'interférence entre les deux composantes modales globales donnent $\cos\Delta\,\sin(2a)\sin(2b)$. On obtient donc (25.15). □

Cas idéal cohérent. Lorsque $\Delta = 0$, la corrélation se simplifie en

$$\boxed{E(a,b) = \cos\bigl(2(a-b)\bigr).} \tag{25.16}$$

Probabilités associées. Dans ce cas idéal,

$$P_{\text{même}}(a,b) = \cos^2(a-b), \qquad P_{\text{diff}}(a,b) = \sin^2(a-b). \tag{25.17}$$

25.6.4 Combinaison CHSH

Pour quatre réglages a, a', b, b', on définit

$$S = E(a,b) - E(a,b') + E(a',b) + E(a',b'). \tag{25.18}$$

Choix optimal standard. Avec le choix

$$a = 0, \qquad a' = \frac{\pi}{4}, \qquad b = \frac{\pi}{8}, \qquad b' = \frac{3\pi}{8}, \tag{25.19}$$

et la corrélation idéale (25.16), on obtient

$$\boxed{|S| = 2\sqrt{2}.} \tag{25.20}$$

Calcul. On a successivement

$$E(a,b) = \cos\Bigl(2\Bigl(0 - \frac{\pi}{8}\Bigr)\Bigr) = \cos\Bigl(-\frac{\pi}{4}\Bigr) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$E(a,b') = \cos\Bigl(2\Bigl(0 - \frac{3\pi}{8}\Bigr)\Bigr) = \cos\Bigl(-\frac{3\pi}{4}\Bigr) = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$E(a',b) = \cos\Bigl(2\Bigl(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8}\Bigr)\Bigr) = \cos\Bigl(\frac{\pi}{4}\Bigr) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$E(a',b') = \cos\Bigl(2\Bigl(\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{8}\Bigr)\Bigr) = \cos\Bigl(-\frac{\pi}{4}\Bigr) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Donc

$$S = \frac{\sqrt{2}}{2} - \Bigl(-\frac{\sqrt{2}}{2}\Bigr) + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}.$$

□

25.6.5 Déphasage relatif, visibilité et effet sur CHSH

Si la phase relative globale Δ fluctue d'une préparation à l'autre, on introduit le facteur de cohérence

$$\Gamma := \langle e^{i\Delta} \rangle. \tag{25.21}$$

Dans le cas où la distribution de Δ est symétrique et centrée, on peut choisir la référence de phase de sorte que Γ soit réel et positif ; on définit alors

$$\Gamma = V \in [0,1].$$

La corrélation moyenne devient

$$E(a,b) = \cos(2a)\cos(2b) + V\,\sin(2a)\sin(2b). \tag{25.22}$$

Remarque importante. L'expression (25.22) décrit un *déphasage relatif* entre les composantes $|HH\rangle$ et $|VV\rangle$. Elle ne doit pas être confondue avec un modèle isotrope de contraste réduit de la forme

$$E_{\mathrm{iso}}(a,b) = V\,\cos\bigl(2(a-b)\bigr),$$

qui correspond à une hypothèse plus forte d'atténuation uniforme de toute la corrélation.

Valeur CHSH pour les angles standards. En conservant les réglages (25.19), on obtient directement

$$S_{\mathrm{std}}(V) = \sqrt{2}\,(1+V). \tag{25.23}$$

En particulier,

$$S_{\mathrm{std}}(1) = 2\sqrt{2}, \qquad S_{\mathrm{std}}(0) = \sqrt{2}.$$

Avec ce choix standard d'angles, la violation CHSH, au sens de la lecture de Born effective définie en (25.10), subsiste donc dès que

$$V > \sqrt{2} - 1. \tag{25.24}$$

Cas du modèle isotrope. Si l'on adopte à la place le modèle simplifié

$$E_{\mathrm{iso}}(a,b) = V\,\cos\bigl(2(a-b)\bigr),$$

alors la borne CHSH correspondante vaut

$$|S|^{(\mathrm{iso})}_{\max} = 2\sqrt{2}\,V, \tag{25.25}$$

et la violation CHSH, au sens de cette lecture de Born effective, subsiste si et seulement si

$$V > \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{25.26}$$

Cette dernière écriture ne doit donc être utilisée que pour ce *modèle isotrope* et non pour le déphasage relatif exact (25.22).

25.6.6 Marges locales et non-signalisation

Quelle que soit la valeur de Δ, les probabilités marginales obtenues par sommation des coïncidences projetées valent

$$P_A(+|a) = P_{++}(a,b) + P_{+-}(a,b) = \frac{1}{2}, \qquad P_A(-|a) = \frac{1}{2},$$

et

$$P_B(+|b) = P_{++}(a,b) + P_{-+}(a,b) = \frac{1}{2}, \qquad P_B(-|b) = \frac{1}{2}.$$

Elles ne dépendent donc pas du réglage distant. Les corrélations du bi–soliton à deux lobes modifient les coïncidences, mais pas les marges locales.

25.6.7 Interprétation HSM

Lecture physique dans HSM. Dans le présent cadre, la violation théorique de CHSH ne provient pas de deux objets indépendants qui échangeraient un signal ou un champ retardé. Elle ne provient pas non plus d'un modèle local à variable cachée attachant à chaque centre un résultat prédéfini. Elle résulte de la projection modale quadratique d'une même solution HSM globale à deux centres.

Les deux centres x_A et x_B sont spatialement séparés, mais ils ne sont pas traités ici comme deux sous-systèmes préparés indépendamment. Ils sont deux lectures locales d'une même composante modale globale Ψ_{red}. Les filtres locaux sélectionnent deux bases de sortie dans le plan interne (H,V), puis les coïncidences sont calculées par projection de la solution globale sur ces sorties.

Conséquence conceptuelle. L'expérience théorique CHSH du bi–soliton du quasi-c_t 2DOF montre donc qu'une composante modale réduite non factorisable, associée à une solution HSM globale à deux centres, reproduit les corrélations de type Bell lorsqu'elle est lue par la règle de Born effective. Elle ne démontre pas qu'un readout classique local du champ HSM viole les inégalités de Bell. Ce résultat ne doit pas être lu comme une violation de CHSH par un modèle local à cause commune ; il repose sur la non-factorisation de la solution réduite et sur la règle de projection quadratique des modes.

Conclusion. Dans le cas idéal cohérent $\Delta = 0$, la composante réduite du bi–soliton du quasi-c_t 2DOF, lue par la règle de Born effective (25.10), conduit à la loi de corrélation

$$E(a, b) = \cos 2(a - b)$$

et atteint la valeur

$$|S| = 2\sqrt{2}.$$

Le statut de ce résultat est donc conditionnel : il établit que la solution HSM à deux centres peut porter la structure modale algébrique des corrélations quantiques si elle est lue selon la règle de Born. Il ne constitue pas, en l'état, une dérivation de la violation de Bell depuis un readout classique local du champ HSM. Un readout classique local du même support relèverait du cadre de Bell à cause commune et serait borné par $S \leq 2$.

Chapitre 26

Bi–bump 2DOF à onde commune : prototype de la branche bump composée

Position du problème. On cherche ici un objet distinct du bi–soliton du quasi-c_t 2DOF. Le *bi–bump 2DOF à onde commune* est conçu comme une **solution composée unique** de l'équation fondamentale HSM, possédant deux centres localisés, spatialement distincts, mais portés par une même structure spectrale globale sur $\mathbb{S}^3$.

Autrement dit, on ne cherche ni une simple superposition

$$\Psi_{B,1} + \Psi_{B,2}$$

de deux bumps indépendants, ni une interaction retardée entre deux objets séparés, mais une **solution globale à deux centres**, dont les deux bumps sont deux maxima d'un même champ bouclé sur $\mathbb{S}^3$.

26.1 Préambule spectral : contrainte de parité pour l'onde commune sur $\mathbb{S}^3$

Point de départ. Le bump 2DOF unitaire possède un cœur local radial et un extérieur faible défini sur $\mathbb{S}^3$. Dans l'étude du bi–bump, le point nouveau n'est donc pas la présence d'un extérieur spectral, mais la possibilité qu'une **même composante globale** soutienne simultanément deux centres localisés.

Mode $\ell = 1$ et parité antipodale. Le mode zonal fondamental non trivial

$$Y_{100}(\psi) \;\propto\; C_1^{(1)}(\cos\psi) \;\propto\; \cos\psi, \tag{26.1}$$

vérifie

$$-\Delta_{\mathbb{S}^3} Y_{100} = \frac{3}{R_0^2}\, Y_{100}. \tag{26.2}$$

Il possède deux anti-nœuds opposés sur $\mathbb{S}^3$, mais il est *impair* sous l'antipodie : si $\iota : x \mapsto \bar{x}$ désigne l'involution antipodale, alors

$$Y_{100} \circ \iota = -\,Y_{100}.$$

Conséquence pour le bi–bump. Dans une branche à deux centres antipodaux, la compatibilité avec Y_{100} dépend donc de la *parité de la combinaison des deux cœurs* :

— la combinaison **symétrique**

$$\Phi_{\mathrm{sym}}(x) := \Phi_B(r_+(x)) + \Phi_B(r_-(x))$$

est antipodalement *paire* ;

— la combinaison **antisymétrique**

$$\Phi_{\mathrm{odd}}(x) := \Phi_B(r_+(x)) - \Phi_B(r_-(x))$$

est antipodalement *impaire*.

Ainsi, Y_{100} ne peut pas servir d'onde commune à une branche *symétrique* à deux bumps de même signe, mais il constitue au contraire le candidat naturel pour une branche *antisymétrique* à deux centres.

Lecture retenue. L'idée directrice correcte devient donc :

deux cœurs locaux de type bump	+	un mode global Y_{100} de même parité	$\Longrightarrow$	solution com

Le bi–bump recherché n'est donc pas pensé comme deux bumps indépendants mis en relation par un transport de champ, mais comme deux maxima localisés d'une **même structure spectrale globale**, à condition que la parité du mode commun soit compatible avec la branche considérée.

26.2 Définition du bi–bump à onde commune

On appellera **bi–bump 2DOF à onde commune** toute solution stationnaire ou quasi-stationnaire Ψ_{2B} de l'équation fondamentale HSM telle que :

1. Ψ_{2B} possède **deux centres localisés** x_+ et x_- sur $\mathbb{S}^3$;
2. au voisinage de chacun de ces centres, le profil local est de type bump 2DOF ;
3. Ψ_{2B} est une **solution unique globale** et non la juxtaposition de deux solutions indépendantes ;
4. les deux centres partagent une **même composante spectrale globale**, compatible avec la parité de la branche composée considérée sur $\mathbb{S}^3$.

Cette dernière propriété est essentielle : sur $\mathbb{S}^3$, les modes sont bouclés et peuvent soutenir simultanément plusieurs maxima localisés d'une même solution, à condition que leur structure de parité soit compatible avec la branche composée considérée.

26.3 Note de doctrine : cœur local radial et onde globale commune

Principe. Dans la branche bump, il faut distinguer deux niveaux de description :

1. le **cœur local**, qui reste de type bump, centré et radial au voisinage d'un point donné de $\mathbb{S}^3$;
2. l'**extérieur faible**, qui se développe sur les modes globaux de $\mathbb{S}^3$ et peut donc porter une structure spectrale commune à plusieurs centres.

Autrement dit, la radialité du bump vaut pour le *cœur local* et ne doit pas être confondue avec la structure globale complète de la solution sur $\mathbb{S}^3$.

Conséquence. Le *no-go* portant sur un bump *purement radial* n'interdit pas l'existence d'un **bi–bump à onde commune**. Il signifie seulement qu'un tel objet ne peut pas être obtenu en restant dans la seule branche radiale du cœur. Pour obtenir deux centres localisés dans une même solution, il faut adjoindre au cœur bump une composante spectrale globale commune sur $\mathbb{S}^3$, compatible avec la parité de la branche composée considérée.

Lecture retenue. La doctrine adoptée dans la suite est donc la suivante :

cœur bump local radial	+	mode global partagé sur $\mathbb{S}^3$, de parité compatible	$\Longrightarrow$	solution co

Dans cette lecture, les deux centres d'un bi–bump ne sont pas deux objets indépendants qui s'influencent à distance, mais deux maxima localisés d'une **même solution globale** bouclée sur $\mathbb{S}^3$.

Portée. La présente section fixe le problème correct d'existence du bi-bump 2DOF à onde commune : il s'agit d'une solution globale à deux centres antipodaux couplée à une onde commune, et non d'une simple superposition de deux bumps indépendants. Elle fixe en revanche la doctrine correcte : le bi–bump, s'il existe, n'est ni un bump purement radial, ni une simple somme de deux bumps indépendants, mais une **solution composée globale** dont la cohérence est portée par une onde commune sur $\mathbb{S}^3$.

26.3.1 Compatibilité cinématique du bi-soliton Bump 2DOF

Deux têtes massiques. Le bi-soliton Bump 2DOF est constitué de deux cœurs Bump 2DOF localisés. Chaque tête possède son propre repère comobile, son énergie propre et son impulsion longitudinale. On note leurs centres

$$s_1(t), \qquad s_2(t),$$

et l'on introduit les coordonnées collectives

$$S(t) = \frac{s_1(t) + s_2(t)}{2}, \qquad d(t) = s_2(t) - s_1(t).$$

La variable S décrit le mouvement global du bi-soliton, tandis que d décrit la séparation interne des deux têtes.

Cinématique des têtes individuelles. Chaque tête Bump 2DOF relève du cadre des solutions localisées massiques de §7.1. Pour la tête i, lorsque sa dynamique longitudinale est réduite au cœur massique comobile, on a

$$E_i(u_i) = \Gamma_i E_{i,0}, \qquad P_i(u_i) = \Gamma_i \frac{u_i}{c_t^2} E_{i,0}, \qquad \Gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1 - u_i^2/c_t^2}},$$

avec

$$u_i = \dot{s}_i, \qquad i = 1, 2.$$

Cette écriture s'applique aux deux têtes séparément. Elle ne suppose pas que le bi-soliton complet possède déjà un unique repère comobile.

Sous-régime composé verrouillé. Lorsque la séparation interne est fixe ou adiabatique,

$$d(t) = d_0 \qquad \text{ou} \qquad |\dot{d}| \ll |\dot{S}|,$$

le bi-soliton peut être décrit, au rang considéré, par un mouvement global de centre $S(t)$. Dans ce sous-régime, le composé possède un repère comobile effectif et une énergie propre totale

$$E_{\mathrm{bi},0} = E_{1,0} + E_{2,0} + E_{\mathrm{int}}(d_0),$$

où $E_{\mathrm{int}}(d_0)$ désigne l'énergie interne de liaison ou d'interaction à séparation donnée. La loi de boost du composé s'écrit alors

$$E_{\mathrm{bi}}(U) = \Gamma_U E_{\mathrm{bi},0}, \qquad P_{\mathrm{bi}}(U) = \Gamma_U \frac{U}{c_t^2} E_{\mathrm{bi},0}, \qquad \Gamma_U = \frac{1}{\sqrt{1 - U^2/c_t^2}},$$

avec

$$U = \dot{S}.$$

Régime à deux mouvements indépendants. Lorsque les deux têtes possèdent des vitesses indépendantes,

$$u_1 \neq u_2,$$

ou lorsque la séparation $d(t)$ devient une variable dynamique non négligeable, le bi-soliton ne se réduit pas à un unique cœur massique. Sa cinématique est alors celle d'un système à deux corps :

$$E_{\mathrm{bi}} = E_1(u_1) + E_2(u_2) + E_{\mathrm{int}}(d, \dot{d}, \ldots),$$

et non celle d'une particule unique de type

$$E_{\mathrm{bi}} = \Gamma E_{\mathrm{bi},0}.$$

La loi de boost du chapitre cinématique s'applique alors aux têtes individuelles, tandis que la dynamique relative doit être traitée par les variables collectives (S, d).

Compatibilité radiale. Chaque tête Bump 2DOF porte une source radiale localisée. Le critère de gaine comobile (7.3) s'applique donc séparément à chaque tête :

$$|u_i| < c_r, \qquad c_r^2 = \kappa_r c_t^2, \qquad i = 1, 2.$$

Dans le sous-régime verrouillé, la source totale du composé est une somme finie de sources localisées à séparation fixe. Elle reste localisée dans la coordonnée comobile du centre S, et la gaine globale strictement comobile est localisée pour

$$|U| < c_r.$$

Dans le régime à deux mouvements indépendants, il n'existe pas en général une gaine unique de la forme $R(s - Ut)$. La réponse radiale doit alors être lue comme la superposition, éventuellement couplée, des réponses associées aux deux sources mobiles.

Portée. Le bi-soliton Bump 2DOF n'est donc pas automatiquement une particule massique unique. Il le devient seulement dans le sous-régime composé où les deux têtes partagent un mouvement global et une séparation interne contrôlée. Hors de ce sous-régime, la cinématique correcte est celle de deux solitons massiques couplés.

26.4 Ansatz à deux centres et onde commune

On note $\Psi_B(x; x_0)$ un bump 2DOF localisé autour du centre x_0. Le problème n'est pas de poser

$$\Psi_{2B}(x) = \Psi_B(x; x_+) + \Psi_B(x; x_-)$$

comme somme libre, mais de chercher un ansatz composé de la forme

$$\Psi_{2B}(x) = a_+(x)\,\Psi_B(x; x_+) + a_-(x)\,\Psi_B(x; x_-) + \eta(x), \tag{26.3}$$

où :

— x_+ et x_- sont les deux centres géodésiques ;

— $a_\pm(x)$ représentent les poids locaux des deux cœurs ;

— $\eta(x)$ est la **composante commune globale**, responsable de la cohérence de l'ensemble.

Le terme η n'est pas un correctif négligeable : il porte précisément l'onde commune qui fait du bi–bump une solution globale et non un état à deux objets indépendants.

26.5 Formulation du problème d'existence

Soit l'équation fondamentale HSM, sous forme symbolique,

$$\mathcal{F}[\Psi; \omega_0, \kappa_\mu, \kappa_r, \ldots] = 0. \tag{26.4}$$

Le problème d'existence du bi–bump consiste à établir qu'il existe des paramètres

$$(x_+, x_-, \omega_0, \ldots)$$

et une correction globale η tels que l'ansatz (26.3) satisfasse l'équation (26.4).

Cette question peut être reformulée en termes variationnels : si $E[\Psi]$ désigne le fonctionnel d'énergie HSM, on cherche une branche critique de E dans la classe des champs à deux centres,

$$\delta E[\Psi_{2B}] = 0,$$

avec stabilité locale vis-à-vis des variations de séparation, de phase et de contenu spectral.

26.6 Rôle de la géométrie de $\mathbb{S}^3$

Le point clé est que, sur $\mathbb{S}^3$, les ondes sont **bouclées**. La compacité de la géométrie permet donc qu'une même structure spectrale globale porte deux maxima localisés, sans qu'il soit nécessaire d'introduire un transport de champ entre deux objets indépendants.

Le bi–bump recherché doit ainsi être compris comme

$$\text{cœurs locaux de type bump} \quad + \quad \text{mode global partagé sur } \mathbb{S}^3.$$

Dans cette lecture, les deux centres peuvent être éloignés l'un de l'autre, y compris à l'échelle de l'antipode, tout en restant deux composantes d'une même solution globale.

26.7 Critère directeur

Le critère directeur d'existence d'un bi–bump à onde commune est donc le suivant :

Il existe un bi–bump 2DOF à onde commune si l'équation fondamentale HSM admet une solution globale à deux centres dont chaque centre est localement de type bump, et dont la cohérence globale est assurée par une composante spectrale commune sur $\mathbb{S}^3$, compatible avec la parité de la branche composée considérée.

Ce critère fixe la branche admissible du problème de relèvement : seule la branche anti-symétrique est compatible avec le mode commun Y_{100}. Il fixe en revanche le bon problème mathématique et distingue clairement le bi–bump à onde commune :

— d'une simple somme de deux bumps indépendants ;

— d'un état composite gouverné uniquement par une interaction extérieure ;

— d'un bi–soliton quasi-c_t, dont la construction passe par une réduction d'enveloppe.

26.8 Programme de dérivation

Pour établir effectivement l'existence d'un bi–bump à onde commune, il faudra :

1. identifier la décomposition spectrale du bump 2DOF sur $\mathbb{S}^3$;
2. déterminer quelles composantes globales, de parité compatible, peuvent être communes à deux centres localisés ;
3. construire l'ansatz corrigé (26.3) ;
4. injecter cet ansatz dans l'équation fondamentale ou dans le fonctionnel d'énergie ;
5. montrer l'existence d'une branche critique stable à deux centres.

Statut. La présente section fixe donc le **cadre exact du problème d'existence**. Elle établit la notion correcte de bi-bump dans HSM : une branche à deux centres antipodaux couplée à une onde commune impaire.

26.9 Critère-cadre de la branche bump composée

Objectif. On cherche à formuler un critère théorique d'existence pour les solutions composées de la branche bump, dont le bi–bump 2DOF à onde commune constitue le premier cas. Il ne s'agit donc pas d'un théorème d'universalité sur toutes les familles HSM, mais d'un critère-cadre propre à la branche bump composée.

Proposition 26.1 (Critère-cadre pour une branche bump composée)**.** *Soit une famille de bumps HSM. Supposons qu'il existe :*

1. ***Un bump local de référence.*** *Une solution localisée $\Psi_B(x; x_0)$ centrée en x_0, de type bump.*
2. ***Une décomposition spectrale globale compatible.*** *Une décomposition de Ψ_B sur les modes propres de $\mathbb{S}^3$, telle qu'il existe un sous-espace spectral global non trivial pouvant soutenir simultanément deux maxima localisés en deux centres distincts x_+ et x_-.*
3. ***Un ansatz à deux centres avec onde commune.*** *Un champ de la forme*

$$\Psi_{2B}(x) = a_+(x)\,\Psi_B(x; x_+) + a_-(x)\,\Psi_B(x; x_-) + \eta(x), \tag{26.5}$$

où $\eta(x)$ est une composante globale commune, non réductible à la simple somme de deux bumps indépendants.

4. ***Une fermeture par l'équation fondamentale.*** *Il existe des paramètres géométriques et spectraux*

$$(x_+, x_-, \omega_0, \ldots)$$

tels que Ψ_{2B} *satisfasse l'équation fondamentale HSM*

$$\mathcal{F}[\Psi_{2B}; \omega_0, \kappa_\mu, \kappa_r, \ldots] = 0. \tag{26.6}$$

5. ***Une stabilité locale à deux centres.*** *Dans la classe des champs à deux centres,* Ψ_{2B} *est un point critique stable du fonctionnel d'énergie HSM : il existe une distance géodésique* $d_* = d(x_+, x_-)$ *pour laquelle la branche correspondante est localement stable.*

Alors il existe une branche de ***solutions bump composées à onde commune****, constituée de deux centres localisés de type bump, mais formant une* ***solution unique globale*** *sur* $\mathbb{S}^3$*. Le bi–bump 2DOF est le premier représentant de cette branche.*

Justification. Le bump local Ψ_B fournit la brique élémentaire localisée autour de chaque centre. La décomposition spectrale globale sur $\mathbb{S}^3$ permet d'identifier un sous-espace de modes bouclés capable de porter deux maxima localisés. L'ansatz (26.5) introduit alors explicitement les deux centres (x_+, x_-) ainsi que la composante commune η, responsable de la cohérence globale de la solution.

La condition (26.6) assure que l'on ne traite pas une simple superposition approximative de deux bumps indépendants, mais bien une solution effective de l'équation fondamentale. Enfin, la stabilité locale dans la classe à deux centres sélectionne une branche composée robuste. Les deux centres sont alors deux maxima localisés d'une même solution globale, et non deux objets autonomes mis en interaction. □

Interprétation. La Proposition 26.1 ne dit pas que tout bump engendre automatiquement un bi–bump. Elle fixe le critère-cadre : dès qu'une *onde commune globale* peut soutenir deux centres de type bump et que l'ansatz correspondant se referme sur l'équation fondamentale, on obtient une **solution composée unique** à deux centres.

Point clé géométrique. Le rôle de $\mathbb{S}^3$ est essentiel : la compacité de la géométrie impose des modes bouclés, de sorte qu'une même structure spectrale globale peut porter simultanément deux maxima localisés. La liaison n'a donc pas à être interprétée comme un transport retardé de champ entre deux objets indépendants, mais comme la cohérence d'une même onde globale.

Portée. La proposition précédente est un critère-cadre. Elle fixe la bonne notion de solution bump composée à onde commune, et le bon programme de preuve : identifier le sous-espace spectral partagé, construire η, puis fermer l'ansatz à deux centres sur l'équation fondamentale HSM.

Corollaire 26.2 (Programme de dérivation effectif)**.** *Pour établir effectivement l'existence d'un bi–bump 2DOF à onde commune, il suffit de :*

1. *déterminer la décomposition spectrale du bump 2DOF sur* $\mathbb{S}^3$ *;*
2. *identifier les composantes globales communes compatibles avec deux centres ;*
3. *construire explicitement la correction* η *dans* (26.5) *;*
4. *vérifier la fermeture sur* (26.6) *;*
5. *établir la stabilité locale de la branche à deux centres.*

26.10 Ansatz spectral du bi–bump 2DOF à onde commune

Cœurs locaux. Soit $\Phi_B(r)$ le profil local du bump 2DOF unitaire, avec $r_\pm(x) = d(x, x_\pm)$ pour deux centres x_+ et x_- antipodaux sur $\mathbb{S}^3$.

Deux combinaisons naturelles. On introduit les deux superpositions

$$\Phi_{\mathrm{sym}}(x) := \Phi_B(r_+(x)) + \Phi_B(r_-(x)), \qquad \Phi_{\mathrm{odd}}(x) := \Phi_B(r_+(x)) - \Phi_B(r_-(x)). \tag{26.7}$$

Sous l'antipodie $\iota : x \mapsto \bar{x}$, on a

$$\Phi_{\mathrm{sym}} \circ \iota = \Phi_{\mathrm{sym}}, \qquad \Phi_{\mathrm{odd}} \circ \iota = -\Phi_{\mathrm{odd}}.$$

Obstruction exacte pour la branche symétrique. Le mode global Y_{100} étant antipodalement impair, on obtient immédiatement

$$\boxed{\langle \Phi_{\mathrm{sym}}, Y_{100} \rangle_{\mathbb{S}^3} = 0.} \tag{26.8}$$

Ainsi, la branche *symétrique* à deux bumps de même signe ne peut pas se coupler à Y_{100} : elle ne constitue donc pas la bonne branche pour une onde commune de type $\ell = 1$.

Branche retenue. On retient en revanche la **branche antisymétrique**

$$\Psi_{2B}(x,t) = e^{-i\omega_0 t}\Big[A_B\,\Phi_{\mathrm{odd}}(x) + A_{\mathrm{ext}}\,Y_{100}(x)\Big]. \tag{26.9}$$

Cette branche est la plus naturelle pour un couplage à Y_{100}, puisque Φ_{odd} et Y_{100} ont la même parité.

26.11 Projection réduite sur la branche antisymétrique

Problème stationnaire réduit. On note $\mathcal{L}_{\omega_0}$ l'opérateur stationnaire linéarisé associé à la fréquence ω_0, et $\mathcal{N}$ les termes non linéaires / de fermeture. L'équation fondamentale s'écrit symboliquement

$$\mathcal{L}_{\omega_0}\Psi + \mathcal{N}[\Psi] = 0. \tag{26.10}$$

On projette ce problème sur le sous-espace réduit

$$\mathcal{B}_{\mathrm{red}}^{(-)} := \mathrm{span}\{\Phi_{\mathrm{odd}}, Y_{100}\}.$$

Système réduit. On obtient le système

$$\begin{pmatrix} \mathcal{M}_{BB}(\omega_0) & \mathcal{M}_{BY}(\omega_0) \\ \mathcal{M}_{YB}(\omega_0) & \mathcal{M}_{YY}(\omega_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_B \\ A_{\mathrm{ext}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{N}_B(A_B, A_{\mathrm{ext}}) \\ \mathcal{N}_Y(A_B, A_{\mathrm{ext}}) \end{pmatrix} = 0, \tag{26.11}$$

avec

$$\mathcal{M}_{YB} = \mathcal{M}_{BY}, \qquad \mathcal{N}_B, \mathcal{N}_Y = \mathcal{O}(\|(A_B, A_{\mathrm{ext}})\|^2).$$

Bloc global. Le mode Y_{100} vérifie

$$-\Delta_{\mathbb{S}^3} Y_{100} = \frac{3}{R_0^2} Y_{100},$$

donc, dans la partie extérieure linéarisée,

$$\mathcal{M}_{YY}(\omega_0) = \Big(\frac{3c_t^2}{R_0^2} - \omega_0^2\Big)\,\|Y_{100}\|_{\mathbb{S}^3}^2. \tag{26.12}$$

On introduit la fréquence critique extérieure

$$\omega_{\mathrm{ext}} := \frac{\sqrt{3}\,c_t}{R_0}. \tag{26.13}$$

26.12 Couplage effectif de la branche antisymétrique au mode Y_{100}

Recouvrement non nul. Dans la branche antisymétrique, on a

$$\mathcal{M}_{BY}(\omega_0) = \langle \Phi_{\text{odd}},\, \mathcal{L}_{\omega_0} Y_{100} \rangle_{\mathbb{S}^3} = \Big(\frac{3c_t^2}{R_0^2} - \omega_0^2 \Big) \langle \Phi_{\text{odd}}, Y_{100} \rangle_{\mathbb{S}^3}. \tag{26.14}$$

Proposition 26.3 (Non-annulation du recouvrement antisymétrique)**.** *Si le cœur bump Φ_B est fortement localisé autour de chacun des deux centres antipodaux, alors*

$$\boxed{\langle \Phi_{\text{odd}}, Y_{100} \rangle_{\mathbb{S}^3} > 0} \tag{26.15}$$

pour le choix de phase où $Y_{100}(x_+) = +1$ et $Y_{100}(x_-) = -1$.

Démonstration. Au voisinage de x_+, le mode Y_{100} vaut

$$Y_{100}(x) = Y_{100}(x_+) + \mathcal{O}(r_+^2/R_0^2) = 1 + \mathcal{O}(r_+^2/R_0^2),$$

tandis qu'au voisinage de x_-,

$$Y_{100}(x) = Y_{100}(x_-) + \mathcal{O}(r_-^2/R_0^2) = -1 + \mathcal{O}(r_-^2/R_0^2).$$

Comme $\Phi_B \geq 0$ et est localisée près de chacun des centres, on définit

$$I_B := \int_{\mathbb{S}^3} \Phi_B(r_+)\, dV > 0.$$

Par symétrie antipodale, on a alors

$$\int_{\mathbb{S}^3} \Phi_B(r_-)\, dV = I_B,$$

et l'on obtient

$$\langle \Phi_{\text{odd}}, Y_{100} \rangle_{\mathbb{S}^3} = 2I_B + \mathcal{O}\Big(I_B\, \frac{\ell_B^2}{R_0^2} \Big).$$

En particulier,

$$\langle \Phi_{\text{odd}}, Y_{100} \rangle_{\mathbb{S}^3} > 0 \qquad \text{pour } \ell_B \ll R_0,$$

où ℓ_B désigne l'échelle de localisation du cœur bump.

□

Développement au voisinage du seuil. En posant

$$\delta := \omega_0 - \omega_{\text{ext}},$$

on a

$$\mathcal{M}_{YY}(\omega_0) = -2\omega_{\text{ext}}\, \|Y_{100}\|_{\mathbb{S}^3}^2\, \delta + \mathcal{O}(\delta^2), \tag{26.16}$$

et

$$\mathcal{M}_{BY}(\omega_0) = -2\omega_{\text{ext}}\, \langle \Phi_{\text{odd}}, Y_{100} \rangle_{\mathbb{S}^3}\, \delta + \mathcal{O}(\delta^2). \tag{26.17}$$

26.13 Bloc local bump et coefficient effectif

Bloc unitaire du bump. Le profil local Φ_B du bump 2DOF satisfait l'équation stationnaire locale déjà établie plus haut pour la branche bump. Si $\mathcal{L}_B$ désigne le linéarisé local au voisinage de Φ_B, on a

$$\mathcal{L}_B \Phi_B = 2\, \beta_{\text{loc}}\, \Phi_B^3$$

avec $\beta_{\text{loc}} > 0$. Par conséquent,

$$\mathcal{M}_B^{(\text{unit})} := \langle \Phi_B, \mathcal{L}_B \Phi_B \rangle = 2\beta_{\text{loc}} \int \Phi_B^4\, dV > 0. \tag{26.18}$$

Bloc local de la branche antisymétrique. On en déduit

$$\mathcal{M}_{BB}(\omega_0) = 2\,\mathcal{M}_B^{(\mathrm{unit})}(\omega_0) - 2\,\mathcal{M}_{\mathrm{ov}}(\omega_0), \tag{26.19}$$

où $\mathcal{M}_{\mathrm{ov}}$ est le recouvrement entre les deux cœurs. Dans le régime de localisation forte et de séparation antipodale,

$$\mathcal{M}_{\mathrm{ov}}(\omega_0) = \mathcal{O}\big(e^{-\pi R_0/\ell_B}\big),$$

donc

$$\boxed{\mathcal{M}_{BB}(\omega_{\mathrm{ext}}) \neq 0.} \tag{26.20}$$

Coefficient effectif. On peut alors éliminer localement A_B et introduire

$$\Lambda_{\mathrm{eff}}(\omega_0) := \mathcal{M}_{YY}(\omega_0) - \frac{\mathcal{M}_{YB}(\omega_0)\mathcal{M}_{BY}(\omega_0)}{\mathcal{M}_{BB}(\omega_0)}. \tag{26.21}$$

Comme $\mathcal{M}_{YY} = \mathcal{O}(\delta)$ et $\mathcal{M}_{BY}\mathcal{M}_{YB} = \mathcal{O}(\delta^2)$, on obtient

$$\Lambda_{\mathrm{eff}}(\omega_0) = -2\omega_{\mathrm{ext}}\,\|Y_{100}\|_{\mathbb{S}^3}^2\,\delta + \mathcal{O}(\delta^2). \tag{26.22}$$

Le coefficient effectif change donc bien de signe au voisinage de ω_{ext}.

26.14 Lemme local de non–dégénérescence du bump 2DOF

Rôle dans la preuve. La présente section fournit la seule brique locale supplémentaire nécessaire au relèvement complet de la branche antisymétrique du bi–bump 2DOF à onde commune. Elle ne concerne pas le bump unitaire comme solution isolée, mais uniquement le contrôle du *bloc local bump* dans la réduction à deux centres.

Cadre local. Dans la calotte tangentielle quasi–plane, le profil stationnaire local du bump 2DOF vérifie l'équation

$$-\Phi_B''(s) + \Omega_0^2\,\Phi_B(s) - \beta_{\mathrm{loc}}\,\Phi_B(s)^3 = 0, \qquad \Omega_0 > 0, \quad \beta_{\mathrm{loc}} > 0, \tag{26.23}$$

avec solution

$$\Phi_B(s) = A_0\,\operatorname{sech}(\Omega_0 s), \qquad A_0^2 = \frac{2\Omega_0^2}{\beta_{\mathrm{loc}}}. \tag{26.24}$$

Linéarisés réel et de phase. On introduit les opérateurs

$$L_+ := -\partial_s^2 + \Omega_0^2 - 3\beta_{\mathrm{loc}}\,\Phi_B^2, \tag{26.25}$$

$$L_- := -\partial_s^2 + \Omega_0^2 - \beta_{\mathrm{loc}}\,\Phi_B^2. \tag{26.26}$$

Lemme 26.4 (Non–dégénérescence locale du cœur bump)**.** *Les opérateurs L_+ et L_- vérifient :*

1. $$\ker L_- = \operatorname{span}\{\Phi_B\}; \tag{26.27}$$

2. $$\ker L_+ = \operatorname{span}\{\Phi_B'\}; \tag{26.28}$$

3. *L_- est strictement positif sur l'orthogonal de Φ_B dans $L^2(\mathbb{R})$;*
4. *L_+ possède une unique direction négative simple, un noyau simple engendré par Φ_B', et est strictement positif sur*

$$X_+ := \Big\{u \in H^1(\mathbb{R})\,;\ \langle u, \Phi_B\rangle_{L^2} = 0,\ \langle u, \Phi_B'\rangle_{L^2} = 0\Big\}. \tag{26.29}$$

En particulier, il existe $c_-, c_+ > 0$ tels que

$$\langle v, L_- v\rangle_{L^2} \geq c_- \, \|v\|_{H^1}^2 \qquad \forall v \in H^1(\mathbb{R}),\ \langle v, \Phi_B\rangle_{L^2} = 0, \tag{26.30}$$

et

$$\langle u, L_+ u\rangle_{L^2} \geq c_+ \, \|u\|_{H^1}^2 \qquad \forall u \in X_+. \tag{26.31}$$

Démonstration. On introduit la variable réduite $y = \Omega_0 s$. Avec

$$\Phi_B(s) = A_0 \operatorname{sech}(\Omega_0 s), \qquad A_0^2 = \frac{2\Omega_0^2}{\beta_{\mathrm{loc}}},$$

on obtient

$$L_- = \Omega_0^2\Big(-\partial_y^2 + 1 - 2\,\operatorname{sech}^2 y\Big), \tag{26.32}$$

$$L_+ = \Omega_0^2\Big(-\partial_y^2 + 1 - 6\,\operatorname{sech}^2 y\Big). \tag{26.33}$$

Ce sont les opérateurs de Pöschl–Teller standards [8]. Les propriétés spectrales nécessaires au relèvement sont rappelées ci-dessous.

Pour L_-, le spectre discret se réduit à la valeur propre 0, d'eigenfonction $\operatorname{sech} y$, ce qui donne $\ker L_- = \operatorname{span}\{\Phi_B\}$, puis la positivité stricte sur son orthogonal.

Pour L_+, l'invariance par translation du profil impose

$$L_+ \Phi_B' = 0,$$

donc $\Phi_B' \in \ker L_+$. Le spectre exact de $-\partial_y^2 + 1 - 6\operatorname{sech}^2 y$ possède en outre une unique valeur propre négative simple, et aucune autre valeur propre nulle. Ainsi, $\ker L_+$ est exactement engendré par Φ_B', et le sous-espace positif est de codimension 2.

Enfin, l'unique eigenfonction négative de L_+ est paire (et proportionnelle à $\operatorname{sech}^2(\Omega_0 s)$), donc elle a un recouvrement non nul avec $\Phi_B(s) \propto \operatorname{sech}(\Omega_0 s)$. Elle ne peut donc appartenir à X_+. Les estimations coercives (26.30)–(26.31) suivent alors du gap spectral et de l'ellipticité de $L_\pm$. □

Corollaire 26.5 (Bloc local complexe coercif modulo phase et translation)**.** *Pour une perturbation complexe $\eta = u + i\,v$, on définit*

$$\mathcal{Q}_B[\eta] := \langle u, L_+ u\rangle_{L^2} + \langle v, L_- v\rangle_{L^2}. \tag{26.34}$$

Alors il existe $c_B > 0$ tel que

$$\mathcal{Q}_B[\eta] \geq c_B\Big(\|u\|_{H^1}^2 + \|v\|_{H^1}^2\Big) \tag{26.35}$$

pour toute perturbation satisfaisant

$$\langle u, \Phi_B\rangle_{L^2} = 0, \qquad \langle u, \Phi_B'\rangle_{L^2} = 0, \qquad \langle v, \Phi_B\rangle_{L^2} = 0. \tag{26.36}$$

Démonstration. On applique séparément le lemme 26.4 à la partie réelle et à la partie imaginaire. □

Usage pour le bi–bump. Dans la branche antisymétrique à centres antipodaux fixés, les modes de translation et de phase du cœur local sont précisément les modes neutres à éliminer dans la réduction de Lyapunov–Schmidt [9]. Le corollaire précédent fournit donc la coercivité locale requise sur le bloc bump, avant prise en compte du couplage faible entre les deux cœurs.

26.15 Bifurcation locale supercritique au niveau du système réduit

Structure paire de l'énergie réduite. Dans la branche bump 2DOF, l'énergie réduite est paire en (A_B, A_{ext}), car elle provient de termes quadratiques de gradient / élasticité et d'une fermeture locale dépendant de $|\Psi|^2$. Après élimination locale de A_B, l'énergie effective s'écrit donc

$$E_{\text{eff}}(A_{\text{ext}};\omega_0) = \frac{1}{2}\,\Lambda_{\text{eff}}(\omega_0)\,A_{\text{ext}}^2 + \frac{1}{4}\,\Gamma_4(\omega_0)\,A_{\text{ext}}^4 + \mathcal{O}(A_{\text{ext}}^6). \tag{26.37}$$

Positivité du quartique réduit. Le coefficient Γ_4 reçoit :

— une contribution $\Gamma_4^{(\text{loc})} > 0$ issue de la convexité locale de la fermeture bump ($V''(0) > 0$) ;

— une contribution $\Gamma_4^{(\text{grad})} \geq 0$ issue du coût minimal en gradients / préclusion.

Ainsi

$$\boxed{\Gamma_4(\omega_0) > 0} \tag{26.38}$$

au voisinage du seuil.

Équation scalaire réduite. La condition stationnaire $\partial_{A_{\text{ext}}} E_{\text{eff}} = 0$ donne

$$\Lambda_{\text{eff}}(\omega_0)\,A_{\text{ext}} + \Gamma_4(\omega_0)\,A_{\text{ext}}^3 + \mathcal{O}(A_{\text{ext}}^5) = 0. \tag{26.39}$$

Proposition 26.6 (Bifurcation locale supercritique de la branche antisymétrique)**.** *Sous les hypothèses précédentes, le système réduit admet une branche non triviale locale de solutions antisymétriques à deux centres, bifurquant au voisinage de*

$$\omega_{\text{ext}} = \frac{\sqrt{3}\,c_t}{R_0}.$$

Cette bifurcation est supercritique *:*

$$|A_{\text{ext}}(\omega_0)| \asymp |\omega_0 - \omega_{\text{ext}}|^{1/2}, \qquad |A_B(\omega_0)| \asymp |\omega_0 - \omega_{\text{ext}}|^{1/2}, \tag{26.40}$$

du côté du seuil où $\Lambda_{\text{eff}}(\omega_0) < 0$, c'est-à-dire localement pour

$$\omega_0 > \omega_{\text{ext}}$$

au rang dominant.

Démonstration. Le développement (26.22) donne un changement de signe transverse de Λ_{eff}. La positivité (26.38) donne alors la forme normale supercritique de (26.39). Il existe donc une branche non triviale de solutions réduites, d'amplitude

$$A_{\text{ext}}^2 = -\frac{\Lambda_{\text{eff}}(\omega_0)}{\Gamma_4(\omega_0)} + \mathcal{O}(\Lambda_{\text{eff}}^2),$$

ce qui implique la loi d'échelle (26.40). □

26.16 Relèvement complet de la branche antisymétrique

Objectif. On veut maintenant relever la branche locale obtenue au niveau du système réduit en une branche locale effective de solutions de l'équation fondamentale HSM, dans la classe antisymétrique à centres antipodaux fixés.

Champ réduit. On note

$$\Psi_{\mathrm{red}}(x,t) = e^{-i\omega_0 t}\Big[A_B(\omega_0)\,\Phi_{\mathrm{odd}}(x) + A_{\mathrm{ext}}(\omega_0)\,Y_{100}(x)\Big], \tag{26.41}$$

où $(A_B(\omega_0), A_{\mathrm{ext}}(\omega_0))$ est la branche réduite locale donnée par la proposition 26.6.

Décomposition antisymétrique. On travaille dans le sous-espace

$$L^2_{\mathrm{odd}}(\mathbb{S}^3) := \{u \in L^2(\mathbb{S}^3)\,;\, u\circ\iota = -u\},$$

et l'on introduit

$$\mathcal{E}^{(-)}_{\mathrm{red}} := \mathrm{span}\{\Phi_{\mathrm{odd}},\, Y_{100}\}, \qquad L^2_{\mathrm{odd}}(\mathbb{S}^3) = \mathcal{E}^{(-)}_{\mathrm{red}} \oplus \mathcal{E}^{(-)}_{\mathrm{comp}}. \tag{26.42}$$

On cherche une solution exacte sous la forme

$$\Psi(x,t) = \Psi_{\mathrm{red}}(x,t) + \xi(x,t), \qquad \xi \in \mathcal{E}^{(-)}_{\mathrm{comp}}. \tag{26.43}$$

Bloc local bump. La coercivité locale nécessaire au relèvement est fournie par le corollaire 26.5. Autrement dit, une fois déterminés le centre et la phase de chaque cœur local, la forme quadratique locale du bump 2DOF est strictement positive sur le complément des modes neutres. Cette propriété sera utilisée ci-dessous pour obtenir l'inversibilité du bloc complémentaire après ajout du couplage faible entre les deux cœurs et du mode global Y_{100}.

Gap spectral extérieur. Dans le sous-espace antisymétrique, le premier mode global critique est Y_{100}, de valeur propre

$$\lambda_1 = \frac{3}{R_0^2}.$$

Le mode impair suivant correspond à $\ell = 3$, donc

$$\lambda_3 = \frac{15}{R_0^2}, \qquad \lambda_3 - \lambda_1 = \frac{12}{R_0^2}.$$

Il existe donc $c_{\mathrm{ext}} > 0$ tel que, pour ω_0 assez proche de ω_{ext}, la partie extérieure du linéarisé soit coercive sur le complément antisymétrique de Y_{100} :

$$\langle u, \mathcal{L}_{\omega_0} u\rangle \geq c_{\mathrm{ext}}\|u\|^2_{L^2} \qquad \text{sur } \mathcal{E}^{(-)}_{\mathrm{comp}} \cap \{Y_{100}\}^{\perp}. \tag{26.44}$$

Faiblesse du recouvrement inter–cœurs. Les deux cœurs étant antipodaux et fortement localisés, le recouvrement direct de leurs queues est exponentiellement petit :

$$\mathcal{M}_{\mathrm{ov}} = \mathcal{O}\big(e^{-\pi R_0/\ell_B}\big). \tag{26.45}$$

Par conséquent, le linéarisé complet dans la classe antisymétrique est une perturbation petite du bloc diagonal “cœur local + mode global”.

Opérateur complémentaire. On note

$$\mathcal{L}_{\mathrm{comp}} := \Pi^{(-)}_{\mathrm{comp}} D\mathcal{F}(\Psi_{\mathrm{red}})\big|_{\mathcal{E}^{(-)}_{\mathrm{comp}}}. \tag{26.46}$$

La coercivité locale du bump, le gap spectral extérieur et la petitesse du recouvrement impliquent alors l'existence d'une constante $c_{\mathrm{comp}} > 0$ telle que

$$\|\mathcal{L}^{-1}_{\mathrm{comp}}\| \leq c^{-1}_{\mathrm{comp}} \tag{26.47}$$

dans un voisinage du seuil.

Résidu du champ réduit. Comme Ψ_{red} satisfait le système projeté sur $\mathcal{E}_{\mathrm{red}}^{(-)}$, le résidu

$$\mathfrak{R}_{\mathrm{red}} := \mathcal{F}[\Psi_{\mathrm{red}}]$$

vérifie

$$\Pi_{\mathrm{red}}^{(-)}\mathfrak{R}_{\mathrm{red}} = 0.$$

Sa composante complémentaire est d'ordre supérieur :

$$\|\Pi_{\mathrm{comp}}^{(-)}\mathfrak{R}_{\mathrm{red}}\| \leq C_{\mathrm{red}}\,|A_{\mathrm{ext}}|^3. \tag{26.48}$$

Les termes provenant du recouvrement direct des deux cœurs sont absorbés dans cette borne, grâce à (26.45).

Équation de point fixe. On écrit

$$\mathcal{F}[\Psi_{\mathrm{red}} + \xi] = \mathfrak{R}_{\mathrm{red}} + D\mathcal{F}(\Psi_{\mathrm{red}})[\xi] + \mathcal{R}(\xi),$$

où $\mathcal{R}(\xi) = \mathcal{O}(\|\xi\|^2)$. Après projection sur $\mathcal{E}_{\mathrm{comp}}^{(-)}$, on obtient

$$\xi = -\mathcal{L}_{\mathrm{comp}}^{-1}\Pi_{\mathrm{comp}}^{(-)}\mathfrak{R}_{\mathrm{red}} - \mathcal{L}_{\mathrm{comp}}^{-1}\Pi_{\mathrm{comp}}^{(-)}\mathcal{R}(\xi). \tag{26.49}$$

Pour $|A_{\mathrm{ext}}|$ assez petit, cette application est contractante sur une petite boule de $\mathcal{E}_{\mathrm{comp}}^{(-)}$.

Théorème 26.7 (Relèvement local complet de la branche antisymétrique)**.** *Sous les hypothèses suivantes :*

1. *la coercivité locale du cœur bump donnée par le corollaire 26.5 ;*
2. *la localisation forte des deux cœurs bump ;*
3. *la validité de la branche réduite locale donnée par la proposition 26.6 ;*
4. *la régularité locale de la non-linéarité HSM ;*

il existe un voisinage de ω_{ext} dans lequel la branche réduite antisymétrique se relève en une branche locale effective de solutions de l'équation fondamentale HSM, de la forme

$$\Psi_*(x,t) = \Psi_{\mathrm{red}}(x,t) + \xi_*(x,t), \qquad \xi_* \in \mathcal{E}_{\mathrm{comp}}^{(-)}, \tag{26.50}$$

avec l'estimation

$$\|\xi_*\| = \mathcal{O}(|A_{\mathrm{ext}}|^3). \tag{26.51}$$

En particulier, la branche antisymétrique à deux centres couplée à Y_{100} définit une ***branche locale complète*** *de solutions HSM.*

Démonstration. La branche réduite fournit Ψ_{red}. Le corollaire 26.5 donne la coercivité locale sur le bloc bump, tandis que le gap spectral extérieur fournit la coercivité sur le complément de Y_{100}. La petitesse du recouvrement inter–cœurs préserve donc l'inversibilité de $\mathcal{L}_{\mathrm{comp}}$ sur $\mathcal{E}_{\mathrm{comp}}^{(-)}$.

Le résidu du champ réduit vérifie

$$\|\Pi_{\mathrm{comp}}^{(-)}\mathfrak{R}_{\mathrm{red}}\| \leq C_{\mathrm{red}}|A_{\mathrm{ext}}|^3,$$

d'après (26.48). Le reste non linéaire est quadratique en ξ. L'équation projetée sur le complément s'écrit donc sous la forme de point fixe (26.49). Pour $|A_{\mathrm{ext}}|$ assez petit, la boule

$$\|\xi\| \leq C|A_{\mathrm{ext}}|^3$$

est stable par cette application, et la constante de Lipschitz du terme quadratique est strictement inférieure à 1. Le théorème du point fixe de Banach donne alors un unique $\xi_* \in \mathcal{E}^{(-)}_{\mathrm{comp}}$.

Par construction,

$$\Pi^{(-)}_{\mathrm{comp}} \mathcal{F}[\Psi_{\mathrm{red}} + \xi_*] = 0,$$

tandis que la partie réduite est annulée par la branche réduite issue de la proposition 26.6. On obtient donc une solution de l'équation complète dans la classe antisymétrique considérée :

$$\Psi_* = \Psi_{\mathrm{red}} + \xi_*.$$

Enfin, la stabilité de la boule donne directement

$$\|\xi_*\| = \mathcal{O}(|A_{\mathrm{ext}}|^3),$$

ce qui est l'estimation (26.51). □

Conclusion locale complète. Dans la classe antisymétrique à centres antipodaux fixés, la possibilité du bi–bump 2DOF à onde commune n'est donc plus seulement un résultat réduit : elle se relève en une **branche locale complète** de solutions HSM.

Statut du résultat. Le résultat précédent ferme la preuve locale d'existence dans la classe antisymétrique. Il s'agit d'un résultat local au voisinage du seuil : l'analyse non perturbative loin du seuil et la stabilité globale appartiennent à un régime distinct du théorème démontré ici.

Portée. La proposition précédente fournit le système réduit local. Le théorème de relèvement 26.7 établit ensuite que cette branche réduite se relève en une branche locale effective de solutions de l'équation fondamentale HSM, avec contrôle du complément spectral et du résidu de réduction.

Conclusion. Le point théorique acquis est désormais le suivant :

- la branche **symétrique** antipodale à deux bumps de même signe ne peut pas être portée par Y_{100} ;
- la branche **antisymétrique** ne souffre pas de cette obstruction ;
- au niveau du système réduit, cette branche antisymétrique présente une **bifurcation locale supercritique** au voisinage de ω_{ext}.

Le bi-bump 2DOF à onde commune dispose ainsi d'une fermeture locale complète au voisinage du seuil, sur la branche antisymétrique compatible avec le mode commun Y_{100}.Cette fermeture est locale en amplitude et en fréquence ; elle ne revendique pas une classification globale des branches loin du seuil.

Chapitre 27

Solutions composées 3DOF : socle, fermetures LO et contrôles

Convention de sigles. Dans ce chapitre, on appelle *CB3* la géométrie canonique **tri-lobe** à trois centres $\{-\delta, 0, +\delta\}$ utilisée comme support des réductions composées 3DOF. On note *Br3* la branche **breather-like 3DOF** construite sur cette géométrie, et l'on distingue en particulier :

$$\text{Br3 neutre : } \widehat{w} \propto (1, -2, 1), \qquad \text{Br3 chargé-like : } \widehat{w} \propto (1, -1, 1),$$

suivant le label monopolaire $n_{\mathrm{EM}}(\widehat{w})$ et la classe de symétrie considérée.

27.1 Prérequis et notations (rang meneur, 3DOF)

Constantes mécaniques positives : densité volumique ρ, tension T, raideur radiale μ_2. Vitesse tangentielle $c_t^2 = T/\rho$, ratio local

$$\kappa_\mu := \frac{\mu_2}{T} > 0.$$

Rayon géodésique global R_0. Échelle coeur $\lambda = c_t/\omega_0$ avec $\lambda \ll R_0$. Profil canonique de coeur $a(\xi) = \operatorname{sech}\xi$, $\xi = s/\lambda$, mesure $4\pi\,\xi^2\,d\xi$. Action (un anneau) :

$$h_{\mathrm{eff}} = \frac{\pi}{2}\rho c_t\,\mathcal{C}_*(u^*, \varepsilon), \qquad \varepsilon = \frac{\lambda}{R_0} \ll 1,$$

où $u^* \in [1.7, 2.1]$ est la fenêtre de raccord MSE (cf. §27.3).

Constantes de forme (profil $a = \operatorname{sech}$).

$$J_0 = \int_0^\infty 4\pi\xi^2 a^2\,d\xi = \frac{\pi^3}{3}, \qquad J_2 = \int_0^\infty 4\pi\xi^2 (a')^2\,d\xi \simeq 7.6339320582. \tag{27.1}$$

On utilisera

$$K_{\mathrm{bump}} = (J_0 + J_2)J_0, \qquad K_0^{(Z)} = J_0^2, \qquad K_2^{(Z)} = J_0 J_2.$$

27.2 Constantes dérivées (familles 3DOF)

Normalisation LO commune. Dans la convention HSM (profil $a(\xi) = \operatorname{sech}\xi$, mesure $4\pi\,\xi^2\,d\xi$), le contrôle (ii) fixe

$$A_0^2\,\lambda^2 = \frac{2\,h_{\mathrm{eff}}}{\rho\,c_t}\,\frac{1}{J_0 + J_2}, \qquad J_0 = \frac{\pi^3}{3}, \quad J_2 \simeq 7.6339320582, \quad c_t^2 = \frac{T}{\rho}. \tag{27.2}$$

Convention d'amplitude. On conserve dans tout ce chapitre la même convention d'amplitude A_0 que dans les chapitres précédents de la branche 3DOF ; en particulier, la combinaison $A_0^2\lambda^2$ est la quantité normalisée fixée par l'action via (27.2).

Moment $J_{6,2}$ (profil sech, même mesure). On définit le moment pondéré en ξ^6 utilisé dans les fermetures quartiques par

$$J_{6,2} \;=\; \int_0^{+\infty} 4\pi\,\xi^6\,a(\xi)^2\,d\xi \quad \text{avec} \;\; a(\xi)=\operatorname{sech}\xi \quad\Rightarrow\quad J_{6,2} \;\approx\; 2.786580061\times 10^2. \tag{27.3}$$

Préfacteurs d'échelle (communs) et coefficients de canal. Il est utile de distinguer :

— des *préfacteurs communs* induits par la normalisation d'action (27.2), qui servent de contrôle d'échelle et ne doivent pas être confondus avec les coefficients purs de canal ;

— des *coefficients de canal purs*, à savoir ζ_{3D} pour le canal fort-like et Γ_{P} pour le canal Préclusion, définis séparément par les fermetures de canal correspondantes (cf. §27.5.1 pour ζ_{3D} et (20.60) pour Γ_{P}).

Préfacteurs communs (contrôle). En factorisant le dénominateur naturel $J_0+\frac{1}{\kappa_\mu}J_2$, on introduit les combinaisons communes

$$\boxed{\widetilde{\zeta}_{3D} \;=\; \left(A_0^2\lambda^2\right)\,\frac{J_{6,2}}{J_0+\frac{1}{\kappa_\mu}J_2}}, \qquad \boxed{\widetilde{\gamma}_{\mathrm{P}} \;=\; \left(A_0^2\lambda^2\right)\,\frac{J_2}{J_0+\frac{1}{\kappa_\mu}J_2}}. \tag{27.4}$$

Remarque : $\widetilde{\zeta}_{3D}$ et $\widetilde{\gamma}_{\mathrm{P}}$ sont des *préfacteurs d'échelle* ; ils ne doivent pas être confondus avec les coefficients purs de canal. En particulier,

$$\widetilde{\zeta}_{3D}\neq\zeta_{3D}, \qquad \widetilde{\gamma}_{\mathrm{P}}\neq\Gamma_{\mathrm{P}}.$$

Ils servent uniquement de contrôle d'échelle dans les fermetures, tandis que la partie purement canal est définie séparément dans (27.26).

Statut. Les préfacteurs $\widetilde{\zeta}_{3D}$ et $\widetilde{\gamma}_{\mathrm{P}}$ sont définis ici sous forme symbolique à partir de la normalisation d'action (27.2), du profil canonique et des moments J_p. Leur rôle est de séparer les préfacteurs d'échelle des coefficients purs de canal.

Traçabilité théorique. Les grandeurs (27.2)–(27.4) découlent de la même mesure de profil que les moments J_p. Elles n'introduisent aucun degré de liberté supplémentaire.

27.3 Module externe sur $\mathbb{S}^3$ et portance de couche

Équation zonale externe (rang meneur, isotrope) pour l'enveloppe $A(\psi)$:

$$-\frac{T}{R_0^2}\left(\sin^2\psi\,A'(\psi)\right)' \;+\; \frac{T}{R_0^2}S^2\,A(\psi) \;=\; \rho\,\omega_0^2\,\sin^2\psi\,A(\psi), \qquad S^2=\ell(\ell{+}2). \tag{27.5}$$

Réduction de Langer $y(\psi)=\sqrt{\sin\psi}\,A(\psi)$:

$$y''+\Big[\frac{\rho}{T}\omega_0^2-U(\psi)\Big]y=0, \qquad U(\psi)=\frac{S^2+\frac14}{\sin^2\psi}-\frac14.$$

Au bord $\psi_c=u^*\varepsilon$:

$$k_*^2=\frac{\rho}{T}\omega_0^2-U(\psi_c), \qquad g_*\simeq\frac{1}{u^*\,\varepsilon}, \qquad \varepsilon=\lambda/R_0. \tag{27.6}$$

Portance de couche (condition de Robin) :

$$\boxed{\chi = \frac{(2k_*)^2}{(2k_*)^2 + g_*^2} \in (0,1)}, \qquad \widehat{\beta}_0 \equiv \chi. \tag{27.7}$$

MSE universelle :

$$\boxed{y \cot y = 1 - u^* \tanh u^*, \quad y = (n{+}1)u^*\,\varepsilon, \quad u^* \in [1.7, 2.1].} \tag{27.8}$$

La décroissance stricte de $y \cot y$ entre ses pôles assure au plus une solution par bande.

Fermeture LO régularisée de la coupure 3DOF. La fenêtre MSE

$$u_* \in [1.7, 2.1]$$

définit le domaine admissible de raccord coeur–gaine au niveau LO. Elle représente la fenêtre de raccord où la couche de bord reste régulière et où la réduction mince utilisée dans (27.8) est applicable. Dans cette fenêtre, la coupure u_* n'est pas fixée par une racine unique de l'équation locale : elle doit être choisie par une fermeture de jauge de raccord.

La fermeture centrale utilisée ici est le minimax multiplicatif de la constante de coeur réduite. Ce choix est adapté à une constante positive intervenant comme facteur multiplicatif : il équilibre l'erreur relative maximale aux deux bords de la fenêtre admissible.

On note

$$k := \frac{\psi_{\mathrm{cut}}}{\psi_c} > 1, \qquad \psi_{\mathrm{cut}} = k\,\psi_c,$$

où ψ_c est le bord de coeur et ψ_{cut} le bord extérieur de la couronne de raccord. Le problème radial réduit associé à la capacité de couronne est le problème harmonique

$$\big(\sin^2\psi\, W'(\psi)\big)' = 0, \qquad W(\psi_c) = 1, \qquad W(\psi_{\mathrm{cut}}) = 0.$$

Sa solution fermée est

$$\boxed{W(\psi) = \frac{\cot\psi - \cot\psi_{\mathrm{cut}}}{\cot\psi_c - \cot\psi_{\mathrm{cut}}}.} \tag{27.9}$$

Le flux radial associé est donc contrôlé par le saut DtN

$$\Lambda_0(\psi_c, \psi_{\mathrm{cut}}) = \frac{1}{\cot\psi_c - \cot\psi_{\mathrm{cut}}}.$$

La constante de coeur réduite s'obtient en rapportant ce flux au facteur de normalisation de bord de la couronne. On écrit

$$C_\ell(0, 3\mathrm{D}) = \frac{\cot\psi_c - \cot\psi_{\mathrm{cut}}}{\mathcal{B}(\psi_c, \psi_{\mathrm{cut}})^2},$$

où $\mathcal{B}(\psi_c, \psi_{\mathrm{cut}})$ est le facteur de normalisation radial associé au profil harmonique W. Dans le régime mince

$$\psi_c \ll 1, \qquad \psi_{\mathrm{cut}} = k\psi_c, \qquad k > 1,$$

les développements élémentaires de $\cot\psi$ donnent

$$\cot\psi_c - \cot(k\psi_c) = \frac{k-1}{k\,\psi_c} + O(\psi_c),$$

et le facteur de normalisation radial se développe comme

$$\mathcal{B}(\psi_c, k\psi_c) = \frac{(k^3 - 3k + 2)}{6k}\,\psi_c^2 + O(\psi_c^4).$$

On en déduit

$$C_\ell(0,3\mathrm{D}) = \psi_c^{-5}\frac{36\,k(k-1)}{\left(k^3-3k+2\right)^2} + O(\psi_c^{-3}).$$

La constante réduite de capacité radiale est donc

$$\boxed{\mathcal{C}_{3D}^{(0)}(k) = \frac{36\,k(k-1)}{\left(k^3-3k+2\right)^2}.} \tag{27.10}$$

Normalisation canonique de profil. La fonction $\mathcal{C}_{3D}^{(0)}(k)$ encode la capacité radiale réduite. Il reste à fixer la normalisation du profil transverse canonique. Le point de référence symétrique est

$$k = 2.$$

La constante de coeur canonique associée au profil transverse normalisé est l'intégrale unidimensionnelle du coeur sech :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sech}^2 u\, du = 2.$$

On impose donc

$$\boxed{\mathsf{C}_{\mathrm{prof}}^{(3)}(2) = 2.} \tag{27.11}$$

Or

$$\mathcal{C}_{3D}^{(0)}(2) = \frac{36\cdot 2\cdot(2-1)}{(2^3-3\cdot 2+2)^2} = \frac{72}{16} = \frac{9}{2}.$$

On définit donc

$$\boxed{\Xi_{\mathrm{prof}} := \frac{\mathsf{C}_{\mathrm{prof}}^{(3)}(2)}{\mathcal{C}_{3D}^{(0)}(2)} = \frac{2}{9/2} = \frac{4}{9}.} \tag{27.12}$$

La constante de profil transverse effectivement comparée sur la fenêtre est alors

$$\boxed{\mathsf{C}_{\mathrm{prof}}^{(3)}(k) = \Xi_{\mathrm{prof}}\,\mathcal{C}_{3D}^{(0)}(k).} \tag{27.13}$$

Lemme 27.1 (Métrique multiplicative des constantes positives)**.** *Pour une constante positive sans échelle additive naturelle, le critère de comparaison invariant par changement d'unité multiplicatif est le critère logarithmique*

$$d(C_1,C_2) = \left|\log\frac{C_1}{C_2}\right|.$$

Démonstration. La constante $\mathsf{C}_{\mathrm{prof}}^{(3)}(k)$ est positive et intervient comme facteur multiplicatif de coeur. Une comparaison admissible ne doit donc pas dépendre d'une renormalisation globale $C \mapsto aC$, avec $a > 0$. Le rapport C_1/C_2 est invariant par cette transformation, alors que la différence $C_1 - C_2$ ne l'est pas. La symétrie entre surestimation et sous-estimation impose en outre

$$d(C_1,C_2) = d(C_2,C_1),$$

ce qui sélectionne la valeur absolue du logarithme du rapport :

$$d(C_1,C_2) = \left|\log\frac{C_1}{C_2}\right|.$$

□

Proposition 27.2 (Coupure centrale LO régularisée)**.** *La coupure centrale $u_*^\star$ est définie comme le point de la fenêtre admissible $[1.7, 2.1]$ qui minimise l'écart multiplicatif maximal aux deux extrémités :*

$$u_*^\star = \arg\min_{u\in[1.7,2.1]} \max\left(\left|\log\frac{\mathsf{C}^{(3)}_{\mathrm{prof}}(u)}{\mathsf{C}^{(3)}_{\mathrm{prof}}(1.7)}\right|, \left|\log\frac{\mathsf{C}^{(3)}_{\mathrm{prof}}(u)}{\mathsf{C}^{(3)}_{\mathrm{prof}}(2.1)}\right|\right). \tag{27.14}$$

Elle vérifie donc

$$\boxed{\log \mathsf{C}^{(3)}_{\mathrm{prof}}(u_*^\star) = \frac{1}{2}\left[\log \mathsf{C}^{(3)}_{\mathrm{prof}}(1.7) + \log \mathsf{C}^{(3)}_{\mathrm{prof}}(2.1)\right], \qquad u_*^\star \in [1.7, 2.1].} \tag{27.15}$$

Démonstration. Sur la fenêtre admissible, la fonction

$$\mathcal{C}^{(0)}_{3D}(k) = \frac{36\,k(k-1)}{(k^3-3k+2)^2}$$

est strictement décroissante. En effet, pour $k > 1$,

$$k^3 - 3k + 2 = (k-1)^2(k+2),$$

donc

$$\mathcal{C}^{(0)}_{3D}(k) = \frac{36k}{(k-1)^3(k+2)^2},$$

et

$$\frac{d}{dk}\log \mathcal{C}^{(0)}_{3D}(k) = \frac{1}{k} - \frac{3}{k-1} - \frac{2}{k+2} < 0.$$

Comme Ξ_{prof} est constant sur la fenêtre, la monotonie vaut aussi pour $\mathsf{C}^{(3)}_{\mathrm{prof}}(k)$.

Le minimax multiplicatif consiste à minimiser le plus grand des deux écarts logarithmiques aux extrémités. Pour une fonction positive strictement monotone, ce maximum est minimal lorsque les deux écarts sont égaux :

$$\log \mathsf{C}^{(3)}_{\mathrm{prof}}(1.7) - \log \mathsf{C}^{(3)}_{\mathrm{prof}}(u_*^\star) = \log \mathsf{C}^{(3)}_{\mathrm{prof}}(u_*^\star) - \log \mathsf{C}^{(3)}_{\mathrm{prof}}(2.1).$$

On obtient donc

$$\log \mathsf{C}^{(3)}_{\mathrm{prof}}(u_*^\star) = \frac{1}{2}\left[\log \mathsf{C}^{(3)}_{\mathrm{prof}}(1.7) + \log \mathsf{C}^{(3)}_{\mathrm{prof}}(2.1)\right].$$

L'existence et l'unicité suivent de la continuité et de la stricte monotonie de $\mathsf{C}^{(3)}_{\mathrm{prof}}$ sur $[1.7, 2.1]$. □

La résolution scalaire de (27.15) donne

$$\boxed{u_*^\star = 1.8782600799\ldots} \tag{27.16}$$

La borne haute de fort recouvrement pour une géométrie tri–lobe est donc

$$\boxed{\delta_{\max} = \frac{u_*^\star}{2} = 0.93913003995\ldots.} \tag{27.17}$$

Stabilité du choix de centre. Le critère minimax multiplicatif fixe la valeur centrale utilisée dans les calculs LO. Des centres alternatifs de la même fenêtre donnent des valeurs proches :

critère de centre	u_*
minimax multiplicatif	1.8782600799
milieu harmonique de $[1.7, 2.1]$	1.8789473684
milieu géométrique de $[1.7, 2.1]$	1.8894443628
milieu arithmétique de $[1.7, 2.1]$	1.9000000000

La dispersion relative reste de l'ordre du pourcent. Les grandeurs qui consomment $u_*^\star$, notamment $\delta_{\max} = u_*^\star/2$, doivent donc être lues comme des valeurs centrales LO associées à cette fermeture de centre.

27.4 Coupure de coeur, EBK et normalisations

Moyenne temporelle $\langle\cos^2\rangle = \frac{1}{2}$. Règle énergie–fréquence (un anneau) : $E_0 = h_{\text{eff}}\,\omega_{\text{br}}$ avec, en 3DOF conique,

$$\omega_{\text{br}} = \sigma\,\omega_0, \qquad \sigma = \sin^2\alpha \in \Big\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\Big\}.$$

La normalisation d'action consommée ici reprend la fermeture EBK canonique du cœur, cf. (20.54).

$$\boxed{A_0^2\,\lambda^2 = \frac{2\,h_{\text{eff}}}{\rho c_t}\,\frac{1}{J_0 + J_2}, \qquad \lambda = \frac{c_t}{\omega_0}.} \tag{27.18}$$

Au LO, λ (et donc ω_0) est déterminée par la fermeture coeur+χ.

27.5 Cœurs multi-lobes 3DOF avec poids : cadre général (LO)

Statut de la section. Cette section fixe le cadre combinatoire général des motifs multi-lobes 3DOF : positions, poids, sommes de forme, réduction quartique pair-à-pair et labels discrets. Les fermetures de canal écrites plus bas sont des formes opératoires génériques. Les secteurs spécialisés peuvent introduire leur propre paramètre réduit de réponse. En particulier, dans la branche Z-like 3DOF, la fermeture active utilise le paramètre réduit $\eta = \eta_\mu^{(Z)}(\lambda_*)$ défini en (28.98), et non une lecture directe du symbole κ_μ comme paramètre réduit constant.

Positions et poids (motif discret + normalisation d'échelle). On considère un cœur quasi–plan (profil $a(\xi) = \operatorname{sech}\xi$, $\xi = s/\lambda$) composé de N lobes placés aux positions $\{\xi_i\}_{i=1}^N$ (par exemple $\{-\delta, 0, +\delta\}$) et décrit par un *motif discret* $\widehat{w} = (\widehat{w}_1, \ldots, \widehat{w}_N) \in \mathbb{Z}^N$. *Remarque.* Dans une géométrie N–lobe fixée, on suppose en pratique $\widehat{w}_i \neq 0$; le cas $\widehat{w}_i = 0$ correspond à la *réduction* vers un problème à $(N-1)$ lobes, traité séparément.

Le champ interne s'écrit

$$A_{\text{in}}(\xi) \;\propto\; \sum_{i=1}^{N} w_i\,a(\xi - \xi_i), \qquad a(\xi) = \operatorname{sech}\xi,$$

où $w \in \mathbb{R}^N$ est le vecteur de poids *réels* effectivement injecté dans les fonctionnelles. On peut fixer l'échelle globale par une normalisation de type $S_0[w;\delta] = 1$. Toutefois, dans les sorties canoniques utilisées ensuite dans ce chapitre, on travaille directement avec les *motifs primitifs* $\widehat{w}$, et les formes $S_0, S_2, S_{4,\text{pair}}$ qui apparaissent dans les fermetures sont les formes brutes associées à ces motifs. Ainsi, deux motifs colinéaires (ex. $(1,-1,1)$ et $(2,-2,2)$) décrivent la même direction interne et ne définissent pas deux états distincts.

Recouvrements croisés. Les recouvrements croisés $J_p^\times(\Delta)$ sont définis par les convolutions translationnelles 3D en (28.33). Cette convention est celle utilisée dans toutes les fermetures multi-lobes ci-dessous.

Moment quartique unitaire. On pose également

$$\boxed{J_4 := J_4^\times(0) = \int_0^\infty 4\pi\,\xi^2\,a(\xi)^4\,d\xi, \qquad a(\xi) = \operatorname{sech}\xi.} \tag{27.19}$$

Sommes de forme (exactes). En notant $\Delta_{ij} := |\xi_i - \xi_j|$, on a

$$\boxed{\begin{aligned} S_0[\widehat{w};\delta] &= J_0 \sum_i \widehat{w}_i^2 \;+\; 2\sum_{i<j} \widehat{w}_i\widehat{w}_j\, J_0^{\times}(\Delta_{ij}), \\ S_2[\widehat{w};\delta] &= J_2 \sum_i \widehat{w}_i^2 \;+\; 2\sum_{i<j} \widehat{w}_i\widehat{w}_j\, J_2^{\times}(\Delta_{ij}), \end{aligned} \qquad \Delta_{ij} := |\xi_i - \xi_j| \ .} \tag{27.20}$$

Réduction quartique pair-à-pair. Pour le canal Préclusion, la forme LO utilisée est

$$\boxed{S_{4,\mathrm{pair}}[\widehat{w};\delta] := 6\sum_{i<j} (\widehat{w}_i\widehat{w}_j)^2\, J_4^{\times}(\Delta_{ij}).} \tag{27.21}$$

Remarque sur la réduction pair-à-pair. La forme $S_{4,\mathrm{pair}}$ ne prétend pas représenter l'intégralité du développement quartique de $\big(\sum_i \widehat{w}_i a_i\big)^4$. Elle retient seulement la partie *pair-à-pair* utilisée au rang meneur pour modéliser le coût de recouvrement local du canal Préclusion. Les termes purement auto-locaux et les structures quartiques d'ordre supérieur en recouvrement sont soit absorbés dans la normalisation unitaire, soit traités comme sous-dominants au rang LO dans la réduction composée retenue ici.

Charge EM (LO) : label discret. Au rang meneur (couplage linéaire), le *label monopolaire* est porté par le motif entier non normalisé $\bar{w}$, avant normalisation de forme :

$$\boxed{n_{\mathrm{EM}}(\bar{w}) := \sum_{i=1}^{N} \bar{w}_i \in \mathbb{Z}.} \tag{27.22}$$

La branche est neutre si $n_{\mathrm{EM}} = 0$, et chargée si $n_{\mathrm{EM}} \neq 0$. Lorsque l'on travaille ensuite avec un représentant normalisé $w(\delta)$ ou $\widehat{w}(\delta)$, le label discret reste celui du motif entier non normalisé $\bar{w}$.

En recouvrement fort, l'amplitude effective du monopôle peut être réduite par un facteur de forme dépendant de $\widehat{w}$ et de δ, ainsi que, en 3DOF conique, par la projection $\sigma = \sin^2\alpha$. Le label n_{EM} reste un marqueur discret de canal ; il n'implique pas une additivité directe de la source effective (cf. §28.6.7).

Préclusion répulsif (court–portée) — forme quartique pair-à-pair. Le canal Préclusion est modélisé au LO comme un coût local de recouvrement quartique du champ composé. La contribution répulsive réduite s'écrit alors

$$\boxed{\beta^{(\mathrm{P})}[\widehat{w};\delta] = \kappa_\mu\, \Gamma_{\mathrm{P}}\, \frac{S_{4,\mathrm{pair}}[\widehat{w};\delta]}{\Big(S_0[\widehat{w};\delta] + \kappa_\mu^{-1} S_2[\widehat{w};\delta]\Big)^2}, \qquad \Gamma_{\mathrm{P}} = \frac{4J_4}{J_0^2}.} \tag{27.23}$$

Ainsi, le canal Préclusion ne fait intervenir aucune constante spécifique à la famille composée : sa force globale est portée par la constante universelle Γ_{P} du canal, tandis que la dépendance en géométrie interne est entièrement contenue dans $S_{4,\mathrm{pair}}[\widehat{w};\delta]$.

Fort-like attractif (quartique, pair-à-pair) — forme poids. De même, la contribution quartique attractive s'écrit

$$\boxed{\beta^{(\mathrm{F})}[\widehat{w};\delta] = \zeta_{3D}\, \frac{\displaystyle\sum_{i<j} c_{ij}^{(\mathrm{F})}(\widehat{w})\, J_4^{\times}(\Delta_{ij})}{S_0[\widehat{w};\delta] \;+\; \dfrac{1}{\kappa_\mu} S_2[\widehat{w};\delta]}\ , \qquad \zeta_{3D} > 0\ .} \tag{27.24}$$

Statut des coefficients combinatoires du canal fort-like. Dans cette section-cadre, les coefficients $c_{ij}^{(\mathrm{F})}(\widehat{w})$ sont laissés symboliques : ils sont fixés explicitement famille par famille dans les sous-sections de spécialisation (Br-like, Z-like, etc.). Le présent cadre ne suppose que leur positivité et leur dépendance combinatoire au motif primitif $\widehat{w}$.

Règle effective et fermeture. On pose $\beta^{(\mathrm{eff})} = \beta^{(\mathrm{F})} - \beta^{(\mathrm{P})}$ (quand les deux canaux coexistent). La fermeture LO s'écrit alors sous la forme canonique

$$\boxed{\lambda_*^4[\widehat{w}] = \frac{2\,h_{\mathrm{eff}}\sqrt{\rho\,T}}{\kappa_\mu\Big(K[\widehat{w}] - \beta^{(\mathrm{eff})}[\widehat{w};\delta]\,K_0[\widehat{w}]\Big) \;-\; \beta^{(\mathrm{eff})}[\widehat{w};\delta]\,K_2[\widehat{w}]}\;,\quad \begin{cases} K[\widehat{w}] = (S_0[\widehat{w}]+S_2[\widehat{w}])\,S_0[\widehat{w}], \\ K_0[\widehat{w}] = (S_0[\widehat{w}])^2, \qquad K_2[\widehat{w}] = S_0[\widehat{w}]\,S_2[\widehat{w}] \end{cases}} \tag{27.25}$$

où les formes S_0, S_2 sont évaluées sur le motif primitif $\widehat{w}$ à géométrie fixée δ. La fréquence projetée de branche vaut $\omega_{\mathrm{br}} = \sigma\,\omega_0 = \sigma\,c_t/\lambda_*$ (3DOF conique), et la masse mécanique réduite associée à un niveau EBK q s'écrit

$$m(q,\sigma) = \frac{E_0}{c_t^2} = \frac{q\,h_{\mathrm{eff}}\,\omega_{\mathrm{br}}}{c_t^2} = \frac{q\,h_{\mathrm{eff}}\,\sigma}{c_t\,\lambda_*}.$$

Dans la présente partie LO, le filtre EBK impose $q_{\mathrm{adm}} = 1$ (cf. §28.6.4 pour le cas Z-like).

Proposition 27.3 (Valeur LO de la constante de bord $\widehat{\beta}_0$ (Z-like 3DOF))**.** *Dans la fenêtre mince $\psi_c = u^*\varepsilon$ avec $\varepsilon = \lambda/R_0 \ll 1$, on a $g_* \simeq (u^*\varepsilon)^{-1} \gg 1$ et $k_* = \mathcal{O}(1)$. Il en résulte*

$$\widehat{\beta}_0 \equiv \chi = \frac{(2k_*)^2}{(2k_*)^2 + g_*^2} = \mathcal{O}\big((u^*\varepsilon)^2\big) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.$$

Au rang meneur (LO), on adopte donc

$$\boxed{\widehat{\beta}_0 = 0}.$$

Remarque. *Cette valeur LO concerne le facteur de bord de la réduction 3DOF dans la fenêtre mince $\psi_c = u^*\varepsilon$, et ne doit pas être confondue avec la quantité homonyme introduite dans la réduction 2DOF Z-like, qui relève d'une autre fermeture effective.*

27.5.1 Constantes de canal utilisées en théorie pure

Rappel. Le coefficient ζ_{3D} du canal fort-like est un nombre pur fixé par la normalisation HSM du canal 3DOF attractif. En revanche, le canal Préclusion n'est plus paramétré ici par une constante propre ζ_{P} spécifique aux familles composées 3DOF : il est écrit directement en fonction de la constante universelle Γ_{P} du canal Préclusion, définie dans le chapitre correspondant.

Constantes réduites consommées par les fermetures. Les fermetures 3DOF consomment le coefficient attractif ζ_{3D}, dérivé en §27.5.2, et la constante universelle du canal de Préclusion. On regroupe ces deux constantes sous la forme

$$\boxed{\zeta_{3D} = \frac{15}{8}, \qquad \Gamma_{\mathrm{P}} = \frac{4J_4}{J_0^2}.} \tag{27.26}$$

Conséquence. Dans les fermetures 3DOF de ce chapitre, le canal attractif fort-like est porté par ζ_{3D}, tandis que le canal Préclusion est écrit sous la forme

$$\beta^{(\mathsf{P})}[\widehat{w};\delta] = \kappa_\mu\,\Gamma_{\mathrm{P}}\,\frac{S_{4,\mathrm{pair}}[\widehat{w};\delta]}{\big(S_0[\widehat{w};\delta]+\kappa_\mu^{-1}S_2[\widehat{w};\delta]\big)^2},$$

sans introduction d'une constante supplémentaire spécifique aux familles composées. La présente section ne fixe aucune identification dimensionnée : elle définit uniquement les coefficients réduits nécessaires aux fermetures théoriques.

27.5.2 Dérivation du coefficient ζ_{3D}

Statut de la dérivation. La présente sous-section fixe la valeur du *coefficient pur de canal* ζ_{3D} à partir de la famille de référence retenue pour la fermeture quartique attractive 3DOF. La notation $\beta_{\mathrm{br}}^{(\mathrm{th})}$ désigne ici la fermeture attractive théorique de cette famille de référence breather-like 3DOF.

Forme de départ. On considère la fermeture quartique attractive du canal 3DOF sous la forme

$$\beta_{\mathrm{br}}^{(\mathrm{th})}(\delta,\varepsilon;\kappa_\mu) = \frac{3}{1+C_{\tan}^{J}+\chi^{J}/2}\,\frac{J_4^{\times}(\delta)}{S_0(\delta,\varepsilon)+\frac{1}{\kappa_\mu}S_2(\delta,\varepsilon)}. \tag{27.27}$$

Le facteur 3 est le nombre de paires non ordonnées dans une famille tri-lobe :

$$\#\{(i,j)\,:\,1\le i<j\le 3\} = \binom{3}{2} = 3.$$

Il s'agit donc du facteur combinatoire LO de recouvrement pair–à–pair associé à la famille de référence 3DOF utilisée pour définir le canal attractif dans la présente normalisation HSM.

Par définition, le coefficient pur de canal ζ_{3D} est le préfacteur multipliant le recouvrement quartique dans (27.27), soit

$$\boxed{\zeta_{3D} = \frac{3}{1+C_{\tan}^{J}+\chi^{J}/2}.} \tag{27.28}$$

Décomposition isotrope du canal de Jacobi. Le canal de Jacobi qui corrige la fermeture quartique attractive est porté par la partie quadrupolaire tangentielle symétrique sans trace. En dimension trois, l'espace des tenseurs symétriques sans trace est de dimension

$$\dim \mathrm{STF}_2(\mathbb{R}^3) = 5.$$

On décompose isotropiquement cet espace en une direction alignée avec le canal de raccord attractif et son complément orthogonal :

$$\mathrm{STF}_2(\mathbb{R}^3) = \mathcal{J}_{\parallel}\oplus\mathcal{J}_{\perp}, \qquad \dim\mathcal{J}_{\parallel}=1, \qquad \dim\mathcal{J}_{\perp}=4.$$

Lemme 27.4 (Poids isotropes du canal de Jacobi)**.** *Avec la normalisation de trace isotrope, les poids géométriques associés aux deux sous-espaces de Jacobi sont*

$$\boxed{C_{\tan}^{J}=\frac{1}{5}, \qquad \chi^{J}=\frac{4}{5}.} \tag{27.29}$$

Démonstration. La normalisation isotrope sur $\mathrm{STF}_2(\mathbb{R}^3)$ attribue à tout sous-espace un poids égal à son rang divisé par le rang total. Comme

$$\dim\mathcal{J}_{\parallel}=1, \qquad \dim\mathcal{J}_{\perp}=4, \qquad \dim\mathrm{STF}_2(\mathbb{R}^3)=5,$$

on obtient

$$C_{\tan}^{J} = \frac{\dim \mathcal{J}_{\parallel}}{\dim \mathrm{STF}_2(\mathbb{R}^3)} = \frac{1}{5}, \qquad \chi^{J} = \frac{\dim \mathcal{J}_{\perp}}{\dim \mathrm{STF}_2(\mathbb{R}^3)} = \frac{4}{5}.$$

□

Lemme 27.5 (Demi-poids du complément transverse)**.** *Dans la fermeture quartique attractive 3DOF, le complément transverse $\mathcal{J}_{\perp}$ intervient avec le demi-poids*

$$\boxed{\mathcal{W}_{\perp}^{J} = \frac{1}{2}\,\chi^{J}.} \tag{27.30}$$

Démonstration. Le canal aligné $\mathcal{J}_{\parallel}$ est colinéaire au raccord attractif pair–à–pair. Sa contribution est donc lue une seule fois dans la projection quartique normalisée et porte le poids plein $C_{\tan}^{J}$.

Le complément $\mathcal{J}_{\perp}$ n'est pas aligné avec le raccord attractif. Il intervient uniquement par sa composante paire symétrisée dans le recouvrement quartique. Pour une paire non orientée (i, j), les deux lectures transverses

$$i \to j, \qquad j \to i$$

représentent le même recouvrement géométrique. La projection non orientée est donc la moyenne symétrisée

$$\Pi_{\mathrm{pair}}^{\mathrm{sym}} = \frac{1}{2}(\Pi_{i\to j} + \Pi_{j\to i}).$$

Le poids transverse total χ^{J} est ainsi partagé par cette projection symétrisée, ce qui donne

$$\mathcal{W}_{\perp}^{J} = \frac{1}{2}\,\chi^{J}.$$

Ce facteur $1/2$ ne provient pas de la dimension de $\mathrm{STF}_2(\mathbb{R}^3)$, déjà comptée dans $\chi^{J} = 4/5$; il provient de la symétrisation non orientée du recouvrement quartique pair–à–pair. □

On obtient donc

$$\boxed{C_{\tan}^{J} = \frac{1}{5}, \qquad \chi^{J} = \frac{4}{5}.} \tag{27.31}$$

Le dénominateur du coefficient de canal devient

$$1 + C_{\tan}^{J} + \frac{1}{2}\chi^{J} = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5} = 1 + \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{8}{5}. \tag{27.32}$$

Valeur finale. En reportant (27.32) dans (27.28), on obtient

$$\boxed{\zeta_{3D} = \frac{3}{8/5} = \frac{15}{8} = 1.875.} \tag{27.33}$$

Conséquence. La fermeture quartique attractive s'écrit alors

$$\boxed{\beta_{\mathrm{br}}^{(\mathrm{th})}(\delta, \varepsilon; \kappa_{\mu}) = \zeta_{3D}\,\frac{J_4^{\times}(\delta)}{S_0(\delta,\varepsilon) + \frac{1}{\kappa_{\mu}} S_2(\delta,\varepsilon)}, \qquad \zeta_{3D} = 1.875.} \tag{27.34}$$

27.5.3 Tri-lobe 3DOF (CB3) : réduction de classe et sélection discrète des motifs $\widehat{w}$

Géométrie tri-lobe. On considère la configuration canonique $\{-\delta, 0, +\delta\}$ et un champ interne

$$A_{\text{in}}(\xi) \;\propto\; \sum_{i=1}^{3} \widehat{w}_i\, a(\xi - \xi_i), \qquad a(\xi) = \operatorname{sech}\xi, \qquad (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (-\delta, 0, +\delta),$$

où $\widehat{w} \in \mathbb{Z}^3$ désigne ici le motif discret primitif effectivement utilisé pour la fermeture canonique de la classe tri-lobe 3DOF.

Principe : sélection par minimisation (pas un choix arbitraire). Dans le présent chapitre, δ est la variable continue qui règle le *recouvrement* (équilibre), tandis que $\widehat{w}$ indexe un *mode discret*. Comme pour la branche breather, $\widehat{w}$ n'est pas posé arbitrairement : il est sélectionné par minimisation du dénominateur *dans une classe admissible*. Dans certaines classes (notamment neutres + symétrie), les contraintes suffisent à réduire la classe à un unique motif primitif, ce qui apparaît alors comme un "verrouillage".

Neutralité monopolaire (version minimale). Le label monopolaire est $n_{\text{EM}}(\widehat{w}) = \sum_i \widehat{w}_i$ (cf. (27.22)). Dans le secteur *neutre* (Br3 neutre), on impose donc

$$\boxed{\widehat{w}_1 + \widehat{w}_2 + \widehat{w}_3 = 0} \tag{27.35}$$

(contrainte de canal, indépendante de δ).

Symétrie tri-lobe. La configuration $\{-\delta, 0, +\delta\}$ est symétrique par réflexion $\xi \mapsto -\xi$. Un état canonique de la branche symétrique impose

$$\boxed{\widehat{w}_1 = \widehat{w}_3} \tag{27.36}$$

(les lobes extrêmes jouent le même rôle).

Solution entière primitive : Br3 neutre. En combinant (27.35) et (27.36), on obtient $\widehat{w}_2 = -2\widehat{w}_1$. Le triplet entier *primitif* (sans facteur commun) est donc

$$\boxed{\widehat{w}^{(0)}_{\text{Br3}} = (1, -2, 1)} \tag{27.37}$$

et tout autre choix dans la même classe est un multiple entier global, $\widehat{w} = k(1, -2, 1)$. Ces multiples décrivent la *même direction* interne et sont donc redondants dans la sélection canonique.

Conclusion. Pour la branche Br3 neutre dans la classe symétrique tri-lobe CB3, la classe admissible se réduit à $\widehat{w} \propto (1, -2, 1)$: le seul paramètre d'équilibre restant est δ, déterminé ensuite par minimisation du dénominateur sur la fenêtre admissible $[\delta_{\min}, \delta_{\max}]$.

Chapitre 28

Composés de bump 3DOF (canal interne s) : branches CB3 résolue et breather

28.1 Objet, hypothèses LO, blancheur et filtres

Objet. On étudie l'existence d'états liés formés de $N \in \{2, 3\}$ objets *bump 3DOF* (solutions localisées du secteur 3DOF), couplés par le canal *forte–like* (Chap. 18) et soumis à une répulsion de cœur universelle de type Préclusion (chapitre Préclusion). Aucun couplage électromagnétique ni gravitationnel n'est considéré dans ce chapitre.

Hypothèses LO. Régime tube mince $\lambda/R_0 \ll 1$, calotte quasi–plane, repos relatif des constituants. Chaque constituant 3DOF porte un niveau EBK

$$q_i \in \{q_1, q_2, q_3\},$$

où $q_1 = 1$ désigne le niveau fondamental. La branche CB3 résolue ne suppose donc pas que tous les constituants soient au fondamental : elle construit un état couleur–blanc à partir de trois bump 3DOF éventuellement de familles différentes.

Les filtres HSM (MSE/gaine, Gram, EBK, hiérarchie des échelles) bornent l'ensemble admissible sans introduire de constante libre nouvelle. Les contributions radiales dynamiques contrôlées par κ_r relèvent du NLO radial et ne sont pas incluses dans la fermeture CB3 LO.

Convention de noms internes. Dans ce chapitre, les lettres

$$\mathsf{u}, \qquad \mathsf{d}, \qquad \mathsf{Q}_{\uparrow}$$

sont utilisées comme étiquettes internes HSM de familles de bump 3DOF. Elles ne désignent pas des saveurs du Modèle Standard. Dans le texte, on parle des branches u-like, d-like et $\mathsf{Q}_{\uparrow}$-like. Dans les indices, pour garder des formules lisibles, on emploie les lettres nues

$$\mathsf{u}, \qquad \mathsf{d}, \qquad \mathsf{Q}_{\uparrow}.$$

Ainsi, un indice comme

$$\mathsf{ud}\mathsf{Q}_{\uparrow}$$

désigne un motif interne HSM de type CB3, et non une identification phénoménologique externe.

Canal de couleur et condition de blancheur. Chaque bump 3DOF porte une charge forte–like I_{s} définie via la projection sur le projecteur de canal $\boldsymbol{\pi}^{(\mathsf{col})}$ (Chap. 18). Au rang LO, une liaison attractive nette requiert une combinaison *blanche* dans ce canal : sans blancheur, la contribution forte–like est nulle ou non attractive, et aucun état lié n'est attendu. La blancheur est donc un **filtre d'existence**.

Deux régimes physiques (sans supposer d'identification expérimentale). On distingue deux branches, selon le degré de recouvrement des cœurs :

— **Branche CB3 résolue.** Les bumps restent identifiables. La variable interne géométrique principale est une séparation réduite δ. Pour CB2, l'écriture en interaction de paire fournit la fermeture LO. Pour CB3, la fermeture de masse est collective : le canal forte–like est évalué sur la source totale blanche, conformément à (21.32).

— **Branche breather (recouvrement fort).** Les lobes ne sont plus des constituants indépendants : le composite est une *solution unitaire multi–lobe*. Outre δ, il existe un degré interne de *forme* (mélange) noté $\widehat{w}$, qui doit être **déterminé** (et non postulé).

Principe d'équilibre. Dans la branche résolue, l'existence d'un composé blanc résulte du raccord forte–like collectif, de la contrainte de blancheur et du filtrage géométrique des séparations admissibles. La Préclusion intervient comme coût de cœur lorsque les profils entrent en recouvrement fort ; elle ne remplace pas la fermeture collective de la source blanche. Une solution admissible correspond à une configuration stationnaire dans l'intervalle filtré

$$\delta \in [\delta_{\min}, \delta_{\max}].$$

.

28.2 Énergie géométrique de stationnarité des branches résolues

Objet. Avant la fermeture de masse d'un composé blanc, il faut déterminer les configurations géométriques admissibles. À ce niveau, les centres résolus sont décrits par leurs positions ξ_i, leurs sources forte–like effectives et le coût de cœur de Préclusion. Cette énergie géométrique sert à sélectionner les séparations stationnaires ; elle ne constitue pas, pour CB3, la fermeture de masse finale.

Forme géométrique LO. Pour un ensemble de N centres localisés, l'énergie géométrique de stationnarité s'écrit au rang LO sous la forme

$$E_N^{\mathrm{geom}} = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} I_{\mathsf{s}}^{(i)} I_{\mathsf{s}}^{(j)}\, \mathcal{G}_{\mathsf{s}}(\xi_i,\xi_j) + \sum_{i<j} V_{\mathsf{P}}^{(\lambda)}(|\xi_i-\xi_j|), \tag{28.1}$$

où $\mathcal{G}_{\mathsf{s}}$ est le noyau de Green forte–like normalisé dans les conventions HSM, et $\mathcal{V}_{\mathsf{P}}$ le coût court–portée du canal de Préclusion.

Réduction géométrique. Dans les géométries canoniques CB2 et CB3 (Sec. 28.3), toutes les distances inter–centres s'expriment en fonction d'un seul paramètre δ, et l'énergie de stationnarité se réduit à une fonction

$$E_N^{\mathrm{geom}}(\delta) = \mathcal{A}_N\, \mathcal{G}_{\mathsf{s}}(\delta) + \mathcal{B}_N\, \mathcal{G}_{\mathsf{s}}(2\delta) + V_{\mathsf{P}}^{(\lambda,N)}(\delta), \tag{28.2}$$

où $\mathcal{A}_N, \mathcal{B}_N$ sont fixés par la géométrie et la combinaison blanche retenue.

Séparation entre stationnarité et fermeture de masse. Pour CB2, la description par interaction de paire peut suffire à fermer la branche résolue au rang LO. Pour CB3, la stationnarité géométrique ne suffit pas : la fermeture de masse est collective et doit être construite à partir de la source totale blanche définie en (21.32). La valeur δ_* sélectionnée par la stationnarité est donc consommée ensuite par la fermeture couleur–blanc du CB3.

Définition de la séparation stationnaire. Une configuration résolue admissible est définie par une séparation stationnaire dans l'intervalle filtré :

$$\boxed{\delta_* = \arg \min_{\delta \in [\delta_{\min}, \delta_{\max}]} E_N^{\mathrm{geom}}(\delta).} \tag{28.3}$$

La nature résolue ou fusionnée de la configuration est ensuite contrôlée par le degré de recouvrement des profils.

28.3 Géométries CB2 et CB3 : réduction à une variable

28.3.1 Configuration CB2 ($N = 2$)

Géométrie. Deux constituants aux positions $\xi_1 = -\delta$ et $\xi_2 = +\delta$:

$$d_{12} = 2\delta.$$

Énergie effective.

$$E_2(\delta) = I_{\mathsf{s}}^{(1)} I_{\mathsf{s}}^{(2)}\, \mathcal{G}_{\mathsf{s}}(2\delta) + \mathcal{V}_{\mathsf{P}}(2\delta). \tag{28.4}$$

28.3.2 Configuration CB3 ($N = 3$)

Géométrie. Trois constituants aux positions

$$\xi_1 = -\delta, \qquad \xi_2 = 0, \qquad \xi_3 = +\delta,$$

donc

$$d_{12} = d_{23} = \delta, \qquad d_{13} = 2\delta.$$

Énergie effective.

$$E_3(\delta) = \sum_{i<j} I_{\mathsf{s}}^{(i)} I_{\mathsf{s}}^{(j)}\, \mathcal{G}_{\mathsf{s}}(d_{ij}) + \sum_{i<j} V_{\mathsf{P}}^{(\lambda)}(d_{ij}). \tag{28.5}$$

Cas blanc symétrique (forme utile). Dans une combinaison blanche symétrique, les deux paires à distance δ portent le même coefficient forte–like, tandis que la paire à distance 2δ porte un coefficient fixé par la même projection blanche. On peut donc écrire

$$E_3(\delta) = \mathcal{A}_3\, \mathcal{G}_{\mathsf{s}}(\delta) + \mathcal{B}_3\, \mathcal{G}_{\mathsf{s}}(2\delta) + 2\, V_{\mathsf{P}}^{(\lambda)}(\delta) + V_{\mathsf{P}}^{(\lambda)}(2\delta), \tag{28.6}$$

où $\mathcal{A}_3$ et $\mathcal{B}_3$ sont entièrement déterminés par la projection blanche retenue, sans constante libre nouvelle.

28.4 Branche CB3 résolue : optimum en δ et masse

Stationnarité géométrique de paire. Les formes de paire issues des chapitres de canal fournissent une condition de stationnarité pour la séparation réduite δ. On écrit

$$V_{\mathsf{s}}(d) = -\mathcal{C}_{\mathsf{s}}\,\frac{I_{\mathsf{s}}^{(1)} I_{\mathsf{s}}^{(2)}}{4\pi}\,\frac{e^{-d/\lambda_{\mathsf{s}}}}{d}, \qquad V_{\mathsf{P}}^{(\lambda)}(d) = +\frac{C_{\mathrm{P}}(\lambda)}{\lambda}\,\frac{e^{-d/\widehat{\xi}_{\mathrm{P}}}}{d}, \qquad \widehat{\xi}_{\mathrm{P}} := \frac{\xi_{\mathrm{P}}}{\lambda}, \qquad \xi_{\mathrm{P}} := \sqrt{\frac{T}{\mu_\psi}}. \tag{28.7}$$

avec

$$\lambda_{\mathsf{s}} = \sqrt{\frac{T}{\mu_{\mathsf{s}}}}, \qquad \xi = \sqrt{\frac{T}{\mu_\psi}}.$$

Cette écriture sélectionne les séparations stationnaires admissibles. Elle ne remplace pas la fermeture collective de masse du CB3.

Conditions stationnaires. CB2. Avec $d_* = 2\delta_*$, la condition d'équilibre s'écrit

$$\boxed{V_{\mathsf{s}}'(d_*) + V_{\mathsf{P}}'(d_*) = 0, \qquad d_* \in (2\delta_{\min}, 2\delta_{\max}),} \tag{28.8}$$

et l'on impose

$$\partial_\delta^2 E_2^{\mathrm{geom}}(\delta_*) > 0.$$

CB3. Dans la géométrie symétrique

$$\xi_1 = -\delta, \qquad \xi_2 = 0, \qquad \xi_3 = +\delta,$$

les distances sont

$$d_{12} = d_{23} = \delta, \qquad d_{13} = 2\delta.$$

L'énergie géométrique réduite peut être écrite

$$E_3^{\mathrm{geom}}(\delta) = 2\,V_{\mathsf{s}}(\delta) + V_{\mathsf{s}}(2\delta) + 2\,V_{\mathsf{P}}(\delta) + V_{\mathsf{P}}(2\delta),$$

dans le cas blanc symétrique de référence. La stationnarité impose

$$\boxed{2\,V_{\mathsf{s}}'(\delta_*) + 2\,V_{\mathsf{s}}'(2\delta_*) + 2\,V_{\mathsf{P}}'(\delta_*) + 2\,V_{\mathsf{P}}'(2\delta_*) = 0,} \tag{28.9}$$

avec

$$\partial_\delta^2 E_3^{\mathrm{geom}}(\delta_*) > 0.$$

La valeur δ_* ainsi obtenue est ensuite consommée dans la fermeture collective couleur–blanc du CB3.

Fermeture collective du CB3 résolu. La fermeture d'un CB3 résolu est construite directement sur la source totale blanche. La réponse forte–like isolée (21.27) caractérise une source individuelle ; la réponse collective blanche est définie par (21.32). Le composé CB3 ne se ferme donc pas par addition préalable de trois self–réponses isolées.

L'échelle d'énergie de référence est

$$E_* := m_* c_t^2.$$

La réponse collective blanche fait intervenir deux constantes de coeur : le plateau de raccord $b_0^{(2)}$ et le moment gradient radial J_2. On introduit d'abord le poids collectif tri–lobe

$$\boxed{\tau_3 := \sqrt{3\,b_0^{(2)}\,J_2}.} \tag{28.10}$$

Le facteur 3 provient des trois bras du nœud blanc, $b_0^{(2)}$ est la raideur de plateau du raccord, et J_2 est le moment gradient radial du profil de coeur, défini par (27.1).

Lemme 28.1 (Variable diagonale réduite du bras CB3)**.** *Pour un bras i, la variable réduite qui compare l'excès radial familial au plateau collectif blanc est*

$$\boxed{x_i^2 = \frac{J_2}{3\, b_0^{(2)}} \left(\frac{q_i \rho_i}{4\pi} \right)^2 .} \tag{28.11}$$

Démonstration. Le terme diagonal du bras est porté par la composante radiale résiduelle

$$q_i \rho_i, \qquad \rho_i = \cos^2 \alpha_{X_i}.$$

La normalisation monopolaire du flux radial sur la sphère unité donne la source réduite

$$\widehat{Q}_i^{\mathrm{rad}} = \frac{q_i \rho_i}{4\pi}.$$

Le coût quadratique associé au gradient radial est pondéré par le moment

$$J_2 = \int_0^\infty 4\pi \xi^2 (a'(\xi))^2 \, d\xi.$$

Le plateau collectif blanc disponible pour absorber ce coût est le plateau tri–lobe

$$3\, b_0^{(2)},$$

un facteur $b_0^{(2)}$ par bras du nœud blanc. Le rapport adimensionné gradient radial / plateau collectif est donc

$$x_i^2 = \frac{J_2 (\widehat{Q}_i^{\mathrm{rad}})^2}{3\, b_0^{(2)}} = \frac{J_2}{3\, b_0^{(2)}} \left(\frac{q_i \rho_i}{4\pi} \right)^2 .$$

□

Proposition 28.2 (Coupure forte–like réduite du CB3)**.** *La variable diagonale réduite peut s'écrire sous la forme*

$$x_i^2 = \left(\frac{q_i \rho_i}{q_c} \right)^2 ,$$

où la coupure forte–like réduite est

$$\boxed{q_c = 4\pi \sqrt{\frac{3\, b_0^{(2)}}{J_2}}.} \tag{28.12}$$

Démonstration. En comparant

$$x_i^2 = \frac{J_2}{3\, b_0^{(2)}} \left(\frac{q_i \rho_i}{4\pi} \right)^2$$

avec

$$x_i^2 = \left(\frac{q_i \rho_i}{q_c} \right)^2 ,$$

on obtient

$$\frac{1}{q_c^2} = \frac{J_2}{3\, b_0^{(2)} (4\pi)^2}.$$

Donc

$$q_c^2 = (4\pi)^2 \frac{3\, b_0^{(2)}}{J_2},$$

et, comme $q_c > 0$,

$$q_c = 4\pi \sqrt{\frac{3\, b_0^{(2)}}{J_2}}.$$

□

Lemme 28.3 (Saturation lorentzienne par élimination quadratique)**.** *Soit a l'amplitude réduite d'un raccord collectif et soit $x \geq 0$ le rapport adimensionné entre le coût diagonal du défaut et la raideur collective du plateau. La forme quadratique LO normalisée du raccord s'écrit*

$$\mathcal{E}(a; x) = \frac{1}{2}(1 + x^2)a^2 - a.$$

Son élimination stationnaire donne

$$a_*(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Le facteur d'énergie diagonale associé est donc

$$\boxed{G(x) = \frac{1}{1 + x^2}.} \tag{28.13}$$

Le facteur de visibilité d'amplitude associé est

$$\boxed{\sqrt{G(x)} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.} \tag{28.14}$$

Démonstration. La stationnarité de $\mathcal{E}$ donne

$$\partial_a \mathcal{E}(a; x) = (1 + x^2)a - 1 = 0,$$

donc

$$a_*(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

La contribution diagonale quadratique porte le poids $G(x)$. Les termes de recouvrement bilinéaires entre deux bras portent les amplitudes, donc la racine $\sqrt{G(x)}$. Il en résulte

$$G(x) = \frac{1}{1 + x^2}, \qquad \sqrt{G(x)} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

□

Pour un constituant i, on note

$$\sigma_i := \sin^2 \alpha_{X_i}, \qquad \rho_i := \cos^2 \alpha_{X_i}.$$

La source de bras consommée par le défaut blanc est celle définie en (21.30) :

$$Q_i^{\mathrm{CB3}} := q_i \sigma_i \chi_{X_i}.$$

La variable diagonale réduite du bras i est celle de (28.11),

$$x_i = \frac{q_i \rho_i}{q_c}.$$

Par le lemme 28.3, le facteur diagonal saturé associé au bras i est

$$\boxed{G_i = G(x_i) = \frac{1}{1 + \left(\frac{q_i \rho_i}{q_c}\right)^2}.} \tag{28.15}$$

Seuil LO de résolution des sous-cœurs. La séparation consommée dans les recouvrements de paires du CB3 résolu ne doit pas être confondue avec l'optimum variationnel δ_* de la branche breather. Dans la fermeture collective couleur–blanc, elle fixe le seuil LO de sortie de saturation entre deux sous-cœurs.

Chaque sous-cœur de niveau q_i hérite de la largeur transverse spectrale

$$\lambda_i = \frac{\lambda_*}{q_i}.$$

Pour une paire (i, j), l'échelle de résolution locale pertinente est la plus petite des deux largeurs,

$$\lambda_{ij}^{\mathrm{res}} := \min(\lambda_i, \lambda_j) = \frac{\lambda_*}{q_{ij}^{\max}}.$$

Au rang LO, le profil de cœur canonique

$$a(u) = \operatorname{sech} u$$

ne possède pas de structure résolue à une échelle inférieure à sa largeur propre. Deux sous-cœurs séparés d'une distance inférieure à $\lambda_{ij}^{\mathrm{res}}$ ne sont donc pas distingués comme deux raccords indépendants dans la règle de raccord CB3 : leur recouvrement est pris dans le régime saturé.

On introduit la séparation réduite de paire

$$\delta_{ij} := \frac{s_{ij}}{\lambda_{ij}^{\mathrm{res}}},$$

où s_{ij} est la distance locale de raccord entre les deux sous-cœurs. Le seuil de sortie du régime saturé est

$$s_{ij} = \lambda_{ij}^{\mathrm{res}},$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\delta_{\mathrm{CB3}}^{\mathrm{LO}} = 1.} \tag{28.16}$$

Proposition 28.4 (Seuil canonique de sortie de saturation)**.** *Au rang LO, le premier raccord non saturé entre deux sous-cœurs CB3 de niveaux familiaux distincts est atteint pour*

$$\delta_{ij} = 1.$$

Démonstration. La fermeture transverse d'un sous-cœur de niveau q_i fixe son unique échelle locale résolue :

$$\lambda_i = \frac{\lambda_*}{q_i}.$$

Au rang LO, aucune donnée de la fermeture de cœur ne distingue des structures internes à l'échelle $s < \lambda_i$. Pour une paire (i, j), l'échelle la plus fine disponible est donc

$$\lambda_{ij}^{\mathrm{res}} = \min(\lambda_i, \lambda_j) = \frac{\lambda_*}{q_{ij}^{\max}}.$$

Si

$$s_{ij} < \lambda_{ij}^{\mathrm{res}},$$

les deux sous-cœurs ne sont pas séparés par une longueur suffisante pour définir un raccord non saturé entre deux profils distincts. Le recouvrement est alors pris dans le régime saturé.

Le premier point où un raccord non saturé devient résoluble est le seuil

$$s_{ij} = \lambda_{ij}^{\mathrm{res}}.$$

En variable réduite,

$$\delta_{ij} = \frac{s_{ij}}{\lambda_{ij}^{\mathrm{res}}},$$

ce seuil donne immédiatement

$$\delta_{ij} = 1.$$

Ainsi, $\delta_{\mathrm{CB3}}^{\mathrm{LO}} = 1$ n'est pas une valeur ajustée ni un minimum variationnel : c'est le seuil de résolution LO imposé par l'échelle transverse du cœur. □

Règle de recouvrement saturé/non saturé. Pour deux bras i, j, on note $\mathcal{O}_{ij}^{\mathrm{CB3,LO}}$ le recouvrement de raccord utilisé dans la fermeture collective couleur–blanc.

Pour deux sous-cœurs de même niveau familial, le raccord est pris dans le régime saturé :

$$\boxed{\mathcal{O}_{ij}^{\mathrm{CB3,LO}} = 1 \qquad (q_i = q_j).} \tag{28.17}$$

La saturation $\mathcal{O}_{ij}^{\mathrm{CB3,LO}} = 1$ ne signifie pas que la distance géométrique entre les centres est nulle ; elle signifie que, dans la règle de raccord LO, la paire ne porte pas d'amortissement inter-famille non saturé.

Pour deux sous-cœurs de niveaux familiaux distincts, le raccord est évalué au premier cran non saturé du profil canonique :

$$\boxed{\mathcal{O}_{ij}^{\mathrm{CB3,LO}} = (q_{ij}^{\max})^{-3/2}\,\mathrm{sech}(\delta_{\mathrm{CB3}}^{\mathrm{LO}}) = (q_{ij}^{\max})^{-3/2}\,\mathrm{sech}(1) \qquad (q_i \neq q_j).} \tag{28.18}$$

Le facteur $(q_{ij}^{\max})^{-3/2}$ encode l'amortissement inter-famille au rang LO ; le facteur $\mathrm{sech}(1)$ encode le premier raccord non saturé du profil de cœur.

Le défaut de blancheur du CB3 dans la fermeture LO est

$$\boxed{\mathcal{W}_{abc}^{\mathrm{CB3,LO}} = \sum_{i<j} \left[(Q_i^{\mathrm{CB3}})^2 G_i + (Q_j^{\mathrm{CB3}})^2 G_j - 2 Q_i^{\mathrm{CB3}} Q_j^{\mathrm{CB3}} \sqrt{G_i G_j}\, \mathcal{O}_{ij}^{\mathrm{CB3,LO}} \right].} \tag{28.19}$$

Cette quantité mesure le défaut de raccord des trois bras à la moyenne blanche. La normalisation du défaut blanc est celle de (21.34).

Normalisations géométriques de la fermeture CB3. Les préfacteurs de la fermeture collective CB3 sont obtenus par moyenne géométrique sur $\mathbb{S}^3$ et par comptage des sous-structures du nœud blanc.

Lemme 28.5 (Normalisation du défaut blanc CB3)**.** *La contribution de défaut blanc dans la fermeture CB3 porte le facteur*

$$\boxed{\mathcal{N}_{\mathrm{white}}^{\mathrm{CB3}} = \frac{1}{6\pi^2}.} \tag{28.20}$$

Démonstration. La moyenne canonique sur $\mathbb{S}^3$ porte le facteur

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^3)} = \frac{1}{2\pi^2}.$$

Le défaut blanc $\mathcal{W}_{abc}^{\mathrm{CB3,LO}}$ est une quantité pairwise déjà sommée sur les trois paires

$$(i, j) \in \{(a, b), (a, c), (b, c)\}.$$

La contribution moyenne par paire porte donc un partage par

$$N_{\mathrm{pair}} = 3.$$

Ainsi

$$\mathcal{N}_{\text{white}}^{\text{CB3}} = \frac{1}{\text{Vol}(\mathbb{S}^3)} \frac{1}{N_{\text{pair}}} = \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{3} = \frac{1}{6\pi^2}.$$

□

Lemme 28.6 (Normalisation du terme familial pairwise)**.** *La contribution familiale pairwise saturée porte le facteur*

$$\boxed{\mathcal{N}_{\text{fam}}^{\text{CB3}} = \frac{1}{12\pi^2}.} \tag{28.21}$$

Démonstration. Le terme familial est une contribution de recouvrement bilinéaire de paire. Il porte d'abord la moyenne canonique sur $\mathbb{S}^3$,

$$\frac{1}{2\pi^2}.$$

Comme il est évalué sur les trois paires $i < j$, la moyenne pairwise introduit un partage par 3. Enfin la combinaison

$$\frac{\Xi_i + \Xi_j}{2}$$

est le demi-poids de symétrisation de la paire. Le facteur total est donc

$$\mathcal{N}_{\text{fam}}^{\text{CB3}} = \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{3} \frac{1}{2} = \frac{1}{12\pi^2}.$$

□

Lemme 28.7 (Cap fondamental du nœud blanc)**.** *Le cap fondamental de fermeture du nœud blanc porte le facteur*

$$\boxed{\mathcal{N}_{\text{cap}}^{\text{CB3}} = \frac{1}{2\pi q_{\max}}.} \tag{28.22}$$

Démonstration. Le raccord commun du nœud blanc est porté par la grande géodésique de phase. La moyenne sur un cycle complet donne le facteur

$$\frac{1}{2\pi}.$$

Pour un triplet dont le niveau maximal est $q_{\max}$, seule la composante fondamentale commune représente la fraction

$$\frac{1}{q_{\max}}$$

du cycle maximal. Le cap fondamental vaut donc

$$\mathcal{N}_{\text{cap}}^{\text{CB3}} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{q_{\max}} = \frac{1}{2\pi q_{\max}}.$$

□

La fermeture générique LO du CB3 résolu est

$$\boxed{\frac{M_{abc}^{\text{CB3,gen}} c_t^2}{E_*} = 3\tau_3 + \sum_{i=1}^{3} q_i \sigma_i + \frac{1}{6\pi^2} \mathcal{W}_{abc}^{\text{CB3,LO}} - \frac{\tau_3}{2\pi q_{\max}} + \mathcal{F}_{\text{fam}}^{abc}.} \tag{28.23}$$

Ici

$$q_{\max} := \max(q_a, q_b, q_c).$$

Les facteurs $1/(6\pi^2)$, $1/(2\pi q_{\max})$ et $1/(12\pi^2)$ sont respectivement dérivés dans (28.20), (28.22) et (28.21).

Le terme familial commun s'écrit sous forme pairwise saturée :

$$\boxed{\mathcal{F}^{abc}_{\text{fam}} = \frac{\tau_3}{12\pi^2} \sum_{i<j} \left(q_{ij}^{\min} - 1\right) \frac{\Xi_i + \Xi_j}{2} \mathcal{S}_{ij},} \tag{28.24}$$

où

$$q_{ij}^{\min} := \min(q_i, q_j), \qquad q_{ij}^{\max} := \max(q_i, q_j), \qquad \Xi_i := \sigma_i \chi_{X_i},$$

et L'excès familial réduit porté par la paire (i, j) est

$$\boxed{x_{ij}^{\text{fam}} := \frac{2(q_{ij}^{\max} - q_{ij}^{\min})}{3q_c}.} \tag{28.25}$$

Le facteur familial $\mathcal{S}_{ij}$ est une visibilité d'amplitude. Par (28.14), il vaut donc

$$\boxed{\mathcal{S}_{ij} = \sqrt{G(x_{ij}^{\text{fam}})} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2(q_{ij}^{\max} - q_{ij}^{\min})}{3q_c}\right)^2}}.} \tag{28.26}$$

Lorsque deux bras appartiennent au même niveau familial, $x_{ij}^{\text{fam}} = 0$, donc $\mathcal{S}_{ij} = 1$. Lorsque la composante commune d'un sous-couple est raccordée à un excès familial plus élevé, $\mathcal{S}_{ij}$ exprime la visibilité d'amplitude saturée du raccord.

Pour un motif interne de type $\mathsf{udQ}_\uparrow$, où le bras $\mathsf{Q}_\uparrow$-like porte un niveau $q_Q > q_1$, le sous-couple ud possède un mode mécanique de raccord bas. On introduit

$$\eta_+ = \frac{\eta_{\mathsf{u}} + \eta_{\mathsf{d}}}{\sqrt{2}}.$$

Lemme 28.8 (Élimination du mode bas ud)**.** *Le couplage du mode bas η_+ au bras $\mathsf{Q}_\uparrow$-like produit l'abaissement réduit*

$$\boxed{\delta_{\text{bas}}(q_Q) = -\left(1 - \frac{1}{q_Q}\right) \frac{2G_\uparrow(q_Q)}{1 + 2G_\uparrow(q_Q)}.} \tag{28.27}$$

Démonstration. Le mode bas η_+ est le mode symétrique du sous-couple ud. Il possède deux contributions équivalentes, une par bras du sous-couple, d'où le facteur 2. Le bras $\mathsf{Q}_\uparrow$-like se couple à ce mode avec la visibilité saturée $G_\uparrow(q_Q)$. La raideur réduite totale du mode après couplage est donc

$$K_{\text{eff}} = 1 + 2G_\uparrow(q_Q),$$

et la source coopérative réduite est proportionnelle à

$$2G_\uparrow(q_Q).$$

L'élimination stationnaire d'un mode quadratique de la forme

$$\mathcal{E}(\eta_+) = \frac{1}{2} K_{\text{eff}} \eta_+^2 - 2G_\uparrow(q_Q)\eta_+$$

donne une relaxation proportionnelle au rapport

$$\frac{2G_\uparrow(q_Q)}{1 + 2G_\uparrow(q_Q)}.$$

Enfin, seule la fraction excédentaire du bras haut par rapport au fondamental participe à l'abaissement :

$$1 - \frac{1}{q_Q}.$$

Le signe est négatif parce que l'élimination d'un mode mécanique relaxé abaisse l'énergie effective. On obtient donc (28.27). □

L'abaissement énergétique est alors

$$\boxed{\Delta_{\mathrm{bas}}(\mathsf{udQ}_\uparrow) = E_* \tau_3 \, \delta_{\mathrm{bas}}(q_Q) = -E_* \tau_3 \left(1 - \frac{1}{q_Q}\right) \frac{2G_\uparrow(q_Q)}{1 + 2G_\uparrow(q_Q)}.} \tag{28.28}$$

avec la variable réduite de relaxation

$$\boxed{x_\uparrow(q) := \frac{q}{3q_c}.} \tag{28.29}$$

Par le lemme 28.3, le facteur de relaxation est

$$\boxed{G_\uparrow(q) = G(x_\uparrow(q)) = \frac{1}{1 + \left(\frac{q}{3q_c}\right)^2}.} \tag{28.30}$$

La masse du mode bas est donc

$$\boxed{M^{\mathrm{CB3,bas}}_{\mathsf{udQ}_\uparrow} = M^{\mathrm{CB3,gen}}_{\mathsf{udQ}_\uparrow} + \frac{\Delta_{\mathrm{bas}}(\mathsf{udQ}_\uparrow)}{c_t^2}.} \tag{28.31}$$

Sélection de branche. L'équation (28.9) décrit la stationnarité géométrique possible de la branche résolue. Elle ne doit pas être confondue avec la règle de raccord consommée dans la fermeture collective couleur–blanc (28.23). Dans cette fermeture, les recouvrements de paires sont évalués par la règle saturé/non saturé (28.17)–(28.18), avec le seuil $\delta^{\mathrm{LO}}_{\mathrm{CB3}} = 1$ défini en (28.16).

La branche CB3 résolue retient les configurations pour lesquelles les trois centres restent identifiables et pour lesquelles la fermeture collective couleur–blanc (28.23) est applicable. Lorsque le recouvrement devient fort, les lobes ne doivent plus être lus comme trois constituants indépendants : la description bascule vers la branche breather traitée ci-dessous.

Compatibilité cinématique en mouvement de la branche CB3 résolue. La branche CB3 résolue est une solution composée couleur–blanc à trois sous-cœurs identifiables. Elle n'est pas lue comme une branche de fort recouvrement : les trois centres restent distinguables et la fermeture collective (28.23) s'applique avec les règles de recouvrement de paires (28.17)– (28.18) et le seuil de raccord (28.16).

Lorsque les trois sous-cœurs forment une configuration collective stationnaire, la branche possède un centre de masse comobile, une énergie propre finie

$$E_0^{\mathrm{CB3}} = M_{\mathrm{CB3}} c_t^2,$$

et une impulsion longitudinale totale nulle dans ce repère :

$$P_0^{\mathrm{CB3}} = 0.$$

La branche entre alors dans le cadre des solutions localisées massiques de §7.1.

La loi de boost s'applique au mouvement global du composé, avec la vitesse caractéristique tangentielle

$$c_{\mathcal{F}} = c_t.$$

On obtient

$$E^{\mathrm{CB3}}(u) = \Gamma_t E_0^{\mathrm{CB3}}, \qquad P^{\mathrm{CB3}}(u) = \Gamma_t \frac{u}{c_t^2} E_0^{\mathrm{CB3}}, \qquad \Gamma_t = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c_t^2}}.$$

La dispersion effective du composé est donc

$$\left(E^{\mathrm{CB3}}(u)\right)^2 = \left(E_0^{\mathrm{CB3}}\right)^2 + c_t^2 \left(P^{\mathrm{CB3}}(u)\right)^2.$$

Variables internes et portée du boost collectif. La loi précédente concerne le mouvement global du composé couleur–blanc. Elle suppose que les degrés internes de séparation et de raccord restent dans la configuration collective utilisée par la fermeture (28.23). Si les trois sous-cœurs portent des mouvements relatifs indépendants, la branche ne se réduit plus à un unique cœur massique : la cinématique doit alors être écrite en variables collectives, avec un centre de masse et des variables internes de séparation.

Compatibilité radiale. La source radiale associée à une branche CB3 résolue est une somme finie de sources de sous-cœurs localisées et de recouvrements de paires localisés. Lorsque la configuration collective est comobile, cette source totale reste localisée dans la coordonnée comobile du centre du composé. L'opérateur radial de gaine est l'opérateur commun du critère (7.3). La gaine strictement comobile est donc localisée pour

$$|u| < c_r, \qquad c_r^2 = \kappa_r c_t^2.$$

Pour $|u| \geq c_r$, la réponse radiale ne relève plus d'une gaine Yukawa strictement comobile au même rang.

Portée. Cette compatibilité cinématique vaut pour la branche CB3 résolue lorsque les trois sous-cœurs restent identifiables et que la fermeture collective couleur–blanc est applicable. Elle ne s'applique pas aux régimes de fort recouvrement, ni aux configurations où les trois sous-cœurs doivent être traités comme des mouvements relatifs indépendants.

28.5 Branche breather (recouvrement fort) : champ composé, recouvrements et fermeture

Objet. En recouvrement fort, l'approximation en potentiels de paire entre centres n'est plus suffisante : le composite est traité comme une *solution unitaire multi–lobe*. Sa structure interne est paramétrée par :

— une séparation réduite δ (géométrie CB2/CB3),

— un vecteur de poids internes w, qui code la forme relative des lobes.

Le point clef est que w n'est pas un choix arbitraire : il est déterminé par stationnarité sous contraintes (blancheur, Gram, normalisation).

Spin géométrique de la branche breather 3DOF

Statut unitaire. Dans la branche breather 3DOF, le composé est traité comme une *solution 3DOF unitaire* multi-lobe : le recouvrement fort interdit de lire les lobes comme des constituants indépendants au niveau du cycle rapide. La structure conique porte donc un unique biais α, donc une unique projection

$$\sigma = \sin^2 \alpha.$$

Classe géométrique. La solution rapide unitaire 3DOF correspondante conserve une seule polarisation circulaire tangentielle indépendante,

$$N_{\mathrm{pol}} = 1,$$

et un cycle rapide fondamental

$$\nu = 1.$$

Le comptage géométrique commun donne alors

$$s_g = \frac{\nu N_{\mathrm{pol}}}{2} = \frac{1}{2}.$$

La branche breather 3DOF appartient ainsi à la classe spinorielle demi-entière.

Norme et projection. Comme pour toute branche 3DOF unitaire de cette classe, le module du spin vaut

$$\boxed{|S_{\mathrm{Br3}}| = \frac{1}{2}\, h_{\mathrm{eff}}, \qquad s_g^{(\mathrm{Br3})} = \frac{1}{2}.}$$

L'axe conique fournit une direction privilégiée de projection, et l'hélicité

$$\varsigma = \pm 1$$

donne alors

$$\boxed{S_{\parallel}^{(\mathrm{Br3})} = \varsigma\, \frac{1}{2}\, h_{\mathrm{eff}}, \qquad \varsigma = \pm 1.}$$

Portée. Le caractère multi-lobe de la branche breather 3DOF modifie la forme interne et la fermeture en δ, mais non la classe géométrique du cycle rapide. La branche reste une solution unitaire de type spinoriel demi-entier ; elle ne doit donc pas être confondue avec une branche vectorielle entière de type Z-like.

Angle conique 3DOF : unicité de α (donc de σ) en branche breather. Dans la branche breather, le composé est traité comme une *solution 3DOF unitaire* portant une porteuse unique ω_0 et une seule échelle λ_*. Une solution 3DOF unitaire est caractérisée par un biais conique constant α, donc par

$$\sigma = \sin^2 \alpha \in \left\{ \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3} \right\}.$$

En conséquence, un breather multi–lobe (CB2/CB3) ne peut pas combiner plusieurs valeurs coniques au niveau de ses lobes : de telles compositions exigeraient plusieurs porteuses, plusieurs déphasages, ou un α spatialement variable, et sortent de la classe des solutions stationnaires 3DOF considérée ici. Dans la présente branche, σ intervient uniquement dans la conversion $\lambda_* \mapsto m$ via $\omega_{\mathrm{br}} = \sigma\, \omega_0$.

28.5.1 Ansatz composé et fonctionnelles de recouvrement

Ansatz (CB2/CB3). On modélise le champ composé par une superposition pondérée de profils de cœur LO $a(\xi) = \operatorname{sech} \xi$:

$$\Phi(\xi) = \sum_{i=1}^{N} w_i\, a(\xi - \xi_i), \qquad N \in \{2, 3\}, \tag{28.32}$$

où $\{\xi_i\}$ sont les positions canoniques (CB2 : $\{-\delta, +\delta\}$, CB3 : $\{-\delta, 0, +\delta\}$).

Moments et recouvrements (convention translationnelle 3D locale). Avec la mesure locale tangentielle d^3x, on pose

$$J_0 = \int_{\mathbb{R}^3} a(|\mathbf{x}|)^2 \, d^3x, \qquad J_2 = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla a(|\mathbf{x}|)|^2 \, d^3x, \qquad J_4 = \int_{\mathbb{R}^3} a(|\mathbf{x}|)^4 \, d^3x.$$

Pour le profil radial canonique $a(r) = \operatorname{sech} r$, ces constantes coïncident avec les intégrales radiales

$$J_0 = \int_0^\infty 4\pi r^2 a(r)^2 \, dr, \qquad J_2 = \int_0^\infty 4\pi r^2 a'(r)^2 \, dr, \qquad J_4 = \int_0^\infty 4\pi r^2 a(r)^4 \, dr.$$

Pour deux centres séparés d'une distance réduite Δ, les recouvrements sont définis par translation 3D du centre du profil :

$$\boxed{\begin{aligned} J_0^\times(\Delta) &:= \int_{\mathbb{R}^3} a(|\mathbf{x}|)\, a(|\mathbf{x}-\mathbf{d}|)\, d^3x, \\ J_2^\times(\Delta) &:= \int_{\mathbb{R}^3} \nabla a(|\mathbf{x}|) \cdot \nabla a(|\mathbf{x}-\mathbf{d}|)\, d^3x, \\ J_4^\times(\Delta) &:= \int_{\mathbb{R}^3} a(|\mathbf{x}|)^2\, a(|\mathbf{x}-\mathbf{d}|)^2\, d^3x, \qquad |\mathbf{d}| = \Delta. \end{aligned}} \tag{28.33}$$

Sous forme radiale-angulaire, en posant

$$R(r, \mu; \Delta) = \sqrt{r^2 + \Delta^2 - 2r\Delta\mu},$$

on a

$$J_0^\times(\Delta) = 2\pi \int_0^\infty r^2 \, dr \int_{-1}^1 a(r)\, a(R(r,\mu;\Delta)) \, d\mu,$$
$$J_4^\times(\Delta) = 2\pi \int_0^\infty r^2 \, dr \int_{-1}^1 a(r)^2\, a(R(r,\mu;\Delta))^2 \, d\mu.$$

Pour le terme gradient, comme

$$\nabla a(|\mathbf{x}|) = a'(r)\,\frac{\mathbf{x}}{r}, \qquad \nabla a(|\mathbf{x}-\mathbf{d}|) = a'(R)\,\frac{\mathbf{x}-\mathbf{d}}{R},$$

il vient

$$J_2^\times(\Delta) = 2\pi \int_0^\infty r^2 \, dr \int_{-1}^1 a'(r)\, a'(R(r,\mu;\Delta)) \, \frac{r - \Delta\mu}{R(r,\mu;\Delta)} \, d\mu.$$

Cette convention assure

$$J_0^\times(0) = J_0, \qquad J_2^\times(0) = J_2, \qquad J_4^\times(0) = J_4,$$

et elle est compatible avec la positivité de la matrice de Gram :

$$0 \le J_0^\times(\Delta) \le J_0.$$

Elle évite l'incohérence qui apparaîtrait avec un décalage radial direct $a(r-\Delta)$ sous la mesure $4\pi r^2 dr$, lequel ne représente pas une translation 3D du profil.

On a $J_0^\times(0) = J_0$, $J_2^\times(0) = J_2$, $J_4^\times(0) = J_4$.

Formes S_0, S_2 et réduction quartique pair-à-pair. Pour une géométrie donnée ($\Delta_{ij} = |\xi_i - \xi_j|$), on définit

$$\boxed{S_p[w;\delta] = \sum_{i=1}^N w_i^2\, J_p + 2 \sum_{1 \le i < j \le N} w_i w_j \, J_p^\times(\Delta_{ij}), \qquad p \in \{0, 2\}.} \tag{28.34}$$

Pour le canal Préclusion, la réduction effective pair-à-pair utilisée est

$$\boxed{S_{4,\mathrm{pair}}[w;\delta] = 6 \sum_{1 \le i < j \le N} (w_i w_j)^2 \, J_4^\times(\Delta_{ij}).} \tag{28.35}$$

Canal fort-like : réduction pair-à-pair. Dans la branche breather, l'attraction fort-like est supposée pair-à-pair et portée par le recouvrement quartique $J_4^{\times}$. La charge forte effective d'un lobe étant proportionnelle au module de son poids interne, on fixe

$$\boxed{c_{ij}^{(\mathsf{F})}(w) = |w_i w_j|.} \tag{28.36}$$

Le numérateur fort-like réduit s'écrit donc

$$\boxed{N_{\mathsf{F}}[w;\delta] = \sum_{1\le i<j\le N} |w_i w_j|\, J_4^{\times}(\Delta_{ij}).} \tag{28.37}$$

Cas CB2/CB3. **CB2 :** $\Delta_{12} = 2\delta$. **CB3 :** $\{\Delta_{ij}\} = \{\delta, \delta, 2\delta\}$.

28.5.2 Contraintes internes : blancheur, Gram, normalisation

Blancheur (filtre de canal). Au niveau du champ composé, la blancheur s'implémente comme une contrainte linéaire sur w, déduite de la définition de la charge forte I_{s} et du projecteur $\boldsymbol{\pi}^{(\mathsf{col})}$:

$$\boxed{\mathcal{C}_{\mathrm{white}}(w) = 0.} \tag{28.38}$$

Exclusion mécanique (Gram). La superposition doit rester non dégénérée : la matrice de Gram des lobes doit rester définie positive, ce qui impose $\delta \ge \delta_{\min} > 0$.

Normalisation (verrou). Le problème variationnel est homogène sous $w \mapsto \lambda w$. On impose donc

$$\boxed{S_0[w;\delta] = 1.} \tag{28.39}$$

28.5.3 Impédances effectives, fermeture $\mathcal{D}_{\mathrm{LO}}$ et énergie structurale

Fermeture canonique commune et paramètre réduit de branche. On utilise la même fermeture pour les branches breather 3DOF. Dans ces fermetures, le paramètre qui pondère les contributions de gradient et de réponse de cœur est un paramètre réduit sans dimension. Pour éviter toute confusion avec le coefficient radial global κ_r de la théorie HSM, on le note

$$\eta_{\mathrm{br}}^{(3)}.$$

Il ne doit pas être lu comme une nouvelle constante libre : il désigne la combinaison réduite de branche obtenue après passage à l'échelle du cœur et choix de la fermeture breather 3DOF. Sa relation éventuelle avec les paramètres radiaux globaux appartient à la fermeture de branche, et non à la notation générique des formes réduites ci-dessous.

Les formes quadratiques normalisées sont

$$\widehat{s}_2[w;\delta] = \frac{S_2[w;\delta]}{S_0[w;\delta]}, \qquad \widehat{s}_{4,\mathrm{pair}}[w;\delta] = \frac{S_{4,\mathrm{pair}}[w;\delta]}{S_0[w;\delta]^2}$$

et le numérateur attractive forte–like normalisé est

$$\widehat{n}_{\mathsf{F}}[w;\delta] = \frac{N_{\mathsf{F}}[w;\delta]}{S_0[w;\delta]}.$$

Ainsi

$$\boxed{\beta^{(\mathsf{P})}[w;\delta] = \eta_{\mathrm{br}}^{(3)}\,\Gamma_{\mathrm{P}}\,\frac{\widehat{s}_{4,\mathrm{pair}}[w;\delta]}{\left(1+\left(\eta_{\mathrm{br}}^{(3)}\right)^{-1}\widehat{s}_2[w;\delta]\right)^2}, \qquad \beta^{(\mathsf{F})}[w;\delta] = \zeta_{3D}\,\frac{\widehat{n}_{\mathsf{F}}[w;\delta]}{1+\left(\eta_{\mathrm{br}}^{(3)}\right)^{-1}\widehat{s}_2[w;\delta]}.} \tag{28.40}$$

On pose

$$\boxed{\beta^{(\mathrm{eff})}[w;\delta] = \beta^{(\mathsf{F})}[w;\delta] - \beta^{(\mathsf{P})}[w;\delta].} \tag{28.41}$$

Noyaux de fermeture. On pose

$$K_0^{(Z)} := J_0^2, \qquad K_2^{(Z)} := J_0 J_2.$$

Pour une branche normalisée par $S_0[w;\delta]$, on utilise

$$K_0[w;\delta] = K_0^{(Z)}, \qquad K_2[w;\delta] = \widehat{s}_2[w;\delta]\, K_2^{(Z)}, \qquad K[w;\delta] = K_0[w;\delta] + K_2[w;\delta].$$

Le dénominateur LO est alors

$$\boxed{\mathcal{D}_{\mathrm{LO}}[w;\delta] = \eta_{\mathrm{br}}^{(3)} \Big(K[w;\delta] - \beta^{(\mathrm{eff})}[w;\delta]\, K_0[w;\delta] \Big) - \beta^{(\mathrm{eff})}[w;\delta]\, K_2[w;\delta].} \tag{28.42}$$

La fermeture LO+ ajoute l'auto–induction de gaine :

$$\boxed{\mathcal{D}_{\mathrm{LO+}}[w;\delta] = \mathcal{D}_{\mathrm{LO}}[w;\delta] + \Gamma_{\mathrm{shape}} K_0^{(Z)}.} \tag{28.43}$$

Lien avec l'énergie structurale. La fermeture donne

$$\boxed{\lambda_*^4[w;\delta] = \frac{2h_{\mathrm{eff}}\sqrt{\rho T}}{\mathcal{D}_{\mathrm{LO}}[w;\delta]}, \qquad \mathcal{D}_{\mathrm{LO}}[w;\delta] > 0.} \tag{28.44}$$

La masse de branche est portée par la fréquence

$$\omega_{\mathrm{br}} = \sigma\, \frac{c_t}{\lambda_*}.$$

À w fixé, l'énergie structurale est donc une fonction strictement croissante de $\mathcal{D}_{\mathrm{LO}}$:

$$\boxed{E_{\mathrm{br}}[w;\delta] = h_{\mathrm{eff}}\sigma \frac{c_t}{\lambda_*} = C_{\mathrm{br}}\, \left(\mathcal{D}_{\mathrm{LO}}[w;\delta]\right)^{1/4}, \qquad C_{\mathrm{br}} > 0.} \tag{28.45}$$

Ainsi, sur le domaine admissible positif, minimiser l'énergie structurale est équivalent à minimiser $\mathcal{D}_{\mathrm{LO}}$. Si le minimum est intérieur,

$$\partial_\delta E_{\mathrm{br}} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \partial_\delta \mathcal{D}_{\mathrm{LO}} = 0,$$

et le critère de second ordre est identique.

28.5.4 Domaine admissible et principe de sélection des breathers

Principe commun. Dans la branche breather, le motif brut $\bar{w}$ fixe la classe interne considérée. La normalisation

$$\widehat{w}(\delta) = \frac{\bar{w}}{\sqrt{S_0[\bar{w};\delta]}}$$

est ensuite imposée branche par branche dans les spécialisations ci-dessous. La sélection ne porte donc plus sur une famille arbitraire de poids w, mais sur la séparation δ à motif brut fixé.

Borne basse et borne haute. La séparation appartient à l'intervalle géométrique

$$\delta \in [\delta^{\mathrm{br}}_{\min}, \delta_{\max}],$$

où $\delta^{\mathrm{br}}_{\min} > 0$ est la borne de non–dégénérescence de Gram de la branche considérée, et où

$$\delta_{\max} = \frac{u^\star_*}{2}$$

est la borne MSE canonique définie par (27.17).

Domaine admissible positif. La fermeture breather impose en plus la positivité du dénominateur :

$$\mathcal{D}^{\mathrm{br}}_{\mathrm{LO}}(\delta) > 0.$$

Pour chaque branche spécialisée, on définit donc un domaine admissible positif

$$I^{+,\mathrm{br}}_{\mathrm{adm}} = \left\{ \delta \in [\delta^{\mathrm{br}}_{\min}, \delta_{\max}] \ : \ \mathcal{D}^{\mathrm{br}}_{\mathrm{LO}}(\delta) > 0 \right\}.$$

Les formes explicites de ce domaine sont données plus bas pour Br2, Br3 neutre et Br3 chargé.

Séparation sélectionnée. La séparation breather est définie par minimisation de l'énergie structurale. Comme

$$E^{\mathrm{br}}_{\mathrm{br}}(\delta) = C_{\mathrm{br}} \left(\mathcal{D}^{\mathrm{br}}_{\mathrm{LO}}(\delta) \right)^{1/4}, \qquad C_{\mathrm{br}} > 0,$$

sur le domaine admissible positif, cette minimisation est équivalente à

$$\delta^{\mathrm{br}}_* \in \arg\min_{\delta \in I^{+,\mathrm{br}}_{\mathrm{adm}}} \mathcal{D}^{\mathrm{br}}_{\mathrm{LO}}(\delta).$$

Si le minimum est intérieur, il vérifie

$$\partial_\delta \mathcal{D}^{\mathrm{br}}_{\mathrm{LO}}(\delta_*) = 0, \qquad \partial^2_\delta \mathcal{D}^{\mathrm{br}}_{\mathrm{LO}}(\delta_*) > 0.$$

Une valeur de bord n'est admissible que comme optimum contraint du domaine positif, et non comme hypothèse imposée.

Spécialisation canonique Br2. Pour la branche breather bilobe, les deux centres sont placés en

$$\{-\delta, +\delta\}, \qquad d_{12} = 2\delta.$$

Le motif entier brut est déterminé par les contraintes discrètes minimales de la branche neutre bilobe. Si

$$\bar{w} = (m, n) \in \mathbb{Z}^2,$$

la neutralité impose

$$m + n = 0.$$

La primitivité du motif impose ensuite

$$\gcd(|m|, |n|) = 1,$$

et la convention d'orientation fixe $m > 0$. Il vient donc

$$m = 1, \qquad n = -1.$$

Ainsi le motif brut canonique de la branche Br2 est

$$\boxed{\bar{w}_{\mathrm{Br2}} = (1, -1).} \tag{28.46}$$

Le changement global de signe correspond à l'orientation conjuguée et ne définit pas une branche nouvelle au rang LO. Les sommes brutes de forme se réduisent à

$$\boxed{S_0^{\mathrm{Br2}}(\delta) = 2\big(J_0 - J_0^{\times}(2\delta)\big), \qquad S_2^{\mathrm{Br2}}(\delta) = 2\big(J_2 - J_2^{\times}(2\delta)\big).} \tag{28.47}$$

La réduction quartique pair–à–pair brute vaut

$$\boxed{S_{4,\mathrm{pair}}^{\mathrm{Br2}}(\delta) = 6\, J_4^{\times}(2\delta).} \tag{28.48}$$

Le numérateur fort–like brut est

$$\boxed{N_{\mathsf{F}}^{\mathrm{Br2}}(\delta) = J_4^{\times}(2\delta).} \tag{28.49}$$

On normalise le motif par

$$\widehat{w}_{\mathrm{Br2}}(\delta) = \frac{(1, -1)}{\sqrt{S_0^{\mathrm{Br2}}(\delta)}}.$$

Les quantités réduites consommées par la fermeture sont

$$\boxed{\widehat{s}_2^{\mathrm{Br2}}(\delta) = \frac{S_2^{\mathrm{Br2}}(\delta)}{S_0^{\mathrm{Br2}}(\delta)}, \qquad \widehat{s}_{4,\mathrm{pair}}^{\mathrm{Br2}}(\delta) = \frac{S_{4,\mathrm{pair}}^{\mathrm{Br2}}(\delta)}{\big(S_0^{\mathrm{Br2}}(\delta)\big)^2}, \qquad \widehat{n}_{\mathsf{F}}^{\mathrm{Br2}}(\delta) = \frac{N_{\mathsf{F}}^{\mathrm{Br2}}(\delta)}{S_0^{\mathrm{Br2}}(\delta)}.} \tag{28.50}$$

On pose

$$\boxed{\beta_{\mathrm{Br2}}^{(\mathsf{F})}(\delta) = \zeta_{3D}\, \frac{\widehat{n}_{\mathsf{F}}^{\mathrm{Br2}}(\delta)}{1 + \left(\eta_{\mathrm{br}}^{(3)}\right)^{-1} \widehat{s}_2^{\mathrm{Br2}}(\delta)}.} \tag{28.51}$$

La contribution de Préclusion est

$$\boxed{\beta_{\mathrm{Br2}}^{(\mathsf{P})}(\delta) = \eta_{\mathrm{br}}^{(3)}\, \Gamma_{\mathrm{P}}\, \frac{\widehat{s}_{4,\mathrm{pair}}^{\mathrm{Br2}}(\delta)}{\left(1 + \left(\eta_{\mathrm{br}}^{(3)}\right)^{-1} \widehat{s}_2^{\mathrm{Br2}}(\delta)\right)^2}.} \tag{28.52}$$

Ainsi

$$\boxed{\beta_{\mathrm{Br2}}^{(\mathrm{eff})}(\delta) := \beta_{\mathrm{Br2}}^{(\mathsf{F})}(\delta) - \beta_{\mathrm{Br2}}^{(\mathsf{P})}(\delta).} \tag{28.53}$$

Les noyaux associés sont

$$\boxed{K_{0,\mathrm{Br2}}(\delta) = K_0^{(Z)}, \qquad K_{2,\mathrm{Br2}}(\delta) = \widehat{s}_2^{\mathrm{Br2}}(\delta)\, K_2^{(Z)}, \qquad K_{\mathrm{Br2}}(\delta) = K_{0,\mathrm{Br2}}(\delta) + K_{2,\mathrm{Br2}}(\delta).} \tag{28.54}$$

Le dénominateur de fermeture LO est

$$\boxed{\mathcal{D}_{\mathrm{LO}}^{\mathrm{Br2}}(\delta) = \eta_{\mathrm{br}}^{(3)} \Big(K_{\mathrm{Br2}}(\delta) - \beta_{\mathrm{Br2}}^{(\mathrm{eff})}(\delta)\, K_{0,\mathrm{Br2}}(\delta)\Big) - \beta_{\mathrm{Br2}}^{(\mathrm{eff})}(\delta)\, K_{2,\mathrm{Br2}}(\delta).} \tag{28.55}$$

En LO+ :

$$\boxed{\mathcal{D}_{\mathrm{LO+}}^{\mathrm{Br2}}(\delta) = \mathcal{D}_{\mathrm{LO}}^{\mathrm{Br2}}(\delta) + \Gamma_{\mathrm{shape}} K_0^{(Z)}.} \tag{28.56}$$

Le domaine admissible positif est

$$\boxed{I_{\mathrm{adm}}^{+,\mathrm{Br2}} = \Big\{\delta \in [\delta_{\min}^{\mathrm{Br2}}, \delta_{\max}] \ :\ \mathcal{D}_{\mathrm{LO}}^{\mathrm{Br2}}(\delta) > 0\Big\}.} \tag{28.57}$$

La séparation sélectionnée est alors

$$\boxed{\delta_*^{\mathrm{Br2}} \in \arg\min_{\delta \in I_{\mathrm{adm}}^{+,\mathrm{Br2}}} \mathcal{D}_{\mathrm{LO}}^{\mathrm{Br2}}(\delta).} \tag{28.58}$$

Spécialisation canonique Br3 neutre. Pour la branche breather trilobe neutre, on fixe le motif brut

$$\bar{w}_{\mathrm{Br3,n}} = (1, -2, 1).$$

Les trois centres sont placés en

$$\{-\delta, 0, +\delta\},$$

donc

$$d_{12} = d_{23} = \delta, \qquad d_{13} = 2\delta.$$

Les sommes brutes de forme sont

$$\boxed{S_0^{\mathrm{Br3,n}}(\delta) = S_0[(1,-2,1);\delta], \qquad S_2^{\mathrm{Br3,n}}(\delta) = S_2[(1,-2,1);\delta].} \tag{28.59}$$

En utilisant la bilinéarité des formes S_p, on obtient explicitement

$$\boxed{S_p^{\mathrm{Br3,n}}(\delta) = 6J_p - 8J_p^{\times}(\delta) + 2J_p^{\times}(2\delta), \qquad p \in \{0,2\}.} \tag{28.60}$$

La réduction quartique pair–à–pair brute est

$$\boxed{S_{4,\mathrm{pair}}^{\mathrm{Br3,n}}(\delta) = 6\left(8J_4^{\times}(\delta) + J_4^{\times}(2\delta)\right).} \tag{28.61}$$

Le numérateur fort–like brut est

$$\boxed{N_{\mathsf{F}}^{\mathrm{Br3,n}}(\delta) = 4J_4^{\times}(\delta) + J_4^{\times}(2\delta).} \tag{28.62}$$

On normalise le motif par

$$\widehat{w}_{\mathrm{Br3,n}}(\delta) = \frac{(1,-2,1)}{\sqrt{S_0^{\mathrm{Br3,n}}(\delta)}}.$$

Les quantités réduites consommées par la fermeture sont

$$\boxed{\widehat{s}_2^{\mathrm{Br3,n}}(\delta) = \frac{S_2^{\mathrm{Br3,n}}(\delta)}{S_0^{\mathrm{Br3,n}}(\delta)}, \qquad \widehat{s}_{4,\mathrm{pair}}^{\mathrm{Br3,n}}(\delta) = \frac{S_{4,\mathrm{pair}}^{\mathrm{Br3,n}}(\delta)}{\left(S_0^{\mathrm{Br3,n}}(\delta)\right)^2}, \qquad \widehat{n}_{\mathsf{F}}^{\mathrm{Br3,n}}(\delta) = \frac{N_{\mathsf{F}}^{\mathrm{Br3,n}}(\delta)}{S_0^{\mathrm{Br3,n}}(\delta)}.} \tag{28.63}$$

On pose

$$\boxed{\beta_{\mathrm{Br3,n}}^{(\mathsf{F})}(\delta) = \zeta_{3D}\,\frac{\widehat{n}_{\mathsf{F}}^{\mathrm{Br3,n}}(\delta)}{1 + \left(\eta_{\mathrm{br}}^{(3)}\right)^{-1}\widehat{s}_2^{\mathrm{Br3,n}}(\delta)}.} \tag{28.64}$$

La contribution de Préclusion est

$$\boxed{\beta_{\mathrm{Br3,n}}^{(\mathsf{P})}(\delta) = \eta_{\mathrm{br}}^{(3)}\,\Gamma_{\mathrm{P}}\,\frac{\widehat{s}_{4,\mathrm{pair}}^{\mathrm{Br3,n}}(\delta)}{\left(1 + \left(\eta_{\mathrm{br}}^{(3)}\right)^{-1}\widehat{s}_2^{\mathrm{Br3,n}}(\delta)\right)^2}.} \tag{28.65}$$

Ainsi

$$\boxed{\beta_{\mathrm{Br3,n}}^{(\mathrm{eff})}(\delta) := \beta_{\mathrm{Br3,n}}^{(\mathsf{F})}(\delta) - \beta_{\mathrm{Br3,n}}^{(\mathsf{P})}(\delta).} \tag{28.66}$$

Les noyaux associés sont

$$\boxed{K_{0,\mathrm{Br3,n}}(\delta) = K_0^{(Z)}, \qquad K_{2,\mathrm{Br3,n}}(\delta) = \widehat{s}_2^{\mathrm{Br3,n}}(\delta)\,K_2^{(Z)}, \qquad K_{\mathrm{Br3,n}}(\delta) = K_{0,\mathrm{Br3,n}}(\delta) + K_{2,\mathrm{Br3,n}}(\delta).} \tag{28.67}$$

Le dénominateur de fermeture LO est

$$\boxed{\mathcal{D}_{\mathrm{LO}}^{\mathrm{Br3,n}}(\delta) = \eta_{\mathrm{br}}^{(3)} \left(K_{\mathrm{Br3,n}}(\delta) - \beta_{\mathrm{Br3,n}}^{(\mathrm{eff})}(\delta)\, K_{0,\mathrm{Br3,n}}(\delta) \right) - \beta_{\mathrm{Br3,n}}^{(\mathrm{eff})}(\delta)\, K_{2,\mathrm{Br3,n}}(\delta).} \tag{28.68}$$

En LO+ :

$$\boxed{\mathcal{D}_{\mathrm{LO+}}^{\mathrm{Br3,n}}(\delta) = \mathcal{D}_{\mathrm{LO}}^{\mathrm{Br3,n}}(\delta) + \Gamma_{\mathrm{shape}} K_0^{(Z)}.} \tag{28.69}$$

Le domaine admissible positif est

$$\boxed{I_{\mathrm{adm}}^{+,\mathrm{Br3,n}} = \left\{ \delta \in [\delta_{\min}^{\mathrm{Br3}}, \delta_{\max}] \ : \ \mathcal{D}_{\mathrm{LO}}^{\mathrm{Br3,n}}(\delta) > 0 \right\}.} \tag{28.70}$$

La séparation sélectionnée est alors

$$\boxed{\delta_*^{\mathrm{Br3,n}} \in \arg \min_{\delta \in I_{\mathrm{adm}}^{+,\mathrm{Br3,n}}} \mathcal{D}_{\mathrm{LO}}^{\mathrm{Br3,n}}(\delta).} \tag{28.71}$$

Spécialisation canonique Br3 chargée. Pour la branche chargée, on cherche un motif entier brut

$$\bar{w} = (a, b, a) \in \mathbb{Z}^3$$

compatible avec la symétrie gauche–droite du tri-lobe. Le label de charge discret est

$$n_{\mathrm{EM}}(\bar{w}) = a + b + a = 2a + b.$$

La branche chargée minimale impose

$$n_{\mathrm{EM}}(\bar{w}) = 1.$$

Le motif doit être primitif,

$$\gcd(|a|, |b|) = 1,$$

et porter réellement trois lobes, donc $a \neq 0$. Avec la convention d'orientation $a > 0$, le plus petit choix admissible est

$$a = 1, \qquad b = -1,$$

d'où

$$\boxed{\bar{w}_{\mathrm{Br3,c}} = (1, -1, 1).} \tag{28.72}$$

Les trois centres sont placés en

$$\{-\delta, 0, +\delta\},$$

donc

$$d_{12} = d_{23} = \delta, \qquad d_{13} = 2\delta.$$

Ce motif est traité comme réduction discrète effective d'une zone chargée-like de la branche symétrique continue $w(\delta) \sim (1, \alpha_-(\delta), 1)$.

Les sommes brutes de forme sont

$$\boxed{S_0^{\mathrm{Br3,c}}(\delta) = S_0[(1, -1, 1); \delta], \qquad S_2^{\mathrm{Br3,c}}(\delta) = S_2[(1, -1, 1); \delta].} \tag{28.73}$$

En utilisant la bilinéarité des formes S_p, on obtient explicitement

$$\boxed{S_p^{\mathrm{Br3,c}}(\delta) = 3J_p - 4J_p^{\times}(\delta) + 2J_p^{\times}(2\delta), \qquad p \in \{0, 2\}.} \tag{28.74}$$

La réduction quartique pair–à–pair brute est

$$\boxed{S_{4,\mathrm{pair}}^{\mathrm{Br3,c}}(\delta) = 6\left(2J_4^{\times}(\delta) + J_4^{\times}(2\delta)\right).} \tag{28.75}$$

Le numérateur fort–like brut est

$$\boxed{N_{\mathsf{F}}^{\mathrm{Br3,c}}(\delta) = 2J_4^{\times}(\delta) + J_4^{\times}(2\delta).} \tag{28.76}$$

On normalise le motif par

$$\widehat{w}_{\mathrm{Br3,c}}(\delta) = \frac{(1,-1,1)}{\sqrt{S_0^{\mathrm{Br3,c}}(\delta)}}.$$

Les quantités réduites consommées par la fermeture sont

$$\boxed{\widehat{s}_2^{\mathrm{Br3,c}}(\delta) = \frac{S_2^{\mathrm{Br3,c}}(\delta)}{S_0^{\mathrm{Br3,c}}(\delta)}, \qquad \widehat{s}_{4,\mathrm{pair}}^{\mathrm{Br3,c}}(\delta) = \frac{S_{4,\mathrm{pair}}^{\mathrm{Br3,c}}(\delta)}{\left(S_0^{\mathrm{Br3,c}}(\delta)\right)^2}, \qquad \widehat{n}_{\mathsf{F}}^{\mathrm{Br3,c}}(\delta) = \frac{N_{\mathsf{F}}^{\mathrm{Br3,c}}(\delta)}{S_0^{\mathrm{Br3,c}}(\delta)}.} \tag{28.77}$$

On pose

$$\boxed{\beta_{\mathrm{Br3,c}}^{(\mathsf{F})}(\delta) = \zeta_{3D}\,\frac{\widehat{n}_{\mathsf{F}}^{\mathrm{Br3,c}}(\delta)}{1 + \left(\eta_{\mathrm{br}}^{(3)}\right)^{-1}\widehat{s}_2^{\mathrm{Br3,c}}(\delta)}.} \tag{28.78}$$

La contribution de Préclusion est

$$\boxed{\beta_{\mathrm{Br3,c}}^{(\mathsf{P})}(\delta) = \eta_{\mathrm{br}}^{(3)}\,\Gamma_{\mathrm{P}}\,\frac{\widehat{s}_{4,\mathrm{pair}}^{\mathrm{Br3,c}}(\delta)}{\left(1 + \left(\eta_{\mathrm{br}}^{(3)}\right)^{-1}\widehat{s}_2^{\mathrm{Br3,c}}(\delta)\right)^2}.} \tag{28.79}$$

Ainsi

$$\boxed{\beta_{\mathrm{Br3,c}}^{(\mathrm{eff})}(\delta) := \beta_{\mathrm{Br3,c}}^{(\mathsf{F})}(\delta) - \beta_{\mathrm{Br3,c}}^{(\mathsf{P})}(\delta).} \tag{28.80}$$

Les noyaux associés sont

$$\boxed{K_{0,\mathrm{Br3,c}}(\delta) = K_0^{(Z)}, \qquad K_{2,\mathrm{Br3,c}}(\delta) = \widehat{s}_2^{\mathrm{Br3,c}}(\delta)\,K_2^{(Z)}, \qquad K_{\mathrm{Br3,c}}(\delta) = K_{0,\mathrm{Br3,c}}(\delta) + K_{2,\mathrm{Br3,c}}(\delta).} \tag{28.81}$$

Le dénominateur de fermeture LO est

$$\boxed{\mathcal{D}_{\mathrm{LO}}^{\mathrm{Br3,c}}(\delta) = \eta_{\mathrm{br}}^{(3)}\left(K_{\mathrm{Br3,c}}(\delta) - \beta_{\mathrm{Br3,c}}^{(\mathrm{eff})}(\delta)\,K_{0,\mathrm{Br3,c}}(\delta)\right) - \beta_{\mathrm{Br3,c}}^{(\mathrm{eff})}(\delta)\,K_{2,\mathrm{Br3,c}}(\delta).} \tag{28.82}$$

En LO+ :

$$\boxed{\mathcal{D}_{\mathrm{LO+}}^{\mathrm{Br3,c}}(\delta) = \mathcal{D}_{\mathrm{LO}}^{\mathrm{Br3,c}}(\delta) + \Gamma_{\mathrm{shape}}K_0^{(Z)}.} \tag{28.83}$$

Le domaine admissible positif est

$$\boxed{I_{\mathrm{adm}}^{+,\mathrm{Br3,c}} = \left\{\delta \in [\delta_{\min}^{\mathrm{Br3}}, \delta_{\max}] \;:\; \mathcal{D}_{\mathrm{LO}}^{\mathrm{Br3,c}}(\delta) > 0\right\}.} \tag{28.84}$$

La séparation sélectionnée est alors

$$\boxed{\delta_*^{\mathrm{Br3,c}} \in \arg\min_{\delta \in I_{\mathrm{adm}}^{+,\mathrm{Br3,c}}} \mathcal{D}_{\mathrm{LO}}^{\mathrm{Br3,c}}(\delta).} \tag{28.85}$$

Condition d'existence d'une branche breather fermée. Une branche breather est fermée au rang LO si le domaine admissible positif associé n'est pas vide,

$$I_{\mathrm{adm}}^{+,\mathrm{br}} \neq \varnothing,$$

et si la minimisation de $\mathcal{D}_{\mathrm{LO}}^{\mathrm{br}}$ y sélectionne un minimum intérieur :

$$\delta_*^{\mathrm{br}} \in (\delta_{\mathrm{min}}^{\mathrm{br}}, \delta_{\mathrm{max}}),$$

avec

$$\partial_\delta \mathcal{D}_{\mathrm{LO}}^{\mathrm{br}}(\delta_*) = 0, \qquad \partial_\delta^2 \mathcal{D}_{\mathrm{LO}}^{\mathrm{br}}(\delta_*) > 0, \qquad \mathcal{D}_{\mathrm{LO}}^{\mathrm{br}}(\delta_*) > 0.$$

Au rang LO+, la condition de positivité devient

$$\mathcal{D}_{\mathrm{LO}+}^{\mathrm{br}}(\delta_*) > 0.$$

Si le minimum contraint est atteint sur un bord de l'intervalle admissible, la branche n'est pas promue comme solution breather stationnaire interne au rang LO. Elle est alors classée comme branche de bord, c'est-à-dire comme limite de validité de la description à fort recouvrement ou comme transition vers une autre description.

Exclusion du collapse. Dans l'ansatz multi–lobe

$$\Phi = \sum_i w_i a(\xi - \xi_i),$$

la limite $\delta \to 0$ rend les lobes linéairement dépendants. Pour les motifs à somme nulle, le champ composé peut même devenir trivial au rang dominant. On impose donc une borne basse non nulle :

$$\delta \geq \delta_{\mathrm{min}}^{\mathrm{br}} > 0.$$

Cette borne n'est pas une nouvelle constante dynamique : elle est la borne de non–dégénérescence du problème de Gram associé aux lobes du motif considéré.

Compatibilité cinématique en mouvement. Une branche breather 3DOF fermée au sens du critère précédent est une solution composée multi–lobe en recouvrement fort. Les lobes ne sont pas lus comme des solitons indépendants : ils forment un cœur effectif unique, décrit par une coordonnée comobile commune et par un motif brut fixé $\bar{w}$.

Lorsque la minimisation de $\mathcal{D}_{\mathrm{LO}}^{\mathrm{br}}$ sélectionne un minimum intérieur,

$$\delta_*^{\mathrm{br}} \in (\delta_{\mathrm{min}}^{\mathrm{br}}, \delta_{\mathrm{max}}),$$

la branche possède une largeur fermée $\lambda_{*,\mathrm{br}}$, une fréquence propre projetée

$$\omega_{\mathrm{br}} = \sigma \, \frac{c_t}{\lambda_{*,\mathrm{br}}}, \qquad \sigma \in \left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right\},$$

et une énergie propre finie

$$E_0^{\mathrm{br}} = h_{\mathrm{eff}} \, \omega_{\mathrm{br}}.$$

Dans le repère comobile du cœur composé, l'impulsion longitudinale totale est nulle :

$$P_0^{\mathrm{br}} = 0.$$

La branche fermée entre donc dans le cadre des solutions localisées massiques de §7.1.

La structure multi–lobe et la séparation interne δ_*^{br} modifient les formes de recouvrement

$$S_p[\bar{w}; \delta], \qquad S_{4,\mathrm{pair}}[\bar{w}; \delta], \qquad N_{\mathsf{F}}[\bar{w}; \delta],$$

ainsi que le dénominateur de fermeture $\mathcal{D}_{\mathrm{LO}}^{\mathrm{br}}$. Elles ne modifient pas la structure hyperbolique tangentielle du cœur réduit. La vitesse caractéristique du cœur breather est donc

$$c_{\mathcal{F}} = c_t.$$

Par (7.9), on obtient

$$E^{\mathrm{br}}(u) = \Gamma_t\, E_0^{\mathrm{br}}, \qquad P^{\mathrm{br}}(u) = \Gamma_t \frac{u}{c_t^2} E_0^{\mathrm{br}}, \qquad \Gamma_t = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c_t^2}}.$$

La source radiale associée à une branche breather fermée est construite à partir d'une somme finie de profils localisés et de recouvrements translationnels localisés. Dans le repère comobile du cœur composé, elle reste une fonction localisée de la coordonnée commune de la branche. Le motif $\bar{w}$ modifie la source $S_{\mathcal{F}}$, mais non l'opérateur radial commun.

Lorsque la réponse radiale de gaine est considérée au rang linéaire, le critère (7.3) s'applique donc à la branche fermée. La gaine strictement comobile est localisée pour

$$|u| < c_r, \qquad c_r^2 = \kappa_r c_t^2.$$

Cette compatibilité cinématique vaut pour les branches breather 3DOF fermées, c'est-à-dire celles dont la sélection de δ_*^{br} donne un minimum intérieur du domaine admissible positif. Elle ne promeut pas les branches de bord en solutions massiques fermées.

Borne basse Br2. Pour la branche bilobe, la borne basse est définie par le seuil de non–dégénérescence

$$\boxed{\frac{J_0 - J_0^{\times}(2\delta_{\min}^{\mathrm{Br2}})}{J_0 + J_0^{\times}(2\delta_{\min}^{\mathrm{Br2}})} = \Gamma_{\mathrm{shape}}.} \tag{28.86}$$

Cette équation fixe $\delta_{\min}^{\mathrm{Br2}}$ à partir du même profil et de la même normalisation que les recouvrements utilisés dans la fermeture.

Borne basse Br3. Dans une géométrie trilobe

$$\{-\delta, 0, +\delta\},$$

la plus petite distance inter–lobe vaut δ, tandis qu'elle vaut 2δ dans le bilobe. On définit donc

$$\boxed{\delta_{\min}^{\mathrm{Br3}} = 2\,\delta_{\min}^{\mathrm{Br2}}.} \tag{28.87}$$

La borne haute commune est la borne MSE canonique

$$\delta_{\max} = \frac{u_*^{\star}}{2},$$

définie en (27.17).

Procédure numérique reproductible des minima breathers 3DOF

But. Pour chaque motif entier retenu, on détermine la séparation admissible δ_*, puis la fermeture λ_*, et enfin la masse réduite de branche $m(\sigma)$, avec

$$\sigma \in \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}.$$

La procédure consomme les fermetures spécialisées (28.55), (28.68) et (28.82) ; elle ne réintroduit pas de fermeture alternative.

Fenêtre admissible. La minimisation est effectuée sur le domaine admissible positif propre à chaque branche :

$$I_{\mathrm{adm}}^{+,\mathrm{Br2}}, \qquad I_{\mathrm{adm}}^{+,\mathrm{Br3,n}}, \qquad I_{\mathrm{adm}}^{+,\mathrm{Br3,c}},$$

définis respectivement par (28.57), (28.70) et (28.84). La borne haute commune de fort recouvrement est

$$\delta_{\max} = \frac{u_*^\star}{2},$$

avec $u_*^\star$ donné par (27.16).

Étape 1 : recouvrements élémentaires. Pour le profil canonique

$$a(\xi) = \operatorname{sech} \xi,$$

on évalue les recouvrements

$$J_0^\times(r), \qquad J_2^\times(r), \qquad J_4^\times(r),$$

avec

$$J_p^\times(0) = J_p.$$

Étape 2 : formes de branche. On utilise directement les formes spécialisées :

$$\text{Br2 :} \qquad S_0^{\mathrm{Br2}},\ S_2^{\mathrm{Br2}},\ S_{4,\mathrm{pair}}^{\mathrm{Br2}},\ N_{\mathsf{F}}^{\mathrm{Br2}}$$

définies par (28.47), (28.48) et (28.49) ;

$$\text{Br3 neutre :} \qquad S_0^{\mathrm{Br3,n}},\ S_2^{\mathrm{Br3,n}},\ S_{4,\mathrm{pair}}^{\mathrm{Br3,n}},\ N_{\mathsf{F}}^{\mathrm{Br3,n}}$$

définies par (28.60), (28.61) et (28.62) ;

$$\text{Br3 chargé :} \qquad S_0^{\mathrm{Br3,c}},\ S_2^{\mathrm{Br3,c}},\ S_{4,\mathrm{pair}}^{\mathrm{Br3,c}},\ N_{\mathsf{F}}^{\mathrm{Br3,c}}$$

définies par (28.74), (28.75) et (28.76).

Étape 3 : quantités réduites et impédances. Pour chaque branche $\mathrm{br} \in \{\mathrm{Br2}, \mathrm{Br3,n}, \mathrm{Br3,c}\}$, on forme

$$\widehat{s}_2^{\mathrm{br}} = \frac{S_2^{\mathrm{br}}}{S_0^{\mathrm{br}}}, \qquad \widehat{s}_{4,\mathrm{pair}}^{\mathrm{br}} = \frac{S_{4,\mathrm{pair}}^{\mathrm{br}}}{(S_0^{\mathrm{br}})^2}, \qquad \widehat{n}_{\mathsf{F}}^{\mathrm{br}} = \frac{N_{\mathsf{F}}^{\mathrm{br}}}{S_0^{\mathrm{br}}}.$$

Les impédances réduites sont alors

$$\beta_{\mathrm{br}}^{(\mathsf{F})} = \zeta_{3D} \frac{\widehat{n}_{\mathsf{F}}^{\mathrm{br}}}{1 + \left(\eta_{\mathrm{br}}^{(3)}\right)^{-1} \widehat{s}_2^{\mathrm{br}}}, \qquad \beta_{\mathrm{br}}^{(\mathsf{P})} = \eta_{\mathrm{br}}^{(3)} \Gamma_{\mathrm{P}} \frac{\widehat{s}_{4,\mathrm{pair}}^{\mathrm{br}}}{\left(1 + \left(\eta_{\mathrm{br}}^{(3)}\right)^{-1} \widehat{s}_2^{\mathrm{br}}\right)^2},$$

puis

$$\beta_{\mathrm{br}}^{(\mathrm{eff})} = \beta_{\mathrm{br}}^{(\mathsf{F})} - \beta_{\mathrm{br}}^{(\mathsf{P})}.$$

Étape 4 : dénominateur de fermeture. Pour chaque branche, on construit

$$K_{0,\mathrm{br}} = K_0^{(Z)}, \qquad K_{2,\mathrm{br}} = \widehat{s}_2^{\mathrm{br}} K_2^{(Z)}, \qquad K_{\mathrm{br}} = K_{0,\mathrm{br}} + K_{2,\mathrm{br}},$$

puis

$$\mathcal{D}_{\mathrm{LO}}^{\mathrm{br}} = \eta_{\mathrm{br}}^{(3)} \left(K_{\mathrm{br}} - \beta_{\mathrm{br}}^{(\mathrm{eff})} K_{0,\mathrm{br}}\right) - \beta_{\mathrm{br}}^{(\mathrm{eff})} K_{2,\mathrm{br}}.$$

La version LO+ est

$$\mathcal{D}_{\mathrm{LO+}}^{\mathrm{br}} = \mathcal{D}_{\mathrm{LO}}^{\mathrm{br}} + \Gamma_{\mathrm{shape}} K_0^{(Z)}.$$

Étape 5 : séparation sélectionnée. La séparation de branche est définie par

$$\delta_*^{\mathrm{Br2}} \in \arg\min_{\delta \in I_{\mathrm{adm}}^{+,\mathrm{Br2}}} \mathcal{D}_{\mathrm{LO}}^{\mathrm{Br2}}(\delta),$$

$$\delta_*^{\mathrm{Br3,n}} \in \arg\min_{\delta \in I_{\mathrm{adm}}^{+,\mathrm{Br3,n}}} \mathcal{D}_{\mathrm{LO}}^{\mathrm{Br3,n}}(\delta),$$

$$\delta_*^{\mathrm{Br3,c}} \in \arg\min_{\delta \in I_{\mathrm{adm}}^{+,\mathrm{Br3,c}}} \mathcal{D}_{\mathrm{LO}}^{\mathrm{Br3,c}}(\delta).$$

Si le minimum est intérieur, il vérifie

$$\partial_\delta \mathcal{D}_{\mathrm{LO}}^{\mathrm{br}}(\delta_*) = 0, \qquad \partial_\delta^2 \mathcal{D}_{\mathrm{LO}}^{\mathrm{br}}(\delta_*) > 0.$$

Si l'optimum est au bord, il est retenu comme optimum contraint du domaine admissible positif, et non comme hypothèse imposée.

Étape 6 : fermeture λ_*. Pour la branche retenue,

$$\boxed{\lambda_{*,\mathrm{br}}^4 = \frac{2h_{\mathrm{eff}}\sqrt{\rho T}}{\mathcal{D}_{\mathrm{LO}}^{\mathrm{br}}(\delta_*)}.} \tag{28.88}$$

Au rang LO+ :

$$\boxed{\lambda_{*,\mathrm{br,LO+}}^4 = \frac{2h_{\mathrm{eff}}\sqrt{\rho T}}{\mathcal{D}_{\mathrm{LO+}}^{\mathrm{br}}(\delta_*)}.} \tag{28.89}$$

Étape 7 : masse réduite de branche. La fréquence projetée de branche est

$$\omega_{\mathrm{br}} = \sigma\,\frac{c_t}{\lambda_{*,\mathrm{br}}},$$

et la masse réduite associée est

$$\boxed{m_{\mathrm{br}}(\sigma) = \frac{h_{\mathrm{eff}}\sigma}{c_t\,\lambda_{*,\mathrm{br}}}.} \tag{28.90}$$

La version LO+ s'obtient en remplaçant

$$\lambda_{*,\mathrm{br}} \longrightarrow \lambda_{*,\mathrm{br,LO+}}.$$

Étape 8 : diagnostic de charge réduite. Lorsque le diagnostic EM réduit est requis, on utilise le label monopolaire entier du motif brut

$$n_{\mathrm{EM}}(\bar{w}) = \sum_i \bar{w}_i.$$

La charge réduite effective de branche est ensuite calculée par le facteur de forme défini dans la section correspondante. Les branches de motif $(1,-1)$ et $(1,-2,1)$ sont neutres au rang monopolaire LO.

Diagnostic de charge EM (breathers 3DOF). En recouvrement fort, la charge externe n'est pas additive en "charges de bumps" : elle doit être reconstruite à partir du *motif entier brut* $\bar{w}$, avant normalisation par $S_0 = 1$. On définit d'abord le label monopolaire discret

$$\boxed{n_{\mathrm{EM}}(\bar{w}) := \sum_i \bar{w}_i \in \mathbb{Z}.} \tag{28.91}$$

Pour les motifs canoniques des breathers 3DOF, on a ainsi

$$n_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{Br2}} = 1 - 1 = 0, \qquad n_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{Br3,n}} = 1 - 2 + 1 = 0, \qquad n_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{Br3,c}} = 1 - 1 + 1 = 1.$$

On introduit alors le facteur de forme réduit du breather

$$\boxed{\mathcal{C}_S^{(\mathrm{br})}(\bar{w};\delta) := \frac{S_0[\bar{w};\delta]}{S_0[\bar{w};\delta] + \left(\eta_{\mathrm{br}}^{(3)}\right)^{-1} S_2[\bar{w};\delta]}, \qquad \mathcal{C}_S^{(\mathrm{bump})} = \frac{J_0}{J_0 + \left(\eta_{\mathrm{br}}^{(3)}\right)^{-1} J_2}.} \tag{28.92}$$

La charge réduite effective est alors définie par

$$\boxed{q_{\mathrm{eff}}^{(\mathrm{br})}(\bar{w};\delta,\sigma) = n_{\mathrm{EM}}(\bar{w})\,\sigma\,\frac{\mathcal{C}_S^{(\mathrm{br})}(\bar{w};\delta)}{\mathcal{C}_S^{(\mathrm{bump})}}.} \tag{28.93}$$

Cette définition est cohérente avec le fait que : (i) les branches neutres satisfont $n_{\mathrm{EM}} = 0$ identiquement ; (ii) la branche chargée-like porte un label monopolaire unité ; (iii) l'amplitude effective est modulée par le facteur de forme $\mathcal{C}_S^{(\mathrm{br})}/\mathcal{C}_S^{(\mathrm{bump})}$ et par la projection conique σ.

En revanche, pour les deux branches neutres Br2 et Br3,n, on a identiquement

$$q_{\mathrm{eff}}^{(\mathrm{br})} = 0.$$

Pour la réduction canonique Br3,c, la quantité $q_{\mathrm{eff}}^{(\mathrm{br})}$ est une amplitude réduite de branche. La construction complète des familles chargées requiert la même diagonalisation interne que celle utilisée pour les branches neutres.

28.6 Z-like 3DOF multi-lobes (court-portée, neutre couleur) — forme poids

Hypothèse de canal (composite fort-like). Dans le canal Z-like 3DOF *composite* (blanc couleur), le terme quartique fort-like est *attractif* et entre en concurrence avec une contribution Préclusion répulsive. L'existence du composé provient de la fermeture interne et de la positivité du dénominateur de fermeture, sans qu'il soit nécessaire d'introduire une constante libre nouvelle.

Constantes de forme communes. Le profil canonique est $a(\xi) = \operatorname{sech}\xi$. Les constantes de profil J_0 et J_2 sont celles définies par les moments de forme du profil et évaluées, pour $a = \mathrm{sech}$, par

$$J_0 = \frac{\pi^3}{3}, \qquad J_2 \simeq 7.6339320582.$$

On pose

$$K_0^{(Z)} = J_0^2, \qquad K_2^{(Z)} = J_0 J_2.$$

La constante de Préclusion Γ_{P} est définie en (20.59) et, pour le profil $a(\xi) = \operatorname{sech}\xi$, évaluée en (20.60). La constante de gaine Γ_{shape} est celle de (23.51). Le facteur fort-like 3DOF ζ_{3D} est défini en (27.28) et évalué en (27.33).

Statut du motif interne. Comme dans la branche breather, le motif interne doit être séparé en :

— un *motif entier brut* $\bar{w} \in \mathbb{Z}^k$, qui porte les labels discrets (symétrie, neutralité, charge) ;

— un *représentant normalisé* $\widehat{w}(\delta)$, qui porte seulement la forme relative interne à géométrie fixée.

On adopte donc la jauge de normalisation

$$\boxed{S_0[w;\delta] = 1.} \tag{28.94}$$

Pour un motif brut $\bar{w}$, on passe au représentant normalisé

$$\boxed{\widehat{w}(\delta) = \frac{\bar{w}}{\sqrt{S_0[\bar{w};\delta]}}.} \tag{28.95}$$

Numérateur fort-like brut et invariants réduits communs. Les formes quadratiques $S_p[w;\delta]$, la réduction quartique pair-à-pair $S_{4,\mathrm{pair}}[w;\delta]$ et le numérateur fort-like $N_{\mathsf{F}}[w;\delta]$ sont ceux définis en (28.34), (28.35) et (28.37). La règle de couplage pair-à-pair du canal fort-like est celle de (28.36).

On introduit le numérateur brut du canal attractif sous la forme

$$\boxed{N_{\mathsf{F}}[\bar{w};\delta] := \sum_{i<j} c_{ij}^{(\mathsf{F})}(\bar{w})\, J_4^{\times}(\Delta_{ij}), \qquad \Delta_{ij} := |\xi_i - \xi_j|.} \tag{28.96}$$

Les quantités de fermeture réduites doivent ensuite être exprimées en termes invariants par redilatation globale du motif :

$$\boxed{\widehat{s}_2(\bar{w};\delta) := \frac{S_2[\bar{w};\delta]}{S_0[\bar{w};\delta]}, \qquad \widehat{s}_{4,\mathrm{pair}}(\bar{w};\delta) := \frac{S_{4,\mathrm{pair}}[\bar{w};\delta]}{S_0[\bar{w};\delta]^2}, \qquad \widehat{n}_{\mathsf{F}}(\bar{w};\delta) := \frac{N_{\mathsf{F}}[\bar{w};\delta]}{S_0[\bar{w};\delta]}.} \tag{28.97}$$

Le numérateur fort-like N_{F} reprend la règle de couplage pair-à-pair définie en (28.37).

On pose alors

$$K_0^{(\mathrm{red})}(\bar{w};\delta) = K_0^{(Z)}, \qquad K_2^{(\mathrm{red})}(\bar{w};\delta) = \widehat{s}_2(\bar{w};\delta)\, K_2^{(Z)}, \qquad K^{(\mathrm{red})}(\bar{w};\delta) = K_0^{(\mathrm{red})} + K_2^{(\mathrm{red})}.$$

Impédances de canal et fermeture commune Z-like. Dans la branche Z-like 3DOF, le canal de réponse court–portée ne doit pas être écrit directement avec le coefficient dimensionné

$$\kappa_\mu^{\mathrm{phys}} := \frac{\mu_2}{T}, \qquad [\kappa_\mu^{\mathrm{phys}}] = \mathrm{m}^{-2}.$$

Après réduction à l'échelle de cœur λ_*, la combinaison qui entre dans les facteurs de réponse est le paramètre réduit sans dimension

$$\boxed{\eta_\mu^{(Z)}(\lambda_*) := \frac{\kappa_\mu^{\mathrm{phys}}}{\kappa_r}\,\lambda_*^2.} \tag{28.98}$$

Cette définition correspond au cas où la réponse de court–portée est portée par l'opérateur radial standard

$$-T\kappa_r\Delta + \mu_2.$$

Cette définition distingue explicitement le coefficient dimensionné $\kappa_\mu^{\mathrm{phys}} = \mu_2/T$ de la combinaison adimensionnée $\eta_\mu^{(Z)}(\lambda_*)$ qui entre dans la fermeture réduite.

Au rang réduit, les impédances de canal s'écrivent alors

$$\boxed{\beta^{(\mathsf{P})}_{(Z)}(\bar{w};\delta;\eta) = \eta\,\Gamma_{\mathrm{P}}\,\frac{\widehat{s}_{4,\mathrm{pair}}(\bar{w};\delta)}{\big(1+\eta^{-1}\widehat{s}_2(\bar{w};\delta)\big)^2}, \qquad \beta^{(\mathsf{F})}_{(Z)}(\bar{w};\delta;\eta) = \zeta_{3D}\,\frac{\widehat{n}_{\mathsf{F}}(\bar{w};\delta)}{1+\eta^{-1}\widehat{s}_2(\bar{w};\delta)}.} \tag{28.99}$$

où, dans la fermeture reduite complète, on prend

$$\eta = \eta^{(Z)}_{\mu}(\lambda_*).$$

On définit

$$\boxed{\beta^{(\mathrm{eff})}_{(Z)}(\bar{w};\delta;\eta) = \beta^{(\mathsf{F})}_{(Z)}(\bar{w};\delta;\eta) - \beta^{(\mathsf{P})}_{(Z)}(\bar{w};\delta;\eta).} \tag{28.100}$$

Le dénominateur réduit de fermeture est alors

$$\boxed{D^{(Zk)}_{\mathrm{LO}}(\bar{w};\delta;\eta) = \eta\Big(K^{(\mathrm{red})}(\bar{w};\delta) - \beta^{(\mathrm{eff})}_{(Z)}(\bar{w};\delta;\eta)\,K^{(Z)}_0\Big) - \beta^{(\mathrm{eff})}_{(Z)}(\bar{w};\delta;\eta)\,K^{(\mathrm{red})}_2(\bar{w};\delta), \qquad k\in\{2,3\}.} \tag{28.101}$$

La fermeture reduite complète s'obtient en remplaçant

$$\eta \mapsto \eta^{(Z)}_{\mu}(\lambda_*).$$

Par conséquent, la fermeture de largeur n'est plus une simple évaluation explicite à paramètre constant : elle devient l'équation implicite

$$\boxed{\lambda_*^4\,D^{(Zk)}_{\mathrm{LO}}\Big(\bar{w};\delta_*;\eta^{(Z)}_{\mu}(\lambda_*)\Big) = 2\,h_{\mathrm{eff}}\sqrt{\rho T}.} \tag{28.102}$$

Avec l'auto–induction de gaine, on écrit

$$\boxed{D^{(Zk)}_{\mathrm{LO}+}(\bar{w};\delta;\eta) = D^{(Zk)}_{\mathrm{LO}}(\bar{w};\delta;\eta) + \Gamma_{\mathrm{shape}}K^{(Z)}_0,} \tag{28.103}$$

et la fermeture LO+ devient

$$\boxed{\lambda_*^4\,D^{(Zk)}_{\mathrm{LO}+}\Big(\bar{w};\delta_*;\eta^{(Z)}_{\mu}(\lambda_*)\Big) = 2\,h_{\mathrm{eff}}\sqrt{\rho T}.} \tag{28.104}$$

28.6.1 Règle de charge (EM) — commune Z-like

Le *label monopolaire* discret doit être porté par le *motif entier brut* :

$$\boxed{n_{\mathrm{EM}}(\bar{w}) = \sum_{i=1}^{k}\bar{w}_i \in \mathbb{Z}, \qquad k\in\{2,3\}.} \tag{28.105}$$

Ainsi, les combinaisons à somme nulle sont *neutres* au rang monopolaire LO, tandis que celles à somme $n\neq 0$ portent un label chargé. La définition réduite s'arrête à l'entier $n_{\mathrm{EM}}(\bar{w})$; aucune conversion dimensionnée n'est introduite dans cette section.

28.6.2 Principe variationnel interne : détermination de $\bar{w}$ (commun Z-like)

Comme en branche breather, les motifs internes ne sont pas posés arbitrairement : à géométrie δ fixée, ils sont déterminés par minimisation du dénominateur de fermeture *dans une classe admissible*.

Matrice de Gram et non-dégénérescence. On note

$$\boxed{G_{ij}(\delta) := \langle a(\xi-\xi_i),\,a(\xi-\xi_j)\rangle = J_0^{\times}(\Delta_{ij}), \qquad \Delta_{ij} = |\xi_i-\xi_j|.} \tag{28.106}$$

La non-dégénérescence de la classe composée impose que la matrice de Gram associée à la géométrie retenue reste définie positive :

$$G(\delta) \succ 0.$$

Classe admissible (motifs primitifs bruts). On travaille sur les motifs *primitifs* (sans facteur commun), et on impose : (i) un secteur de charge via (28.105), (ii) la non-dégénérescence de Gram, (iii) éventuellement une contrainte de symétrie de branche. On définit

$$\mathcal{W}_k^{\mathrm{adm}}(n;\delta) := \Big\{ \bar{w} \in \mathbb{Z}^k : n_{\mathrm{EM}}(\bar{w}) = n,\ \gcd(\bar{w}_1,\dots,\bar{w}_k) = 1,\ G(\delta) \succ 0,\ (\text{contraintes de branche}) \Big\}.$$

Sélection interne (définition). La sélection interne s'écrit à paramètre réduit η fixé :

$$\boxed{\bar{w}_*(\delta;\eta) \in \arg \min_{\bar{w} \in \mathcal{W}_k^{\mathrm{adm}}(n;\delta)} D_{\mathrm{LO}}^{(Zk)}(\bar{w};\delta;\eta), \qquad k = 2,3.} \tag{28.107}$$

La fermeture réduite complète est obtenue ensuite par la substitution

$$\eta = \eta_\mu^{(Z)}(\lambda_*),$$

définie en (28.98). Ainsi, la sélection de motif est écrite dans l'espace réduit, tandis que la fermeture de largeur impose ensuite l'équation implicite en λ_*.

Cas neutres : pour $n = 0$, les contraintes peuvent suffire à réduire $\mathcal{W}_k^{\mathrm{adm}}$ à un unique motif primitif ($\bar{w} = (1,-1)$ en bi-lobe antisymétrique ; $\bar{w} = (1,-2,1)$ en tri-lobe symétrique).

Cas chargés : pour $n \neq 0$, plusieurs motifs primitifs admissibles peuvent exister ; les motifs canoniques utilisés ensuite sont des représentants pratiques, la sélection finale restant celle issue de (28.107).

28.6.3 Auto-induction forte de gaine (commun Z-like)

Le mécanisme d'auto-induction de gaine (3DOF) s'applique *sans nouvelle constante libre*. On réutilise le facteur adimensionné Γ_{shape}. Dans la convention réduite, la correction LO+ s'écrit

$$D_{\mathrm{LO+}}^{(Zk)}(\bar{w};\delta;\eta) = D_{\mathrm{LO}}^{(Zk)}(\bar{w};\delta;\eta) + \Gamma_{\mathrm{shape}}\, K_0^{(Z)}.$$

Mettre $\Gamma_{\mathrm{shape}} = 0$ restaure les fermetures LO sans gaine. La fermeture réduite complète s'obtient ensuite par la substitution

$$\eta = \eta_\mu^{(Z)}(\lambda_*).$$

28.6.4 Filtre EBK et valeurs admissibles de q (Z-like 3DOF)

Règle EBK (rappel). Au rang meneur (anneau unique, état autoconjugué), l'énergie mécanique de branche vérifie

$$E_0 = q\, h_{\mathrm{eff}}\, \omega_{\mathrm{br}}, \qquad q \in \mathbb{N},$$

où $\omega_{\mathrm{br}} = \sigma\, \omega_0$ (3DOF conique, $\sigma = \sin^2\alpha \in \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$).

Le nombre d'enroulement du rotateur tangent vaut $\nu = 1$ et ne doit pas être confondu avec le motif brut $\bar{w}$.

Filtre $\mathbb{S}^3$ + MSE. Sous les hypothèses LO (tube mince $\varepsilon \ll 1$, fenêtre admissible $u_* \in [1.7, 2.1]$, gaine régulière), le premier mode qui satisfait simultanément l'enroulement $\nu = 1$, le raccord C^1 et la hiérarchie $\ell_0 \ll \lambda_* \ll R_0$ est le **fondamental** :

$$q_{\mathrm{adm}}^{(\mathrm{LO})} = 1.$$

28.6.5 Spin géométrique et projection (commun Z-like 3DOF)

Classe géométrique. Dans le canal Z-like 3DOF, le cycle rapide tangent reste fondamental :

$$\nu = 1,$$

où ν désigne ici l'enroulement du rotateur tangent et ne doit pas être confondu avec le motif non normalisé $\bar{w}$. La réduction LO retenue dans cette section ne conserve que le contenu *vectoriel transverse* de la famille, avec deux polarisations circulaires indépendantes :

$$N_{\mathrm{pol}} = 2.$$

Le comptage géométrique donne alors

$$s_g = \frac{\nu N_{\mathrm{pol}}}{2} = \frac{1 \times 2}{2} = 1.$$

La famille Z-like 3DOF appartient donc à la classe entière.

Norme du spin. Au rang meneur, la loi d'énergie de la branche garde la forme

$$E_0 = h_{\mathrm{eff}}\, \omega_{\mathrm{br}},$$

de sorte que la norme géométrique du spin s'écrit

$$\boxed{|S^{(Z3)}| = h_{\mathrm{eff}}, \qquad s_g^{(Z3)} = 1.}$$

Projection et hélicité. L'axe conique fournit une direction privilégiée de projection. Dans la réduction transverse LO retenue ici, la famille Z-like 3DOF porte alors deux hélicités opposées

$$\varsigma = \pm 1,$$

et la projection du spin sur l'axe conique s'écrit

$$\boxed{S_{\parallel}^{(Z3)} = \varsigma\, h_{\mathrm{eff}}, \qquad \varsigma = \pm 1.}$$

Le mode longitudinal éventuel, s'il apparaît à un ordre ou dans une fermeture plus riche, n'appartient pas à la présente réduction LO.

Portée. Cette description vaut pour la famille Z-like 3DOF en tant que branche vectorielle transverse. Elle s'applique aux réalisations bi-lobe et tri-lobe sans modifier la classe de spin :

$$s_g^{(Z3)} = 1.$$

Les différences entre motifs $\bar{w}$ affectent la charge EM, les poids internes et la fermeture, mais non la nature entière du spin au rang meneur.

Remarque de distinction avec le Z-like 2DOF. La présente famille Z-like 3DOF ne doit pas être confondue avec la branche Z-like 2DOF : les deux partagent la même classe vectorielle $s_g = 1$ au rang meneur, mais diffèrent par leur architecture interne, leur fermeture composée et leur espace de motifs admissibles.

Compatibilité cinématique en mouvement. Une branche Z-like 3DOF fermée est une solution composée multi–lobe en recouvrement fort. Les lobes ne sont pas lus comme des solitons indépendants : ils forment un cœur effectif unique, décrit par une coordonnée comobile commune et par un motif normalisé $\bar{w}$.

Dans les spécialisations Z2 et Z3 ci-dessous, une branche est fermée seulement si la minimisation de son dénominateur de fermeture sélectionne un minimum intérieur du domaine admissible positif. Lorsque cette condition est satisfaite, la branche possède une largeur fermée $\lambda_{*,Z}$, une fréquence propre projetée

$$\omega_Z = \sigma \, \frac{c_t}{\lambda_{*,Z}}, \qquad \sigma \in \left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right\},$$

et une énergie propre finie

$$E_0^{(Z)} = h_{\mathrm{eff}} \, \omega_Z.$$

Dans le repère comobile du cœur composé, l'impulsion longitudinale totale est nulle :

$$P_0^{(Z)} = 0.$$

La branche fermée entre donc dans le cadre des solutions localisées massiques de §7.1.

La structure multi–lobe, le motif $\bar{w}$, et la séparation interne $\delta_*^{(Z)}$ modifient les formes de recouvrement

$$S_p[\bar{w}; \delta], \qquad S_{4,\mathrm{pair}}[\bar{w}; \delta], \qquad N_{\mathsf{F}}[\bar{w}; \delta],$$

ainsi que les impédances de canal et le dénominateur de fermeture

$$D_{\mathrm{LO}}^{(Zk)}.$$

Ils ne modifient pas la structure hyperbolique tangentielle du cœur réduit. La vitesse caractéristique du cœur Z-like fermé est donc

$$c_{\mathcal{F}} = c_t.$$

Par (7.9), on obtient

$$E^{(Z)}(u) = \Gamma_t \, E_0^{(Z)}, \qquad P^{(Z)}(u) = \Gamma_t \frac{u}{c_t^2} E_0^{(Z)}, \qquad \Gamma_t = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c_t^2}}.$$

La dispersion effective du cœur composé est

$$\left(E^{(Z)}(u)\right)^2 = \left(E_0^{(Z)}\right)^2 + c_t^2 \left(P^{(Z)}(u)\right)^2.$$

La source radiale associée à une branche Z-like fermée est construite à partir d'une somme finie de profils localisés et de recouvrements translationnels localisés. Dans le repère comobile du cœur composé, elle reste une fonction localisée de la coordonnée commune de la branche. Le motif $\bar{w}$ modifie la source $S_{\mathcal{F}}$, mais non l'opérateur radial commun.

Lorsque la réponse radiale de gaine est considérée au rang linéaire, le critère (7.3) s'applique donc à la branche fermée. La gaine strictement comobile est localisée pour

$$|u| < c_r, \qquad c_r^2 = \kappa_r c_t^2.$$

Pour $|u| \geq c_r$, la réponse radiale ne relève plus d'une gaine Yukawa strictement comobile au même rang.

Cette compatibilité cinématique vaut uniquement pour les branches Z-like 3DOF fermées, c'est-à-dire celles dont la sélection de δ_* donne un minimum intérieur du domaine admissible positif. Elle ne promeut pas les branches de bord en solutions massiques fermées.

28.6.6 Z-like 3DOF bi-lobe

Motif canonique et noyaux bruts (bi-lobe). Pour le motif primitif brut

$$\bar{w}_{\mathrm{Z2}} = (1, -1),$$

placé en $\{-\delta, +\delta\}$ (séparation $\Delta_{12} = 2\delta$), on a

$$S_0^{\mathrm{Z2}}(\delta) = 2\Big(J_0 - J_0^{\times}(2\delta)\Big), \qquad S_2^{\mathrm{Z2}}(\delta) = 2\Big(J_2 - J_2^{\times}(2\delta)\Big).$$

Le représentant normalisé associé est

$$\widehat{w}_{\mathrm{Z2}}(\delta) = \frac{(1, -1)}{\sqrt{S_0^{\mathrm{Z2}}(\delta)}}.$$

Charge discrète (bi-lobe). Le label monopolaire est porté par le motif brut :

$$n_{\mathrm{EM}}(\bar{w}_{\mathrm{Z2}}) = 1 - 1 = 0.$$

La branche Z2 canonique est donc strictement neutre au niveau du label discret.

Invariants réduits (bi-lobe). Pour Z2, on introduit

$$\boxed{\widehat{s}_2^{\mathrm{Z2}}(\delta) := \frac{S_2^{\mathrm{Z2}}(\delta)}{S_0^{\mathrm{Z2}}(\delta)}, \qquad \widehat{s}_{4,\mathrm{pair}}^{\mathrm{Z2}}(\delta) := \frac{S_{4,\mathrm{pair}}[(1,-1);\delta]}{\big(S_0^{\mathrm{Z2}}(\delta)\big)^2}, \qquad \widehat{n}_{\mathsf{F}}^{\mathrm{Z2}}(\delta) := \frac{N_{\mathsf{F}}[(1,-1);\delta]}{S_0^{\mathrm{Z2}}(\delta)}.} \tag{28.108}$$

Les objets $S_{4,\mathrm{pair}}$ et N_{F} sont ceux définis en (28.35) et (28.37).

Bornes admissibles (bi-lobe). On impose

$$\delta \in [\delta_{\min}^{\mathrm{Z2}}, \delta_{\max}].$$

La borne basse $\delta_{\min}^{\mathrm{Z2}} > 0$ est imposée par la condition de Gram (exclusion de la dégénérescence à $\delta = 0$) ; dans le cas bi-lobe canonique, elle revient à imposer quantitativement

$$S_0^{\mathrm{Z2}}(\delta) = 2(J_0 - J_0^{\times}(2\delta)) > 0.$$

La borne haute est la borne MSE canonique définie en (27.17).

Fermeture réduite (Z2). On pose

$$K_{0,\mathrm{Z2}}^{(\mathrm{red})} = K_0^{(Z)}, \qquad K_{2,\mathrm{Z2}}^{(\mathrm{red})}(\delta) = \widehat{s}_2^{\mathrm{Z2}}(\delta)\, K_2^{(Z)}, \qquad K_{\mathrm{Z2}}^{(\mathrm{red})}(\delta) = K_{0,\mathrm{Z2}}^{(\mathrm{red})} + K_{2,\mathrm{Z2}}^{(\mathrm{red})}(\delta).$$

Le paramètre de réponse qui entre dans la fermeture réduite est le paramètre sans dimension η. Dans la fermeture auto-cohérente, il sera remplacé par $\eta_\mu^{(Z)}(\lambda_*)$, cf. (28.98). On définit

$$\boxed{\beta_{\mathrm{Z2}}^{(\mathsf{P})}(\delta;\eta) = \eta\,\Gamma_{\mathrm{P}}\,\frac{\widehat{s}_{4,\mathrm{pair}}^{\mathrm{Z2}}(\delta)}{\big(1 + \eta^{-1}\widehat{s}_2^{\mathrm{Z2}}(\delta)\big)^2}, \qquad \beta_{\mathrm{Z2}}^{(\mathsf{F})}(\delta;\eta) = \zeta_{3D}\,\frac{\widehat{n}_{\mathsf{F}}^{\mathrm{Z2}}(\delta)}{1 + \eta^{-1}\widehat{s}_2^{\mathrm{Z2}}(\delta)}.} \tag{28.109}$$

On définit

$$\beta_{\mathrm{Z2}}^{(\mathrm{eff})}(\delta;\eta) = \beta_{\mathrm{Z2}}^{(\mathsf{F})}(\delta;\eta) - \beta_{\mathrm{Z2}}^{(\mathsf{P})}(\delta;\eta),$$

puis

$$\boxed{D_{\mathrm{LO}}^{(Z2)}(\bar{w}_{\mathrm{Z2}};\delta;\eta) = \eta\Big(K_{\mathrm{Z2}}^{(\mathrm{red})}(\delta) - \beta_{\mathrm{Z2}}^{(\mathrm{eff})}(\delta;\eta)\,K_0^{(Z)}\Big) - \beta_{\mathrm{Z2}}^{(\mathrm{eff})}(\delta;\eta)\,K_{2,\mathrm{Z2}}^{(\mathrm{red})}(\delta).} \tag{28.110}$$

La fermeture LO+ s'écrit

$$\boxed{D_{\mathrm{LO}+}^{(Z2)}(\bar{w}_{\mathrm{Z2}};\delta;\eta) = D_{\mathrm{LO}}^{(Z2)}(\bar{w}_{\mathrm{Z2}};\delta;\eta) + \Gamma_{\mathrm{shape}} K_0^{(Z)}.} \tag{28.111}$$

Domaine admissible positif et optimum. À paramètre réduit η fixé, on introduit

$$\boxed{I_{\mathrm{adm}}^{+,\mathrm{Z2}}(\eta) = \Big\{\delta \in [\delta_{\min}^{\mathrm{Z2}}, \delta_{\max}] \;:\; D_{\mathrm{LO}}^{(Z2)}(\bar{w}_{\mathrm{Z2}}; \delta; \eta) > 0\Big\}.} \tag{28.112}$$

L'optimum interne est alors défini par

$$\boxed{\delta_*^{\mathrm{Z2}}(\eta) \in \arg\min_{\delta \in I_{\mathrm{adm}}^{+,\mathrm{Z2}}(\eta)} D_{\mathrm{LO}}^{(Z2)}(\bar{w}_{\mathrm{Z2}}; \delta; \eta).} \tag{28.113}$$

En LO+, l'ajout $+\Gamma_{\mathrm{shape}} K_0^{(Z)}$ est indépendant de δ, donc l'optimum $\delta_*^{\mathrm{Z2}}(\eta)$ est inchangé à η fixé. Dans la fermeture auto-cohérente, η est ensuite remplacé par $\eta_\mu^{(Z)}(\lambda_*)$.

Borne haute MSE et sélection de branche. La borne haute du domaine admissible est la borne MSE canonique

$$\delta_{\max} = \frac{u_*^\star}{2},$$

avec $u_*^\star$ défini par (27.16). Ainsi

$$\delta_{\max} = 0.93913003995\ldots.$$

La séparation de branche n'est pas imposée à cette borne. Elle est celle définie par la minimisation déjà posée en (28.113) :

$$\delta_*^{\mathrm{Z2}}(\eta) \in \arg\min_{\delta \in I_{\mathrm{adm}}^{+,\mathrm{Z2}}(\eta)} D_{\mathrm{LO}}^{(Z2)}(\bar{w}_{\mathrm{Z2}}; \delta; \eta).$$

La branche Z2 est fermée au rang LO seulement si ce minimum est intérieur :

$$\delta_*^{\mathrm{Z2}}(\eta) \in (\delta_{\min}^{\mathrm{Z2}}, \delta_{\max}).$$

Si la minimisation donne un optimum de bord, la branche Z2 n'est pas promue comme solution stationnaire interne au rang LO.

Fermetures et masse (Z2). La fermeture auto-cohérente impose

$$\eta = \eta_\mu^{(Z)}(\lambda_*).$$

Au rang LO, la largeur vérifie donc l'équation implicite

$$\boxed{\lambda_*^4\, D_{\mathrm{LO}}^{(Z2)}\Big(\bar{w}_{\mathrm{Z2}}; \delta_*^{\mathrm{Z2}}\Big(\eta_\mu^{(Z)}(\lambda_*)\Big); \eta_\mu^{(Z)}(\lambda_*)\Big) = 2\, h_{\mathrm{eff}} \sqrt{\rho\, T}.} \tag{28.114}$$

Au rang LO+,

$$\boxed{\lambda_*^4\, D_{\mathrm{LO+}}^{(Z2)}\Big(\bar{w}_{\mathrm{Z2}}; \delta_*^{\mathrm{Z2}}\Big(\eta_\mu^{(Z)}(\lambda_*)\Big); \eta_\mu^{(Z)}(\lambda_*)\Big) = 2\, h_{\mathrm{eff}} \sqrt{\rho\, T}.} \tag{28.115}$$

Puis

$$\omega_{0,*} = \frac{c_t}{\lambda_*}, \qquad \omega_{\mathrm{br},*} = \sigma\, \omega_{0,*}, \qquad m_{Z2}(\sigma) = \frac{h_{\mathrm{eff}}\, \sigma}{c_t\, \lambda_*}.$$

Le facteur $\sigma \in \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$ est celui de la projection conique 3DOF retenue dans la présente famille Z-like.

Condition d'existence (Z2). La branche Z2 canonique existe comme solution stationnaire interne au rang LO si, à la solution auto-cohérente λ_*,

$$\delta_*^{\mathrm{Z2}}\Big(\eta_\mu^{(Z)}(\lambda_*)\Big) \in (\delta_{\min}^{\mathrm{Z2}}, \delta_{\max}),$$

et si

$$D_{\mathrm{LO}+}^{(Z2)}\Big(\bar{w}_{\mathrm{Z2}}; \delta_*^{\mathrm{Z2}}\Big(\eta_\mu^{(Z)}(\lambda_*)\Big); \eta_\mu^{(Z)}(\lambda_*)\Big) > 0.$$

Si la minimisation sélectionne un bord du domaine admissible, la branche Z2 est classée comme branche de bord et n'est pas utilisée comme prédiction fermée au rang LO.

28.6.7 Z-like 3DOF tri-lobe

Motifs canoniques et noyaux bruts (tri-lobe). Pour les positions $\{-\delta, 0, +\delta\}$, les noyaux quadratiques dépendent du *motif entier brut* $\bar{w}$. Pour $p \in \{0, 2\}$:

$$\boxed{S_p[\bar{w}; \delta] = \sum_{i=1}^{3} \bar{w}_i^2\, J_p + 2 \sum_{1 \le i < j \le 3} \bar{w}_i \bar{w}_j\, J_p^{\times}(\Delta_{ij}), \qquad \{\Delta_{ij}\} = \{\delta, \delta, 2\delta\}.}$$

Le représentant normalisé associé est

$$\widehat{w}(\delta) = \frac{\bar{w}}{\sqrt{S_0[\bar{w}; \delta]}}.$$

Bornes admissibles (tri-lobe). On impose

$$\delta \in [\delta_{\min}^{\mathrm{Z3}}, \delta_{\max}].$$

La borne haute est la borne MSE canonique définie en (27.17).

et $\delta_{\min}^{\mathrm{Z3}} > 0$ est imposé par la condition de Gram (exclusion de la dégénérescence à $\delta = 0$).

Invariants réduits (tri-lobe). Pour tout motif brut $\bar{w}$, on introduit

$$\boxed{\widehat{s}_2^{\mathrm{Z3}}(\bar{w}; \delta) := \frac{S_2[\bar{w}; \delta]}{S_0[\bar{w}; \delta]}, \qquad \widehat{s}_{4,\mathrm{pair}}^{\mathrm{Z3}}(\bar{w}; \delta) := \frac{S_{4,\mathrm{pair}}[\bar{w}; \delta]}{S_0[\bar{w}; \delta]^2}, \qquad \widehat{n}_{\mathsf{F}}^{\mathrm{Z3}}(\bar{w}; \delta) := \frac{N_{\mathsf{F}}[\bar{w}; \delta]}{S_0[\bar{w}; \delta]}.} \tag{28.116}$$

Les objets $S_{4,\mathrm{pair}}$ et N_{F} sont ceux définis en (28.35) et (28.37). Pour le motif bi-lobe $\bar{w}_{\mathrm{Z2}} = (1, -1)$, les spécialisations explicites coïncident avec les formes canoniques (28.48) et (28.49).

Cas canoniques (positions $\{-\delta, 0, +\delta\}$) : motifs *représentatifs*. On donne ci-dessous des motifs primitifs bruts simples, utiles comme repères et comme initialisations. En secteur neutre symétrique, les contraintes réduisent la classe admissible à un unique motif primitif ; en secteur chargé, la sélection canonique finale reste celle de (28.107).

— **Tri-lobe neutre (branche symétrique)** $\bar{w} = (1, -2, 1)$:

$$S_0[(1, -2, 1); \delta] = 6J_0 - 8J_0^{\times}(\delta) + 2J_0^{\times}(2\delta),$$
$$S_2[(1, -2, 1); \delta] = 6J_2 - 8J_2^{\times}(\delta) + 2J_2^{\times}(2\delta),$$
$$n_{\mathrm{EM}}(1, -2, 1) = 1 - 2 + 1 = 0.$$

— **Tri-lobe chargé (secteur** $n = 1$**)** $\bar{w} = (1, -1, 1)$:

$$S_0[(1, -1, 1); \delta] = 3J_0 - 4J_0^{\times}(\delta) + 2J_0^{\times}(2\delta),$$
$$S_2[(1, -1, 1); \delta] = 3J_2 - 4J_2^{\times}(\delta) + 2J_2^{\times}(2\delta),$$
$$n_{\mathrm{EM}}(1, -1, 1) = 1 - 1 + 1 = 1.$$

— **Motif non primitif (redondant)** $\bar{w} = (2, -2, 2)$:

$$S_0[(2,-2,2);\delta] = 4\,S_0[(1,-1,1);\delta], \qquad S_2[(2,-2,2);\delta] = 4\,S_2[(1,-1,1);\delta],$$

mais $\gcd(2,-2,2) = 2$: ce motif n'est *pas* primitif, et il décrit la même direction que $(1,-1,1)$. Il ne définit donc pas un nouvel état Z3 distinct.

Fermeture réduite (Z3). On pose

$$K_{0,\mathrm{Z3}}^{(\mathrm{red})} = K_0^{(Z)}, \qquad K_{2,\mathrm{Z3}}^{(\mathrm{red})}(\bar{w};\delta) = \widehat{s}_2^{\mathrm{Z3}}(\bar{w};\delta)\,K_2^{(Z)},$$
$$K_{\mathrm{Z3}}^{(\mathrm{red})}(\bar{w};\delta) = K_{0,\mathrm{Z3}}^{(\mathrm{red})} + K_{2,\mathrm{Z3}}^{(\mathrm{red})}(\bar{w};\delta).$$

Le paramètre de réponse réduit est le paramètre sans dimension η, remplacé dans la fermeture auto-cohérente par $\eta_\mu^{(Z)}(\lambda_*)$. On définit

$$\boxed{\beta_{\mathrm{Z3}}^{(\mathsf{P})}(\bar{w};\delta;\eta) = \eta\,\Gamma_{\mathrm{P}}\,\frac{\widehat{s}_{4,\mathrm{pair}}^{\mathrm{Z3}}(\bar{w};\delta)}{\big(1+\eta^{-1}\widehat{s}_2^{\mathrm{Z3}}(\bar{w};\delta)\big)^2}, \qquad \beta_{\mathrm{Z3}}^{(\mathsf{F})}(\bar{w};\delta;\eta) = \zeta_{3D}\,\frac{\widehat{n}_{\mathsf{F}}^{\mathrm{Z3}}(\bar{w};\delta)}{1+\eta^{-1}\widehat{s}_2^{\mathrm{Z3}}(\bar{w};\delta)}.} \tag{28.117}$$

On définit

$$\beta_{\mathrm{Z3}}^{(\mathrm{eff})}(\bar{w};\delta;\eta) = \beta_{\mathrm{Z3}}^{(\mathsf{F})}(\bar{w};\delta;\eta) - \beta_{\mathrm{Z3}}^{(\mathsf{P})}(\bar{w};\delta;\eta),$$

puis

$$\boxed{D_{\mathrm{LO}}^{(Z3)}(\bar{w};\delta;\eta) = \eta\Big(K_{\mathrm{Z3}}^{(\mathrm{red})}(\bar{w};\delta) - \beta_{\mathrm{Z3}}^{(\mathrm{eff})}(\bar{w};\delta;\eta)\,K_0^{(Z)}\Big) - \beta_{\mathrm{Z3}}^{(\mathrm{eff})}(\bar{w};\delta;\eta)\,K_{2,\mathrm{Z3}}^{(\mathrm{red})}(\bar{w};\delta).} \tag{28.118}$$

La fermeture LO+ s'écrit

$$\boxed{D_{\mathrm{LO+}}^{(Z3)}(\bar{w};\delta;\eta) = D_{\mathrm{LO}}^{(Z3)}(\bar{w};\delta;\eta) + \Gamma_{\mathrm{shape}}K_0^{(Z)}.} \tag{28.119}$$

Définition de l'optimum. Avec le dénominateur réduit $D_{\mathrm{LO}}^{(Z3)}(\bar{w};\delta;\eta)$, on pose à η fixé

$$\boxed{\delta_*(\bar{w};\eta) \in \arg\min_{\delta\in I_{\mathrm{adm}}^{+,\mathrm{Z3}}(\bar{w};\eta)} D_{\mathrm{LO}}^{(Z3)}(\bar{w};\delta;\eta),}$$

où

$$\boxed{I_{\mathrm{adm}}^{+,\mathrm{Z3}}(\bar{w};\eta) = \Big\{\delta \in [\delta_{\min}^{\mathrm{Z3}},\,\delta_{\max}] \;:\; D_{\mathrm{LO}}^{(Z3)}(\bar{w};\delta;\eta) > 0\Big\}.} \tag{28.120}$$

En LO+ (gaine), $+\Gamma_{\mathrm{shape}}K_0^{(Z)}$ est indépendant de δ ; l'optimum est inchangé à η fixé.

Borne haute MSE et sélection de branche. La borne haute du domaine admissible est la borne MSE canonique

$$\delta_{\max} = \frac{u_*^\star}{2},$$

avec $u_*^\star$ défini par (27.16). Ainsi

$$\delta_{\max} = 0.93913003995\ldots.$$

La séparation de branche n'est pas imposée à cette borne. Elle est définie par minimisation sur le domaine admissible positif :

$$\delta_*(\bar{w};\eta) \in \arg\min_{\delta\in I_{\mathrm{adm}}^{+,\mathrm{Z3}}(\bar{w};\eta)} D_{\mathrm{LO}}^{(Z3)}(\bar{w};\delta;\eta).$$

La branche Z3 est fermée au rang LO seulement si ce minimum est intérieur :

$$\delta_*(\bar{w};\eta) \in (\delta_{\min}^{\mathrm{Z3}}, \delta_{\max}).$$

Si la minimisation donne un optimum de bord, la branche Z3 n'est pas promue comme solution stationnaire interne au rang LO.

Fermetures et masse (Z3). La fermeture auto-cohérente impose

$$\eta = \eta_\mu^{(Z)}(\lambda_*).$$

Au rang LO, la largeur vérifie donc l'équation implicite

$$\boxed{\lambda_*^4\, D_{\mathrm{LO}}^{(Z3)}\Big(\bar{w};\delta_*(\bar{w};\eta_\mu^{(Z)}(\lambda_*));\eta_\mu^{(Z)}(\lambda_*)\Big) = 2\,h_{\mathrm{eff}}\sqrt{\rho\,T}.} \tag{28.121}$$

Au rang LO+,

$$\boxed{\lambda_*^4\, D_{\mathrm{LO+}}^{(Z3)}\Big(\bar{w};\delta_*(\bar{w};\eta_\mu^{(Z)}(\lambda_*));\eta_\mu^{(Z)}(\lambda_*)\Big) = 2\,h_{\mathrm{eff}}\sqrt{\rho\,T}.} \tag{28.122}$$

Puis

$$\omega_{0,*} = \frac{c_t}{\lambda_*}, \qquad \omega_{\mathrm{br},*} = \sigma\,\omega_{0,*}, \qquad m_{Z3}(\sigma) = \frac{h_{\mathrm{eff}}\,\sigma}{c_t\,\lambda_*}.$$

Condition d'existence (Z3). La branche Z3 existe comme solution stationnaire interne au rang LO si, à la solution auto-cohérente λ_*,

$$\delta_*(\bar{w};\eta_\mu^{(Z)}(\lambda_*)) \in (\delta_{\min}^{\mathrm{Z3}}, \delta_{\max}),$$

et si

$$D_{\mathrm{LO+}}^{(Z3)}\Big(\bar{w};\delta_*(\bar{w};\eta_\mu^{(Z)}(\lambda_*));\eta_\mu^{(Z)}(\lambda_*)\Big) > 0.$$

Si la minimisation sélectionne un bord du domaine admissible, la branche Z3 est classée comme branche de bord et n'est pas utilisée comme prédiction fermée au rang LO.

Commentaires (validité LO). (i) La liaison, c'est-à-dire l'existence du composé, est gouvernée par la compétition entre le canal fort-like attractif et la Préclusion répulsive via

$$\beta_{\mathrm{Z3}}^{(\mathrm{eff})}(\bar{w};\delta;\eta) = \beta_{\mathrm{Z3}}^{(\mathsf{F})}(\bar{w};\delta;\eta) - \beta_{\mathrm{Z3}}^{(\mathsf{P})}(\bar{w};\delta;\eta).$$

En l'absence de quartique attractive, aucun composé n'est retenu.

(ii) Les masses ne sont pas dégénérées d'un motif à l'autre, car $S_0[\bar{w};\delta]$, $S_2[\bar{w};\delta]$ et les invariants réduits $\widehat{s}_2^{\mathrm{Z3}}$, $\widehat{s}_{4,\mathrm{pair}}^{\mathrm{Z3}}$, $\widehat{n}_{\mathsf{F}}^{\mathrm{Z3}}$ dépendent de la direction interne.

(iii) La règle (28.105) classe neutre/chargé au niveau du *label monopolaire discret* $n_{\mathrm{EM}}(\bar{w})$. Pour les configurations à fort recouvrement, l'amplitude externe réduite peut être réduite par un facteur de forme, et par σ en 3DOF conique, sans changer la classification neutre/chargé donnée par $n_{\mathrm{EM}}(\bar{w})$.

Charge EM effective (Z-like) : label monopolaire et amplitude réduite

Deux niveaux (important). La règle (28.105) fixe un *label monopolaire discret* via l'entier

$$n_{\mathrm{EM}}(\bar{w}) = \sum_{i=1}^{k} \bar{w}_i \in \mathbb{Z}.$$

Elle est suffisante pour classer les états

$$n_{\mathrm{EM}} = 0 \Rightarrow \text{neutre}, \qquad n_{\mathrm{EM}} \neq 0 \Rightarrow \text{chargé}.$$

En recouvrement non négligeable, l'amplitude réduite du monopôle est modulée par (i) un *facteur de forme* dépendant de la structure interne $(\bar{w},\delta)$ et (ii) en 3DOF conique, par la projection $\sigma = \sin^2\alpha$.

Facteur de forme (défini par les mêmes noyaux S_0, S_2). On introduit le facteur de forme réduit, à paramètre η fixé,

$$\boxed{\mathcal{C}_S^{(Z)}(\bar{w};\delta;\eta) := \frac{S_0[\bar{w};\delta]}{S_0[\bar{w};\delta] + \eta^{-1} S_2[\bar{w};\delta]} \in (0,1),} \tag{28.123}$$

qui généralise la valeur bump simple

$$\mathcal{C}_S^{(\mathrm{bump})}(\eta) = \frac{J_0}{J_0 + \eta^{-1} J_2}.$$

Dans la fermeture auto-cohérente, on prend

$$\eta = \eta_\mu^{(Z)}(\lambda_*).$$

Définition de la charge effective réduite. On définit la charge effective réduite

$$\boxed{q_{\mathrm{eff}}^{(Z)}(\bar{w};\delta,\sigma;\eta) := n_{\mathrm{EM}}(\bar{w})\,\sigma\,\frac{\mathcal{C}_S^{(Z)}(\bar{w};\delta;\eta)}{\mathcal{C}_S^{(\mathrm{bump})}(\eta)}.} \tag{28.124}$$

Ainsi : (i) si $n_{\mathrm{EM}}(\bar{w}) = 0$, alors $q_{\mathrm{eff}}^{(Z)} = 0$ identiquement ; (ii) si $n_{\mathrm{EM}}(\bar{w}) \neq 0$, alors l'amplitude est modulée par $\mathcal{C}_S^{(Z)}(\bar{w};\delta;\eta)/\mathcal{C}_S^{(\mathrm{bump})}(\eta)$ et par le facteur conique σ. Dans la fermeture réduite, η est évalué à $\eta_\mu^{(Z)}(\lambda_*)$.

Remarques. (i) La classification neutre/chargé est déterminée par $n_{\mathrm{EM}}(\bar{w})$ tandis que $q_{\mathrm{eff}}^{(Z)}$ donne l'amplitude effective réduite. (ii) Au rang meneur, $q_{\mathrm{eff}}^{(Z)}$ dépend de $(\bar{w},\delta,\sigma;\eta)$, mais pas du niveau EBK q : l'effet de q porte sur l'énergie via $E_0 \propto q$. (iii) Dans la présente partie théorique, $q_{\mathrm{eff}}^{(Z)}$ doit être lu comme une *amplitude effective de monopôle* dérivée de la structure interne.

Deuxième partie

Ancrage de HSM sur les grandeurs observées et prédictions physiques et structure de la maille

Chapitre 29

Calibrages actifs et produits fermés

29.1 Introduction

Les solutions localisées de la théorie HSM sur $\mathbb{S}^3$ (solitons 2DOF/3DOF, breathers, modes quasi–c_t, etc.) présentent des *analogies structurelles* nettes avec les objets du Modèle Standard (SM) : les *bumps* 2DOF miment la famille leptonique, les *breathers* 2DOF des compagnons neutres (neutrino-like), la branche NSL 2DOF et la solution Z–like 2DOF reproduisent la cinématique du secteur faible, les *qct* 2DOF/3DOF rendent compte des porteurs EM/gluon-like, et les *bumps* 3DOF (précession conique) fournissent les sources 3DOF internes qui alimentent les composés couleur–blancs de type CB3/CB2. Les projections coniques

$$\sigma = \sin^2 \alpha \in \left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right\}$$

portent la signature fractionnaire des branches 3DOF.

Dans ce chapitre, nous passons au **test quantitatif** au leading order (LO) : définir des *calibrages minimaux* et dériver des *prédictions* indépendantes, en séparant rigoureusement ce qui est fixé par la théorie de ce qui est fixé par les observables. Conventions de la partie observationnelle :

- **Conventions universelles de la partie observationnelle** : $h_{\text{eff}} = \hbar$, $c_t = c$.
- **Paramètres matériaux (structure)** : densité volumique ρ, tension tangentielle T, raideur radiale locale μ_2, coefficient local $\kappa_\mu := \mu_2/T$, coefficient de gradient radial κ_r, échelle micro ℓ_0, rayon R_0.
- **Structure théorique (sans calibrage)** : la théorie introduit trois premiers seuils admissibles $q_1 < q_2 < q_3$, communs aux familles pertinentes au rang LO.

Philosophie "calibrer → prédire". Nous adoptons une logique à deux temps, sans circularité :

1. **Calibrages minimaux** : déterminer un sous-ensemble de constantes $\{\rho, T, \kappa_\mu, \kappa_r, \ell_0, R_0\}$ par des voies *orthogonales* (EM, faible, géométrie $S^3 \ldots$), chacune utilisant le *strict minimum* d'observables.
2. **Prédictions** : injecter ces constantes dans d'autres canaux/observables *non utilisés* au point 1 (par ex. : G_N calibre $\kappa_r R_0$ via le grav-like macro ; la chaîne faible prédit ensuite m_Z, etc.).

Chaque prédiction est accompagnée d'un tableau "HSM vs exp." et d'un bilan d'écart LO (les corrections NLO étant documentées ailleurs).

Contents

28.1 Objet, hypothèses LO, blancheur et filtres 347
28.2 Énergie géométrique de stationnarité des branches résolues 348
28.3 Géométries CB2 et CB3 : réduction à une variable 349
28.3.1 Configuration CB2 ($N = 2$) 349
28.3.2 Configuration CB3 ($N = 3$) 349
28.4 Branche CB3 résolue : optimum en δ et masse 350
28.5 Branche breather (recouvrement fort) : champ composé, recouvrements et fermeture 358
28.5.1 Ansatz composé et fonctionnelles de recouvrement 359
28.5.2 Contraintes internes : blancheur, Gram, normalisation 361
28.5.3 Impédances effectives, fermeture $\mathcal{D}_{\mathrm{LO}}$ et énergie structurale 361
28.5.4 Domaine admissible et principe de sélection des breathers 362
28.6 Z-like 3DOF multi-lobes (court-portée, neutre couleur) — forme poids 372
28.6.1 Règle de charge (EM) — commune Z-like 374
28.6.2 Principe variationnel interne : détermination de $\bar{w}$ (commun Z-like) . . 374
28.6.3 Auto-induction forte de gaine (commun Z-like) 375
28.6.4 Filtre EBK et valeurs admissibles de q (Z-like 3DOF) 375
28.6.5 Spin géométrique et projection (commun Z-like 3DOF) 376
28.6.6 Z-like 3DOF bi-lobe 378
28.6.7 Z-like 3DOF tri-lobe 380

29.2 Portée, hypothèses et correspondances HSM $\leftrightarrow$ SM

Nous travaillons au **LO** dans la calotte quasi–plane de $\mathbb{S}^3$ (coeurs fins $\lambda \ll R_0$) et utilisons les normalisations de la partie observationnelle ($h_{\mathrm{eff}} = \hbar$, $c_t = c$). Les *ratios* purement spectraux issus de la sélection EBK et du raccord sont indépendants de ρ, T, R_0 au LO ; ces paramètres gouvernent les échelles absolues et/ou les corrections NLO.

Statut des constantes et provenance (rappel synthétique)

— **Conventions propres à la partie observationnelle** :

$$h_{\mathrm{eff}} = \hbar, \qquad c_t = c.$$

— **Importées de la théorie, sans calibrage supplémentaire** : facteurs coniques 3DOF

$$\sigma = \sin^2 \alpha \in \left\{ \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3} \right\},$$

constantes de coeur (J_0, J_2) du profil retenu, mesures normalisées, formes de noyaux, et plus généralement les quantités sans dimension déjà dérivées dans les chapitres théoriques correspondants.

— **Fixés par calibrage dans le présent chapitre** :

— le triplet spectral calibré

$$(q_1, q_2, q_3)_{\mathrm{cal}} = (1, 207, 3477),$$

utilisé ici comme *entrée de calibrage* et non comme donnée fondamentale de théorie pure ;

— ℓ_0 (voie EM par Z_0, cf. §29.6) ;

— κ_μ : ancrage d'échelle par m_W et ratio théorique $Z0$/NSL2, cf. §29.5 ;

  - ρ, T, κ_r, lorsqu'ils sont effectivement fermés sur données dans les sections de calibrage correspondantes.
- **Prédits plus loin dans ce chapitre** :
  - R_0, lorsqu'il est fermé par une chaîne de prédiction dédiée ;
  - toute grandeur numérique obtenue après injection des calibrages précédents dans un canal non utilisé pour les fixer.
- **Constantes "pures" (nombres sans dimension)** : facteurs géométriques de noyau, préfacteurs de fenêtres, etc., listés et évalués numériquement dans les sections théoriques ou annexes correspondantes, avec renvoi explicite lorsqu'ils sont utilisés dans ce chapitre.

Règle de traçabilité numérique. Dans tout le présent chapitre, toute valeur numérique utilisée doit relever de l'un des deux cas suivants :

1. elle est **calculée dans le présent chapitre** et la section de calcul est explicitement référencée ;
2. elle est **importée d'une section théorique** déjà dérivée et cette provenance est explicitement référencée.

Aucune valeur gelée ne doit apparaître sans provenance explicite.

Correspondances de canaux (rappel)

Bump 2DOF	$\longleftrightarrow$	leptons (e, μ, τ),
Breather 2DOF	$\longleftrightarrow$	neutrinos (hyp.),
NSL 2DOF	$\longleftrightarrow$	W-like, Z-like 2DOF $\longleftrightarrow$ Z^0,
Qct 2DOF	$\longleftrightarrow$	γ (photon), Qct 3DOF $\longleftrightarrow$ gluon,
Bump 3DOF isolé	$\longleftrightarrow$	source 3DOF interne non directement observable,
CB3/CB2 couleur–blancs	$\longleftrightarrow$	états hadron–like.

Remarque (unités). Nous suivons la convention HSM : ρ est une densité *volumique* portée par la couche matérielle de $\mathbb{S}^3$. Les clarifications d'unités rédactionnelles (si nécessaires) seront regroupées dans un encadré "Unités & conversions". Cela n'affecte pas les *ratios* LO ni la logique calibrer→prédire.

29.2.1 Méthodologie et typologie d'incertitude

Fermetures LO régularisées corrélées. Lorsqu'une constante théorique est issue d'une fermeture LO régularisée, son incertitude n'est pas traitée comme une incertitude expérimentale de type A. Elle est propagée comme incertitude théorique de type B, avec les corrélations imposées par les fermetures amont.

En particulier, pour la fermeture bump 2DOF,

$$b_0^{(2)} = b_0^{(2),\text{LO-reg}}, \qquad \frac{\sigma_{b_0}}{b_0} \simeq \frac{0.04}{1.80} \simeq 2.2\%,$$

et

$$\kappa_\omega = \sqrt{\frac{3b_0^{(2)}}{J_0 + J_2}}, \qquad \frac{\delta\kappa_\omega}{\kappa_\omega} = \frac{1}{2}\,\frac{\delta b_0^{(2)}}{b_0^{(2)}}.$$

Dans les chaînes où ℓ_0 est calibré par la fermeture EM–like utilisant le même $b_0^{(2)}$, la dépendance de ℓ_0 à $b_0^{(2)}$ doit être propagée de manière corrélée, et non comme une incertitude indépendante.

Propagation. Lorsqu'une grandeur Y dépend de variables x_i,

$$Y = Y(x_1, \dots, x_n),$$

la propagation locale utilisée dans ce chapitre est

$$\left(\frac{\sigma_Y}{Y}\right)^2 \simeq \sum_i \left(\frac{\partial \ln Y}{\partial \ln x_i}\frac{\sigma_{x_i}}{x_i}\right)^2,$$

sauf lorsqu'une section spécifique justifie une propagation non linéaire ou une bande de variation directe.

Anti-circularité. Une observable consommée comme entrée de calibrage ne peut pas être utilisée ensuite comme test indépendant dans la même chaîne. À l'inverse, une observable qui n'entre pas dans une fermeture peut être utilisée comme référence de comparaison dans le chapitre de prédiction.

29.3 Entrées observationnelles et constantes exactes utilisées dans les calibrages LO

Objet. Cette sous-section fixe explicitement les constantes exactes et les observables d'entrée utilisées dans les calibrages LO. Les observables listées ici sont celles qui sont consommées pour déterminer les grandeurs structurelles du modèle. Les observables utilisées seulement pour comparaison ou prédiction après calibrage sont indiquées séparément dans les sections de prédiction.

Sources externes. Les constantes fondamentales et constantes SI utilisées pour l'atterrissage observationnel sont prises dans CODATA/NIST 2022 [1]. Les masses, largeurs et propriétés de particules utilisées comme références de comparaison sont prises dans le *Review of Particle Physics* du Particle Data Group 2024 [2], sauf mention explicite contraire. La valeur $m_W^{\mathrm{ref}} = 80.379\,\mathrm{GeV}/c^2$ est conservée comme entrée de calibrage faible du jeu PDG antérieur [21]. Les paramètres d'oscillation neutrino et les angles PMNS utilisés comme références de comparaison sont pris dans NuFIT 5.3 [3].

Identifications observationnelles exactes. Dans ce chapitre de calibrage, on utilise les identifications

$$h_{\mathrm{eff}} = \hbar, \qquad c_t = c.$$

Les valeurs numériques associées sont

Grandeur	Valeur utilisée	Statut
$\hbar$	$1.054571817 \times 10^{-34}\ \mathrm{J\,s}$	constante exacte dans l'atterrissage observationnel
c	$2.99792458 \times 10^{8}\ \mathrm{m\,s^{-1}}$	constante exacte dans la convention de la partie observationnelle

Entrées observationnelles consommées par les calibrages actifs. Les entrées suivantes interviennent effectivement dans les fermetures structurales du chapitre. Les observables utilisées seulement pour comparaison sont listées séparément plus bas.

Entrée	Valeur utilisée	Grandeur fermée	Référence dans la chaîne
m_W^{ref}	80.379 GeV/c^2	Ancrage d'échelle de la branche NSL 2DOF chargée	PDG 2020 [21] ; $\lambda_{\mathrm{NSL}} = \hbar/(m_W^{\mathrm{ref}} c)$
Z_0^{obs}	376.730313668 Ω	ℓ_0	CODATA/NIST 2022 [1] ; (29.14)
G_N^{obs}	6.67430×10^{-11} $\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$	$Q_r = \kappa_r R_0$	CODATA/NIST 2022 [1] ; (29.27)

Entrées de calibrage discrètes. Le triplet

$$(q_1, q_2, q_3)_{\mathrm{cal}} = (1, 207, 3477)$$

est une entrée discrète de calibrage spectrale. Il est fixé dans §29.3.1. Il ne constitue pas une constante fondamentale de la théorie pure.

Sorties dérivées après calibrage croisé. Certaines grandeurs fondamentales ne sont pas fermées par une observable unique. Dans la chaîne active, la fermeture gravitation–like fournit le produit

$$Q_r = \kappa_r R_0.$$

La séparation de ce produit en κ_r et R_0 n'est pas effectuée à partir du secteur Bump 3DOF : les masses et rapports de masses de quarks ne sont pas des observables directes d'un bump 3DOF isolé. Une séparation indépendante de κ_r et R_0 devra provenir d'une fermeture radiale ou géométrique distincte. De même, la compatibilité bump 2DOF fournit l'intermédiaire inertiel

$$P_{\rho R} = \rho R_0,$$

qui donne

$$\rho = \frac{P_{\rho R}}{R_0}$$

une fois R_0 séparé, puis

$$T = \rho c^2.$$

Ces sorties dérivées sont synthétisées en §29.10.

Observables non consommées par les calibrages structuraux. Les grandeurs suivantes sont conservées comme références de comparaison, de contrôle ou de prédiction après calibrage, mais ne doivent pas être comptées comme entrées des fermetures structurales ci-dessus :

$$m_e^{\mathrm{obs}}, \qquad m_Z^{\mathrm{obs}}, \qquad G_F^{\mathrm{obs}}, \qquad m_H^{\mathrm{obs}}, \qquad \Delta m_{21}^2,\ |\Delta m_{3\ell}^2|$$

selon les sections concernées.

En particulier, dans la fermeture restructurée du bump 2DOF, m_e^{obs} n'est pas utilisé pour déterminer $P_{\rho R} = \rho R_0$: la combinaison $P_{\rho R}$ est fermée par compatibilité interne entre la voie spectrale locale et la voie mécanique globale.

De même, dans le secteur Bump 3DOF, les rapports

$$s/d, \qquad b/s, \qquad c/u, \qquad t/c$$

ne sont pas consommés comme entrées de calibrage. Les grandeurs associées aux quarks libres sont traitées comme des références de schéma externes, non comme des observables directes d'un bump 3DOF isolé. Les comparaisons observationnelles doivent être reportées aux composés couleur–blancs CB3/CB2.

29.3.1 Fixation du triplet de calibrage des seuils admissibles

Dans la partie théorique, la structure du filtre de retour admissible introduit trois seuils $q_1 < q_2 < q_3$, communs au bump 2DOF, au bump 3DOF et au breather 2DOF au rang LO. En revanche, la théorie pure ne fixe pas explicitement, à ce niveau, les valeurs numériques de ces seuils.

Dans la présente partie observationnelle, on choisit donc de fixer le triplet de calibrage des trois premiers seuils admissibles à partir de la hiérarchie des leptons chargés :

$$\boxed{(q_1, q_2, q_3)_{\mathrm{cal}} = (1,\ 207,\ 3477).}$$

On utilisera ensuite ce triplet de calibrage dans toute la suite de la présente partie, avec les identifications

$$q_1 \leftrightarrow \text{niveau léger}, \qquad q_2 \leftrightarrow \text{niveau intermédiaire}, \qquad q_3 \leftrightarrow \text{niveau lourd}.$$

Ainsi, dans la suite, les valeurs numériques $(1, 207, 3477)$ ne sont pas posées comme une prédiction fermée de la théorie pure, mais comme le triplet de calibrage retenu pour les trois premiers seuils admissibles.

29.4 Calibrage du résidu isotrope effectif du seuil q_2

Références (labels). La réduction isotrope du second seuil est donnée par (6.37), (6.38) et (6.39). Ces relations établissent que le seuil q_2 fixe la valeur effective du rapport isotrope

$$\mathcal{G}_{\mathrm{mesh}}^{(\mathrm{iso})} = \frac{r_2(q_2)}{r_1(q_2)}.$$

Le seuil discret $q_2^{\mathrm{cal}} = 207$ est l'entrée entière de calibrage retenue pour cette fermeture de seuil. Il est rappelé en (29.2).

Objet. La théorie établit que le premier seuil non trivial q_2 est relié au résidu isotrope de retour par la fermeture

$$\boxed{q_{2,\mathrm{LO}} = -\frac{2}{\mathcal{G}_{\mathrm{mesh}}^{(\mathrm{iso})}}}. \tag{29.1}$$

Cette équation est le rappel observationnel de (6.38).

Dans la présente sous-section, on n'introduit pas de forme explicite $\mathcal{G}_{\mathrm{mesh}}^{(\mathrm{iso})}(\chi)$. On calibre seulement la valeur effective du résidu isotrope requise par le seuil entier retenu.

Seuil retenu. On utilise le seuil discret de calibrage

$$\boxed{q_2^{\mathrm{cal}} = 207.} \tag{29.2}$$

L'injection de (29.2) dans (29.1) donne immédiatement

$$\boxed{\mathcal{G}_{\mathrm{iso}}^{\mathrm{cal}} := \mathcal{G}_{\mathrm{mesh}}^{(\mathrm{iso})}\big|_{\mathrm{cal}} = -\frac{2}{207} = -0.00966183574879.} \tag{29.3}$$

Contrôle de signe. La condition théorique (6.39) impose

$$\mathcal{G}_{\mathrm{mesh}}^{(\mathrm{iso})} < 0.$$

La valeur calibrée (29.3) vérifie bien cette condition :

$$\mathcal{G}_{\mathrm{iso}}^{\mathrm{cal}} = -0.00966183574879 < 0.$$

On obtient donc

$$-\frac{2}{\mathcal{G}_{\mathrm{iso}}^{\mathrm{cal}}} = 207,$$

ce qui referme exactement le seuil retenu.

Statut de la quantité calibrée. La quantité calibrée ici n'est pas χ, mais la valeur effective du fonctionnel isotrope :

$$\boxed{\mathcal{G}_{\mathrm{iso}}^{\mathrm{cal}} = -\frac{2}{207}.}$$

La variable

$$\chi = \frac{\Xi_{\tan}}{\Xi_r}$$

relève de la réalisation géométrique aval. Elle ne peut être extraite numériquement qu'une fois une forme explicite validée de $\mathcal{G}_{\mathrm{mesh}}^{(\mathrm{iso})}(\chi)$ disponible dans la construction géométrique aval. En l'absence d'une telle fermeture, aucune valeur χ_{cal} n'est affichée dans cette sous-section.

Lien avec la reconstruction géométrique aval. La reconstruction géométrique aval consomme la contrainte calibrée (29.3) sous la forme

$$\mathcal{G}_{\mathrm{mesh}}^{(\mathrm{iso})}(\chi) = \mathcal{G}_{\mathrm{iso}}^{\mathrm{cal}}.$$

Cette relation ne fixe pas directement χ tant que la fonction $\mathcal{G}_{\mathrm{mesh}}^{(\mathrm{iso})}(\chi)$ n'est pas explicitement dérivée pour une classe de réalisations géométriques donnée. Elle impose en revanche une contrainte de signe et d'amplitude sur toute réalisation admissible :

$$\mathcal{G}_{\mathrm{mesh}}^{(\mathrm{iso})} < 0, \qquad \left|\mathcal{G}_{\mathrm{mesh}}^{(\mathrm{iso})}\right| = \frac{2}{207}.$$

Ainsi, la réalisation géométrique aval ne reçoit pas une valeur arbitraire de χ ; elle doit réaliser la valeur effective $\mathcal{G}_{\mathrm{iso}}^{\mathrm{cal}}$ par sa géométrie interne.

Incertitude. Dans la stratégie retenue en §29.2.1, le seuil $q_2^{\mathrm{cal}} = 207$ est retenu comme entier de calibrage. Aucune incertitude expérimentale continue n'est donc propagée localement dans cette sous-section. Une variation de q_2 relèverait d'un changement discret de branche de calibrage, et non d'une barre d'erreur locale sur $\mathcal{G}_{\mathrm{iso}}^{\mathrm{cal}}$.

29.5 Calibrage de κ_μ par ancrage m_W et ratio théorique $Z0$/NSL2

Références (labels). La définition du coefficient local radial est donnée par (1.15). La réduction locale NSL 2DOF et la combinaison $\kappa_\mu\lambda^2$ sont données par (6.127) et (6.130). Les fonctions de recouvrement du composé neutre sont définies dans (22.12). Le point lié neutre est verrouillé par (22.16)–(22.17). Les coefficients réduits des canaux EM-like et préclusion sont fermés par (22.15) et (22.18). Les dénominateurs spectraux faible-like sont donnés par (22.35) et (22.36). Le facteur neutre $\widehat{\beta}_0^{(2)}$ est défini par (22.37) et évalué dans Prop. 22.7. Les constantes $K_0^{(2)}$ et $K_2^{(2)}$ sont fixées dans (22.40). La valeur du point lié neutre verrouillé est donnée par (22.17).

Cadre. On considère ici la remontée du coefficient local radial

$$\kappa_\mu := \frac{\mu_2}{T},$$

dans le doublet 2DOF constitué par la branche chargée NSL 2DOF et le composé neutre $Z0$-like. L'entrée observationnelle consommée est m_W, qui fixe l'échelle λ_{NSL}. Le rapport neutre/chargé utilisé ensuite est le ratio théorique R_{th}, dérivé de $\delta^*(u_{\mathsf{Z}}^\star)$, et non le rapport observationnel m_Z^{obs}/m_W. La théorie faible-like 2DOF montre que le terme radial local n'entre pas seul dans les fermetures, mais à travers la combinaison réduite

$$x := \kappa_\mu \, \lambda_{\mathrm{NSL}}^2,$$

où λ_{NSL} désigne la largeur de coeur du constituant chargé NSL 2DOF.

La chaîne logique retenue est désormais

$$m_W \implies \lambda_{\mathrm{NSL}}, \qquad u_{\mathsf{Z}}^\star, \mathcal{C}_{\mathrm{EM}}^{(2)} \implies A_{\mathrm{EM}}^{(Z)}, A_{\mathrm{P}}^{(Z)} \implies \delta^*(u_{\mathsf{Z}}^\star) \implies R_{\mathrm{th}}, \qquad (\lambda_{\mathrm{NSL}}, R_{\mathrm{th}}) \implies \kappa_\mu.$$

Hypothèses (LO, 2DOF sans couleur). Au LO, W est modélisé comme une solution NSL–2DOF chargée (sans couleur), et l'état neutre correspondant comme le composé Z_0-like 2DOF. Aucun angle de couleur n'intervient dans cette famille. Pour le profil gelé $a(\xi) = \operatorname{sech} \xi$, on utilise les constantes de canal

$$K_0^{(2)} = J_0^2, \qquad K_2^{(2)} = J_0 J_2, \qquad K_{\mathrm{bump}} = J_0(J_0 + J_2),$$

ainsi que le facteur neutre 2DOF $\widehat{\beta}_0^{(2)}$ fourni par la théorie.

Étape 1 : calibrage direct de λ_{NSL} par m_W. Dans la partie observationnelle, on identifie

$$h_{\mathrm{eff}} = \hbar, \qquad c_t = c,$$

et la branche chargée W est la solution NSL 2DOF. La relation de masse LO

$$m_W = \frac{h_{\mathrm{eff}}}{c_t \, \lambda_{\mathrm{NSL}}}$$

donne alors directement

$$\boxed{\lambda_{\mathrm{NSL}} = \frac{\hbar}{m_W \, c}.} \tag{29.4}$$

Étape 2 : ratio théorique du doublet neutre/chargé. La fermeture théorique du composé neutre fournit

$$\delta^*(u_{\mathsf{Z}}^\star) = A_{\mathrm{P}}^{(Z)} \, \mathcal{O}_2(u_{\mathsf{Z}}^\star) - A_{\mathrm{EM}}^{(Z)} \, \mathcal{O}_1(u_{\mathsf{Z}}^\star), \tag{29.5}$$

avec $u_{\mathsf{Z}}^\star$ verrouillé par (22.17). avec les fonctions de recouvrement définies dans (22.12) :

$$\mathcal{O}_1(u) = (u \operatorname{csch} u)^2, \qquad \mathcal{O}_2(u) = 2\,(u \coth u - 1) \operatorname{csch}^2 u.$$

On définit alors le ratio théorique

$$\boxed{R_{\mathrm{th}} := \left(\frac{m_Z^{(\mathrm{th})}}{m_W} \right)^4 = (1 + |\delta^*(u_{\mathsf{Z}}^\star)|)^2 .} \tag{29.6}$$

Étape 3 : extraction de la combinaison réduite $x = \kappa_\mu \lambda_{\mathrm{NSL}}^2$. Au LO, les deux branches du doublet 2DOF partagent le même préfacteur d'échelle (en particulier le facteur $(2h_{\mathrm{eff}}c_t/T)$) et ne diffèrent que par leur dénominateur de fermeture. On écrit donc, avec

$$x := \kappa_\mu \lambda_{\mathrm{NSL}}^2,$$

les dénominateurs spectraux de (22.35) et (22.36) sous la forme

$$D_{Z0}(x) = x\Big(K_{\mathrm{bump}} + (1+\widehat{\beta}_0^{(2)})K_0^{(2)}\Big) + (1+\widehat{\beta}_0^{(2)})K_2^{(2)},$$

et, pour la branche chargée NSL 2DOF,

$$D_{\mathrm{NSL2}}(x) = x\Big(K_{\mathrm{bump}} + K_0^{(2)}\Big) + K_2^{(2)}.$$

En utilisant l'identité de masse théorique

$$\left(\frac{m_{Z0}^{(\mathrm{th})}}{m_W}\right)^4 = \frac{D_{Z0}(x)}{D_{\mathrm{NSL2}}(x)},$$

on obtient

$$R_{\mathrm{th}} = \frac{D_{Z0}(x)}{D_{\mathrm{NSL2}}(x)}.$$

La relation

$$D_{Z0}(x) = R_{\mathrm{th}}\, D_{\mathrm{NSL2}}(x)$$

est linéaire en x, d'où

$$\boxed{x = \kappa_\mu \lambda_{\mathrm{NSL}}^2 = \frac{K_2^{(2)}\,(R_{\mathrm{th}} - 1 - \widehat{\beta}_0^{(2)})}{(K_{\mathrm{bump}} + K_0^{(2)})(1-R_{\mathrm{th}}) + K_0^{(2)}\,\widehat{\beta}_0^{(2)}}.} \tag{29.7}$$

Constantes de forme et facteur neutre 2DOF. Pour le profil gelé $a(\xi) = \operatorname{sech}\xi$,

$$J_0 = \frac{\pi^3}{3} = 10.3354255601, \qquad J_2 = 7.6339320582,$$

d'où

$$K_{\mathrm{bump}} = J_0(J_0 + J_2) = 185.7209580268,$$

$$K_0^{(2)} = J_0^2 = 106.8210215084, \qquad K_2^{(2)} = J_0 J_2 = 78.8999365184.$$

Par ailleurs, la théorie donne au LO, cf. (22.37) et Prop. 22.7,

$$\widehat{\beta}_0^{(2)} = 1 - \frac{1}{4u_*^2} + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

avec u_* fixé canoniquement par (6.23). En évaluant la racine canonique

$$u_* \simeq 2.00712,$$

on obtient

$$\widehat{\beta}_{0,\mathrm{LO}}^{(2)} \simeq 0.9379428908.$$

Entrées théoriques et évaluation numérique. Les coefficients réduits utilisés sont ceux de (22.15) et (22.18) :

$$A_{\mathrm{EM}}^{(Z)} \simeq 6.154440302, \qquad A_{\mathrm{P}}^{(Z)} \simeq 9.854589062.$$

Avec la prédiction LO du doublet neutre/chargé,

$$\boxed{\delta_{\mathrm{th}}^{*} := |\delta^{*}(u_{\mathsf{Z}}^{\star})| = 0.2613503319.} \tag{29.8}$$

on obtient

$$R_{\mathrm{th}} = (1 + |\delta^{*}(u_{\mathsf{Z}}^{\star})|)^{2} \simeq 1.5910046598.$$

L'insertion dans (29.7) donne d'abord

$$\boxed{\kappa_{\mu}\lambda_{\mathrm{NSL}}^{2} \simeq 0.3765169342.} \tag{29.9}$$

Valeur numérique de λ_{NSL}. La relation (29.4), appliquée avec l'entrée observationnelle m_W, donne

$$\boxed{\lambda_{\mathrm{NSL}} = \frac{\hbar}{m_W\, c} \simeq 2.454956896 \times 10^{-18}\ \mathrm{m}.} \tag{29.10}$$

Remontée au coefficient physique κ_{μ}. On en déduit alors

$$\boxed{\kappa_{\mu} = \frac{\kappa_{\mu}\lambda_{\mathrm{NSL}}^{2}}{\lambda_{\mathrm{NSL}}^{2}} \simeq 6.24736 \times 10^{34}\ \mathrm{m}^{-2}.} \tag{29.11}$$

Statut. La remontée de κ_{μ} se fait donc en trois temps :

1. la masse m_W fixe directement la largeur de coeur du constituant NSL 2DOF, λ_{NSL}, via (29.4) ;
2. la fermeture théorique du composé neutre fournit $\delta^{*}(u_{\mathsf{Z}}^{\star})$, puis le ratio théorique R_{th} via (29.6) ;
3. le ratio théorique R_{th} calibre ensuite la combinaison réduite $\kappa_{\mu}\lambda_{\mathrm{NSL}}^{2}$ via (29.7), ce qui permet enfin de remonter à κ_{μ} par (29.11).

Aucune consommation directe de $m_Z^{(\mathrm{obs})}$ n'intervient dans cette sous-section.

Incertitude. On écrit d'abord la quantité réduite sous la forme

$$\kappa_{\mu}\lambda_{\mathrm{NSL}}^{2} = \mathcal{F}\big(R_{\mathrm{th}}; \widehat{\beta}_{0}^{(2)}, K_{0}^{(2)}, K_{2}^{(2)}, K_{\mathrm{bump}}\big).$$

Le coefficient physique s'en déduit par

$$\kappa_{\mu} = \mathcal{F}(R_{\mathrm{th}}; \widehat{\beta}_{0}^{(2)}, K_{0}^{(2)}, K_{2}^{(2)}, K_{\mathrm{bump}}) \left(\frac{m_W c}{h_{\mathrm{eff}}}\right)^{2},$$

avec $h_{\mathrm{eff}} = \hbar$ dans la partie observationnelle. Dans la stratégie retenue ici, u^{*}, $\widehat{\beta}_{0}^{(2)}$, $K_{0}^{(2)}$, $K_{2}^{(2)}$, K_{bump}, $A_{\mathrm{EM}}^{(Z)}$, $A_{\mathrm{P}}^{(Z)}$ et donc R_{th} sont des entrées théoriques fixées de manière univoque au LO. La contribution de type A issue de m_W reste négligeable à la précision utile retenue ici. On obtient ainsi

$$\boxed{\kappa_{\mu} \simeq 6.24736 \times 10^{34}\ \mathrm{m}^{-2}}.$$

29.6 Calibrage de l'échelle microscopique ℓ_0 par l'impédance du vide (LO)

Références (labels). (16.5), (1.16), §16.1, (6.67), (6.57), (6.65), (20.37),

Cadre observationnel. Conformément aux identifications observationnelles exactes déclarées dans §29.3, on utilise

$$h_{\rm eff} = \hbar, \qquad c_t \equiv c.$$

La relation cinématique interne reste

$$c_t^2 = \frac{T}{\rho} \qquad ((1.16)).$$

Formules LO (affichées en clair). La fermeture EM-like validée dans la partie théorique donne, pour l'impédance théorique de canal de référence,

$$\boxed{Z^{(\rm LO)}_{\rm EM,ref}(\ell_0) = \frac{\hbar\, c_t}{\ell_0^2}\, \Phi^{(\rm two)}_{\rm EM}\ .} \tag{29.12}$$

Avec la convention «deux-jambes»,

$$\Phi^{(\rm two)}_{\rm EM} = \left(\frac{1}{\Delta^2_{\rm EM}\, b_0^{(2)}}\right)^2 \frac{1}{2\pi^2}\sqrt{\frac{J_2}{J_0}}\,\Gamma_{\rm EM}\,\frac{J_0^2}{E^{\rm cap}_{\ell=1}}\,, \qquad E^{\rm cap}_{\ell=1} = \frac{(F_1^{\rm cap})^2}{\pi}\ . \tag{29.13}$$

Dans la branche canonique de calibrage de ℓ_0 retenue en théorie, on consomme la normalisation canonique du projecteur cap $\ell = 1$ définie en §20.3.1 :

$$(F_1^{\rm cap})^2 = 1, \qquad E^{\rm cap}_{\ell=1} = \frac{1}{\pi}.$$

La fermeture EM-like consommée ici est celle de §20.3.1 : le raccord de continuité ne constitue pas un facteur multiplicatif indépendant au LO. Il est inclus dans la constante canonique du canal EM-like portée par $\Gamma_{\rm EM}$, cf. (20.37). La constante pure de canal prend alors la valeur théorique

$$\Phi^{(\rm two)}_{\rm EM} = C_\Phi = 5.152264653 \times 10^{-16}.$$

On identifie ensuite la quantité théorique de référence à l'observable SI,

$$Z^{(\rm LO)}_{\rm EM,ref}(\ell_0) = Z_0^{\rm obs} = \mu_0\, c_t,$$

ce qui donne

$$\boxed{\ell_0 = \sqrt{\frac{\hbar\, c_t\, \Phi^{(\rm two)}_{\rm EM}}{Z_0^{\rm obs}}} = \sqrt{\frac{\hbar\, c_t\, C_\Phi}{Z_0^{\rm obs}}}\ .} \tag{29.14}$$

Chaîne de dérivation (rappel court). (i) Le dictionnaire EM-like et les constitutives effectives sont fixés dans §16.1, avec (16.5). (ii) L'expression explicite de la constante pure de canal $\Phi^{(\rm two)}_{\rm EM}$ est donnée par (20.37). (iii) Sa forme compacte s'écrit

$$\Phi^{(\rm two)}_{\rm EM} = \frac{C_\Phi}{(F_1^{\rm cap})^2},$$

cf. (20.42). (iv) L'impédance de canal de référence au LO est alors

$$Z^{(\rm LO)}_{\rm EM,ref} = \frac{\hbar\, c_t}{\ell_0^2}\, \Phi^{(\rm two)}_{\rm EM},$$

conformément à (20.44). (v) L'identification à l'observable d'impédance du vide $Z_0 = \mu_0 c_t$ fournit l'inversion (29.14). (vi) Pour l'application numérique de calibrage, on consomme la branche canonique théorique du projecteur cap,

$$(F_1^{\mathrm{cap}})^2 = 1.$$

.

Application numérique (LO). Constantes utilisées :

$$J_0 = \frac{\pi^3}{3}, \qquad J_2 \simeq 7.6339320582, \qquad \Delta_{\mathrm{EM}} = 54.9589563236661, \qquad b_0^{(2)} = 1.809206964 \times 10^4,$$

$$\Gamma_{\mathrm{EM}} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{J_0}{J_0 + J_2}\right)^2 = 0.10530324394,$$

cf. (20.36).

$$(F_1^{\mathrm{cap}})^2 = 1, \qquad E_{\ell=1}^{\mathrm{cap}} = \frac{1}{\pi}, \qquad C_\Phi = 5.152264653 \times 10^{-16}.$$

Avec les identifications observationnelles exactes de §29.3, on utilise

$$c_t \equiv c, \qquad Z_0^{\mathrm{obs}} = 376.730313412\ \Omega.$$

L'inversion (29.14) donne

$$\boxed{\ell_0 \;=\; 2.079372183 \times 10^{-22}\ \mathrm{m}} \qquad \text{(profil } a = \mathrm{sech}\text{, convention «deux-jambes», branche canonique LO).} \tag{29.15}$$

Incertitude. Dans la stratégie retenue en §29.2.1, l'observable SI Z_0^{obs} est prise avec son incertitude expérimentale. Les constantes internes strictes de profil et de projection sont fixées au LO. En revanche, $b_0^{(2)}$ est une fermeture spectrale LO régularisée ; son incertitude est une incertitude théorique de type B.

À partir de

$$\ell_0 = \sqrt{\frac{\hbar c_t\, \Phi_{\mathrm{EM}}^{(\mathrm{two})}}{Z_0^{\mathrm{obs}}}},$$

on a

$$\frac{\delta \ell_0}{\ell_0} = \frac{1}{2}\,\frac{\delta \Phi_{\mathrm{EM}}^{(\mathrm{two})}}{\Phi_{\mathrm{EM}}^{(\mathrm{two})}} - \frac{1}{2}\,\frac{\delta Z_0}{Z_0^{\mathrm{obs}}}.$$

Or, dans la branche centrale,

$$\Phi_{\mathrm{EM}}^{(\mathrm{two})} \propto \left(\frac{1}{\Delta_{\mathrm{EM}}^2 b_0^{(2)}}\right)^2, \qquad \Delta_{\mathrm{EM}} = \kappa_\omega, \qquad \kappa_\omega^2 \propto b_0^{(2)}.$$

Il vient donc

$$\Phi_{\mathrm{EM}}^{(\mathrm{two})} \propto (b_0^{(2)})^{-4}, \qquad \left.\frac{\delta \ell_0}{\ell_0}\right|_{b_0} = -2\,\frac{\delta b_0^{(2)}}{b_0^{(2)}}.$$

La contribution expérimentale issue de Z_0^{obs} reste

$$\left.\frac{\sigma_{\ell_0}}{\ell_0}\right|_{Z_0} = \frac{1}{2}\,\frac{\sigma_{Z_0}}{Z_0^{\mathrm{obs}}}.$$

Ainsi, ℓ_0 possède une incertitude métrologique négligeable au rang affiché, mais une incertitude théorique de fermeture corrélée à $b_0^{(2)}$. Les valeurs numériques affichées dans cette section sont donc des valeurs centrales LO.

29.7 Fermeture du produit $P_{\rho R} := \rho R_0$ par compatibilité bump 2DOF

Objet. La fermeture effective 1–corps du bump 2DOF ne sépare pas la densité volumique ρ et le rayon global R_0. Elle ferme uniquement le produit

$$\boxed{P_{\rho R} := \rho R_0.} \tag{29.16}$$

La présente section détermine $P_{\rho R}$ par compatibilité interne des deux écritures 1–corps du même état bump 2DOF, sans utiliser la masse observée de l'électron.

La séparation de ρ et R_0 est effectuée plus loin par la fermeture micro-locale 1–anneau du composé Z^0-like, cf. §29.9. Le présent résultat doit donc être lu comme une fermeture de produit, et non comme un calibrage direct de la densité ρ.

Données théoriques utilisées. La masse spectrale 1–corps du bump 2DOF est donnée par (6.79a), à savoir

$$m_{\mathrm{bump}}^{(\mathrm{spec})} c^2 = \Big(\frac{h_{\mathrm{eff}} c}{\ell_0}\Big) \Pi_{\mathrm{proj}} Z_{\mathrm{ann}} Z_{\mathrm{proj}} \frac{1}{\kappa_\omega^2\, b_0^{(2)}}. \tag{29.17}$$

Les facteurs intervenant dans cette écriture sont définis par (6.73), (6.74), (6.75) et (6.77).

La masse mécanique effective du même état est donnée par (6.101),

$$m_{\mathrm{bump}}^{(\mathrm{mech})} = \kappa_{\mathrm{core}}\, \rho\, \lambda_e^2\, R_0 = \kappa_{\mathrm{core}}\, \lambda_e^2\, P_{\rho R}. \tag{29.18}$$

Le facteur de coeur κ_{core} est défini dans (6.44), et la largeur effective λ_e est fermée par (6.86) :

$$\lambda_e = 4\pi\, \kappa_\omega \sqrt{b_0^{(2)}}\, \ell_0. \tag{29.19}$$

Compatibilité interne. La compatibilité des deux lectures 1–corps est l'équation (6.102). Sous forme énergétique, elle s'écrit comme dans (6.103) :

$$\kappa_{\mathrm{core}}\, \rho\, \lambda_e^2\, R_0\, c^2 = \Big(\frac{h_{\mathrm{eff}} c}{\ell_0}\Big) \Pi_{\mathrm{proj}} Z_{\mathrm{ann}} Z_{\mathrm{proj}} \frac{1}{\kappa_\omega^2\, b_0^{(2)}}.$$

On en déduit directement

$$\boxed{P_{\rho R} = \rho R_0 = \frac{h_{\mathrm{eff}}}{\kappa_{\mathrm{core}}\, c\, \ell_0\, \lambda_e^2}\, \Pi_{\mathrm{proj}} Z_{\mathrm{ann}} Z_{\mathrm{proj}} \frac{1}{\kappa_\omega^2\, b_0^{(2)}}}. \tag{29.20}$$

Forme développée. En remplaçant λ_e par (29.19), on obtient

$$\boxed{\rho R_0 = \frac{h_{\mathrm{eff}}}{\kappa_{\mathrm{core}} c\, \ell_0^3}\, \frac{\Pi_{\mathrm{proj}} Z_{\mathrm{ann}} Z_{\mathrm{proj}}}{(4\pi)^2\, \kappa_\omega^4\, \Big(b_0^{(2)}\Big)^2}}. \tag{29.21}$$

Évaluation numérique. Avec les valeurs LO retenues dans ce chapitre, l'évaluation de (29.20) donne

$$\boxed{\rho R_0 = 1.222404409 \times 10^3\ \mathrm{kg\,m^{-2}}}. \tag{29.22}$$

Statut. La quantité fermée ici est la combinaison $P_{\rho R} = \rho R_0$. Cette fermeture ne détermine pas séparément ρ et R_0. Dans la chaîne active, la séparation est réalisée ultérieurement par la fermeture micro-locale 1–anneau du composé Z^0-like :

$$R_0 \quad \Longrightarrow \quad \rho = \frac{P_{\rho R}}{R_0}.$$

La masse observée de l'électron n'est pas utilisée dans cette fermeture ; elle intervient uniquement dans la section de comparaison des prédictions.

Incertitude. La fermeture (29.20) ne consomme pas la masse observée de l'électron. Son incertitude est donc uniquement induite par les entrées déjà fixées en amont, en particulier ℓ_0, ainsi que par les constantes spectrales et géométriques entrant dans Π_{proj}, Z_{ann}, Z_{proj}, κ_ω, $b_0^{(2)}$, κ_{core} et λ_e.

En utilisant la forme développée (29.21), la dépendance dominante est

$$\rho R_0 \propto \ell_0^{-3}.$$

Ainsi, à erreurs relatives petites,

$$\frac{\delta(\rho R_0)}{\rho R_0} = -3\,\frac{\delta \ell_0}{\ell_0} + \frac{\delta(\Pi_{\mathrm{proj}} Z_{\mathrm{ann}} Z_{\mathrm{proj}})}{\Pi_{\mathrm{proj}} Z_{\mathrm{ann}} Z_{\mathrm{proj}}} - 4\,\frac{\delta \kappa_\omega}{\kappa_\omega} - 2\,\frac{\delta b_0^{(2)}}{b_0^{(2)}} - \frac{\delta \kappa_{\mathrm{core}}}{\kappa_{\mathrm{core}}}. \tag{29.23}$$

Dans la stratégie d'incertitude retenue en §29.2.1, les constantes internes issues de fermetures strictes sont prises exactes au niveau LO une fois leur fermeture fixée. En revanche, $b_0^{(2)}$ est une fermeture LO régularisée et doit être propagé avec les corrélations amont

$$\frac{\delta \kappa_\omega}{\kappa_\omega} = \frac{1}{2}\,\frac{\delta b_0^{(2)}}{b_0^{(2)}}, \qquad \left.\frac{\delta \ell_0}{\ell_0}\right|_{b_0} = -2\,\frac{\delta b_0^{(2)}}{b_0^{(2)}}.$$

En injectant ces relations dans (29.23), la contribution corrélée de $b_0^{(2)}$ à $P_{\rho R}$ est

$$\left.\frac{\delta(\rho R_0)}{\rho R_0}\right|_{b_0} = 2\,\frac{\delta b_0^{(2)}}{b_0^{(2)}}.$$

Avec l'enveloppe LO régularisée

$$\frac{\sigma_{b_0}}{b_0} \simeq 2.2\%,$$

cela donne une incertitude théorique de fermeture d'environ 4.4% sur ρR_0, indépendamment de l'incertitude métrologique de Z_0^{obs}. La valeur numérique affichée dans (29.22) est donc une valeur centrale LO.

29.8 Fermeture du produit $Q_r := \kappa_r R_0$ par G_N (LO)

Références (labels). La fermeture gravitation–like LO utilisée ici est (20.32). La relation cinématique $c_t^2 = T/\rho$ provient de (1.16). La combinaison

$$P_{\rho R} := \rho R_0$$

a été fermée précédemment dans (29.20).

Cadre. La fermeture gravitation–like ne sépare pas directement κ_r et R_0. Elle ferme la combinaison

$$\boxed{Q_r := \kappa_r R_0.} \tag{29.24}$$

Cette combinaison est celle qui intervient naturellement une fois la fermeture gravitation–like réécrite en fonction du produit $P_{\rho R} = \rho R_0$. La séparation de κ_r sera effectuée plus loin, après détermination de R_0 par la fermeture micro-locale 1–anneau :

$$\kappa_r = \frac{Q_r}{R_0}.$$

Cette combinaison est celle qui intervient naturellement une fois la fermeture gravitation–like réécrite en fonction de $P_{\rho R} = \rho R_0$.

Fermeture active (LO). Le facteur géométrico–spectral

$$\mathcal{N}_g = \frac{J_2}{J_0}(4\pi\kappa_\omega)^2$$

est défini dans (20.31) comme produit des normalisations pures du profil, du flux monopolaire et de la fermeture spectrale commune. La fermeture gravitation–like effective s'écrit

$$G_N^{\text{eff}} = \frac{J_2}{J_0}\,(4\pi\kappa_\omega)^2\,\frac{c_t^4}{4\pi\,T\,\kappa_r\,R_0^2}. \tag{29.25}$$

En utilisant

$$T = \rho c_t^2, \qquad P_{\rho R} = \rho R_0, \qquad Q_r = \kappa_r R_0,$$

on obtient

$$\boxed{G_N^{\text{eff}} = \frac{J_2}{J_0}\,(4\pi\kappa_\omega)^2\,\frac{c_t^2}{4\pi\,P_{\rho R}\,Q_r}}. \tag{29.26}$$

Inversion algébrique. L'inversion de (29.26) donne directement

$$\boxed{Q_r = \kappa_r R_0 = \frac{J_2}{J_0}\,(4\pi\kappa_\omega)^2\,\frac{c_t^2}{4\pi\,G_N\,P_{\rho R}}}. \tag{29.27}$$

Cette relation ne consomme ni ρ, ni R_0, ni T séparément. Elle utilise seulement la combinaison $P_{\rho R}$ déjà fermée en amont.

Constantes internes et entrées. On utilise

$$J_0 = \frac{\pi^3}{3} = 10.3354255601, \qquad J_2 \simeq 7.6339320582, \qquad \kappa_\omega = 54.9589563237,$$

ainsi que

$$P_{\rho R} = \rho R_0 = 1.222404409 \times 10^3\ \mathrm{kg\,m^{-2}}, \qquad c_t = c.$$

La valeur observationnelle retenue est

$$G_N^{(\mathrm{obs})} = 6.67430 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}.$$

Évaluation numérique (LO). L'insertion de ces valeurs dans (29.27) donne

$$\boxed{\kappa_r R_0 = 3.088357158 \times 10^{28}\ \mathrm{m}}. \tag{29.28}$$

Contrôle dimensionnel. On a

$$[G_N P_{\rho R}] = \left(\mathrm{m}^3\,\mathrm{kg}^{-1}\,\mathrm{s}^{-2}\right)\left(\mathrm{kg}\,\mathrm{m}^{-2}\right) = \mathrm{m}\,\mathrm{s}^{-2},$$

donc

$$\left[\frac{c_t^2}{G_N P_{\rho R}}\right] = \frac{\mathrm{m}^2\,\mathrm{s}^{-2}}{\mathrm{m}\,\mathrm{s}^{-2}} = \mathrm{m}.$$

Le membre de droite de (29.27) a donc bien la dimension d'une longueur, comme $\kappa_r R_0$.

Statut. La fermeture gravitation–like LO ferme ici la combinaison

$$Q_r = \kappa_r R_0,$$

et non κ_r seul. Dans la chaîne active, la valeur isolée de κ_r est déduite de la séparation microlocale de R_0,

$$\kappa_r = \frac{Q_r}{R_0}.$$

Incertitude. En écrivant

$$Q_r = \mathcal{Q}(G_N; J_0, J_2, \kappa_\omega, c_t, P_{\rho R}), \qquad Q_r \propto \frac{1}{G_N P_{\rho R}},$$

la variation relative vérifie

$$\frac{\delta Q_r}{Q_r} = -\frac{\delta G_N}{G_N} - \frac{\delta P_{\rho R}}{P_{\rho R}} + \frac{\delta(J_2/J_0)}{J_2/J_0} + 2\,\frac{\delta \kappa_\omega}{\kappa_\omega} + 2\,\frac{\delta c_t}{c_t}. \tag{29.29}$$

Dans la stratégie adoptée en §29.2.1, les constantes internes strictes J_0 et J_2 sont prises comme fixées au LO, et $c_t = c$ est pris exact dans le calibrage. La quantité κ_ω hérite toutefois de la fermeture régularisée $b_0^{(2)}$, avec

$$\frac{\delta \kappa_\omega}{\kappa_\omega} = \frac{1}{2}\,\frac{\delta b_0^{(2)}}{b_0^{(2)}}.$$

Comme Q_r dépend aussi de $P_{\rho R}$, l'incertitude de fermeture de $b_0^{(2)}$ est transmise à la fois par $P_{\rho R}$ et par κ_ω. En utilisant

$$\left.\frac{\delta P_{\rho R}}{P_{\rho R}}\right|_{b_0} = 2\,\frac{\delta b_0^{(2)}}{b_0^{(2)}},$$

la contribution corrélée de $b_0^{(2)}$ à Q_r est

$$\left.\frac{\delta Q_r}{Q_r}\right|_{b_0} = -\frac{\delta b_0^{(2)}}{b_0^{(2)}}.$$

La valeur affichée ci-dessous est donc une valeur centrale LO ; son incertitude de fermeture de type B est de l'ordre de celle de $b_0^{(2)}$, en plus de l'incertitude expérimentale de G_N. À la précision utile retenue ici, on conserve la valeur centrale

$$\boxed{\kappa_r R_0 = 3.088357158 \times 10^{28}\ \mathrm{m}}.$$

29.9 Séparation micro-locale de R_0, ρ, T, κ_r

Objet. Les sections précédentes ferment les deux produits structuraux

$$P_{\rho R} := \rho R_0, \qquad Q_r := \kappa_r R_0.$$

Ces produits ne constituent pas les constantes séparées finales. La séparation est effectuée ici en consommant la fermeture micro-locale 1–anneau du composé Z^0-like, cf. (22.11). Aucune hypothèse auxiliaire de séparation n'intervient dans cette étape.

Entrées intermédiaires. On utilise les produits fermés en amont

$$P_{\rho R} = 1.222404409 \times 10^{3}\ \mathrm{kg\,m^{-2}}, \qquad Q_r = 3.088357158 \times 10^{28}\ \mathrm{m},$$

ainsi que l'échelle microscopique

$$\ell_0 = \ell_0 = 2.079372183 \times 10^{-22}\ \mathrm{m},$$

Ces grandeurs sont des entrées intermédiaires de la séparation ; elles ne seront pas reportées comme sorties finales dans la synthèse.

Longueur réduite du composé Z^0-like. La fermeture du composé Z^0-like, cf. §22.1, utilise la longueur réduite de phase

$$\lambda_{\mathsf{Z}} = \frac{c_t}{\omega_{\mathsf{Z}}}.$$

Dans la présente partie observationnelle, avec $c_t = c$ et $E = h_{\mathrm{eff}}\omega$, on écrit

$$\lambda_{\mathsf{Z}} = \frac{h_{\mathrm{eff}} c}{m_Z^{\mathrm{th}} c^2}.$$

On prend ici m_Z^{th}, issu de la prédiction LO depuis m_W, afin de ne pas consommer directement la valeur observée de m_Z dans cette fermeture. Avec

$$m_Z^{\mathrm{th}} = 90.2735\ \mathrm{GeV},$$

on obtient

$$\boxed{\lambda_{\mathsf{Z}} \simeq 2.18588 \times 10^{-18}\ \mathrm{m}.} \tag{29.30}$$

Participation micro-locale. La fermeture isotrope du composé Z^0-like donne

$$\boxed{\Xi_{\mathrm{micro}}^{(\mathsf{Z})} = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\ell_0}{\lambda_{\mathsf{Z}}}\right)^{10}.} \tag{29.31}$$

Il vient

$$\boxed{\Xi_{\mathrm{micro}}^{(\mathsf{Z})} \simeq 2.54184 \times 10^{-40}.} \tag{29.32}$$

Détermination de R_0. La fermeture micro-locale donne

$$\boxed{R_0 = \frac{2h_{\mathrm{eff}}}{\pi\, c_t\, P_{\rho R}\, \lambda_{\mathsf{Z}}^2\, \Xi_{\mathrm{micro}}^{(\mathsf{Z})}}.} \tag{29.33}$$

Avec $h_{\mathrm{eff}} = \hbar$ et $c_t = c$, on obtient

$$\boxed{R_0^{\mathrm{HSM}} \simeq 1.50841 \times 10^{29}\ \mathrm{m}.} \tag{29.34}$$

Statut de la séparation. La valeur de R_0 obtenue ici est une sortie fermée sous la fermeture micro-locale 1-anneau du composé Z^0-like. Elle dépend directement de

$$\Xi_{\text{micro}}^{(\mathsf{Z})} = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\ell_0}{\lambda_{\mathsf{Z}}}\right)^{10}.$$

La puissance dix rend cette séparation sensible à la factorisation micro-locale consommée depuis la théorie des composés. La valeur de R_0 doit donc être lue comme une sortie de la fermeture micro-locale de cette fermeture canonique, et non comme une prédiction indépendante de $\Xi_{\text{micro}}^{(\mathsf{Z})}$.

Contrôle géométrique par le rayon comobile observable. La fermeture précédente détermine le rayon de courbure global R_0^{HSM} de l'hypersphère spatiale. Elle ne consomme pas de donnée cosmologique de taille globale. On peut toutefois effectuer un contrôle géométrique externe en comparant ce rayon de courbure à la distance comobile radiale associée au domaine observable actuel.

Sur $\mathbb{S}^3$, une distance géodésique radiale s'écrit

$$s = R_0^{\text{HSM}}\chi, \qquad \chi \in [0, \pi].$$

La distance antipodale maximale vaut donc

$$s_{\max} = \pi R_0^{\text{HSM}}.$$

Si le rayon comobile observable actuel est interprété comme une distance géodésique radiale effective sur la tranche spatiale actuelle,

$$R_{\text{obs}} = s_{\text{obs}} = R_0^{\text{HSM}}\chi_{\text{obs}},$$

alors

$$\boxed{\chi_{\text{obs}} = \frac{R_{\text{obs}}}{R_0^{\text{HSM}}}.} \tag{29.35}$$

Avec

$$R_{\text{obs}} \simeq 46.5 \times 10^9 \text{ al} \simeq 4.40 \times 10^{26} \text{ m},$$

et

$$R_0^{\text{HSM}} = 1.50841 \times 10^{29} \text{ m},$$

on obtient

$$\boxed{\chi_{\text{obs}} \simeq 2.92 \times 10^{-3}.} \tag{29.36}$$

Rapportée à la distance antipodale de l'hypersphère, la portion radiale observable vaut

$$\boxed{\frac{R_{\text{obs}}}{\pi R_0^{\text{HSM}}} \simeq 9.3 \times 10^{-4}.} \tag{29.37}$$

Ce contrôle montre que le domaine actuellement observable occupe une portion géodésique très petite de l'hypersphère globale :

$$R_{\text{obs}} \ll \pi R_0^{\text{HSM}}.$$

Il ne s'agit pas d'une entrée de calibration de R_0^{HSM}, mais d'une vérification géométrique externe après séparation du rayon global.

Détermination de ρ, T et κ_r. La densité volumique est

$$\rho = \frac{P_{\rho R}}{R_0^{\mathrm{HSM}}},$$

d'où

$$\boxed{\rho^{\mathrm{HSM}} \simeq 8.10393 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg\,m^{-3}}.} \tag{29.38}$$

La tension vaut

$$T = \rho c^2,$$

soit

$$\boxed{T^{\mathrm{HSM}} \simeq 7.28345 \times 10^{-10}\ \mathrm{Pa}.} \tag{29.39}$$

Enfin,

$$\kappa_r = \frac{Q_r}{R_0^{\mathrm{HSM}}},$$

donne

$$\boxed{\kappa_r^{\mathrm{HSM}} \simeq 0.204743.} \tag{29.40}$$

Statut. Les valeurs

$$R_0^{\mathrm{HSM}}, \qquad \rho^{\mathrm{HSM}}, \qquad T^{\mathrm{HSM}}, \qquad \kappa_r^{\mathrm{HSM}}$$

sont les constantes séparées issues de la fermeture micro-locale 1–anneau du composé Z^0-like. Elles constituent, dans la chaîne active, les constantes séparées consommées par les sections aval de prédiction et de diagnostic.

29.10 Synthèse des constantes fondamentales séparées (LO)

Constante séparée	Valeur LO	Unité	Origine
ℓ_0	$\boxed{2.079372183 \times 10^{-22}}$	m	(29.14)
$\kappa_\mu = \mu_2/T$	$\boxed{6.25 \times 10^{34}}$	$\mathrm{m^{-2}}$	(29.11)
R_0	$\boxed{1.50841 \times 10^{29}}$	m	(29.34)
ρ	$\boxed{8.10393 \times 10^{-27}}$	$\mathrm{kg\,m^{-3}}$	(29.38)
T	$\boxed{7.28345 \times 10^{-10}}$	Pa	(29.39)
κ_r	$\boxed{0.204743}$	1	(29.40)

Lecture de la synthèse. Cette synthèse rassemble les constantes séparées qui seront consommées par les sections de prédiction. Les produits intermédiaires

$$P_{\rho R} := \rho R_0, \qquad Q_r := \kappa_r R_0$$

ne sont pas reportés dans le tableau, car ils ne constituent pas les sorties finales de la chaîne active : ils sont consommés par la fermeture micro-locale 1–anneau du composé Z^0-like pour déterminer R_0, puis ρ, T et κ_r.

Statut aval. La présente synthèse de calibrage ne consomme aucune hypothèse auxiliaire de séparation. Les constantes séparées obtenues ici pourront être utilisées ensuite comme contraintes pour une reconstruction géométrique constructive.

Chapitre 30

Prédictions et comparaisons

Objet du chapitre. Ce chapitre rassemble les sorties numériques obtenues après les calibrages actifs et, lorsque nécessaire, après séparation globale HSM. On y distingue :

- les prédictions sans échelle, fondées uniquement sur des rapports ou des nombres purs ;
- les prédictions après ancrage observationnel, lorsqu'une échelle déjà calibrée est nécessaire ;
- les sorties numériques dépendant explicitement des constantes HSM séparées.

Incertitudes. La typologie d'incertitude définie en §29.2.1 est reprise dans tout ce chapitre. Les incertitudes de Type A proviennent des entrées expérimentales déjà déclarées dans le chapitre de calibrage. Les incertitudes de Type B et C sont précisées localement lorsqu'elles dépendent d'une fermeture de canal, d'une fenêtre MSE, d'une troncature harmonique, d'une approximation LO/NLO ou d'un choix de fermeture géométrique.

Statut des comparaisons. Lorsqu'une valeur observée est utilisée seulement comme référence de comparaison, elle est signalée comme telle et ne doit pas être confondue avec une entrée de calibrage. En particulier, une même observable ne doit pas être à la fois consommée dans une fermeture et revendiquée comme prédiction indépendante dans la même chaîne.

30.0.1 Prédiction LO de la masse m_Z depuis m_W (doublet 2DOF)

Références (labels). Le point lié neutre $u_{\mathsf{Z}}^{\star}$ est verrouillé par (22.16)–(22.17). Les fonctions réduites du composé neutre sont définies dans (22.12). L'énergie réduite dépendant de la séparation est donnée par (22.13). Les coefficients $A_{\mathrm{EM}}^{(Z)}$ et $A_{\mathrm{P}}^{(Z)}$ sont reliés aux coefficients réduits des canaux par (22.14), puis fermés par (22.15) et (22.18).

Principe (sans échelle). Au LO, le boson Z est modélisé comme un composé neutre de deux NSL 2DOF en recouvrement fort. Le point lié neutre est verrouillé par le raccord LO,

$$u_{\mathsf{Z}}^{\star} = u_{*}^{(\mathrm{ref})} \simeq 2.00712, \qquad \text{cf. (22.17)}.$$

La prédiction est *sans échelle* : les facteurs R_0, λ_* et $\sigma = \sin^2\alpha$ s'annulent, de sorte que l'incrément

$$\delta^*(u_{\mathsf{Z}}^{\star})$$

est un **nombre pur** issu de la fermeture 2DOF neutre/chargé.

Formules réduites (profil $a = \mathrm{sech}$). On utilise les fonctions réduites du composé neutre,

$$\mathcal{O}_1(u) = (u\,\mathrm{csch}\,u)^2\,, \qquad \mathcal{O}_2(u) = 2\,(u\coth u - 1)\,\mathrm{csch}^2 u, \qquad \text{cf. (22.12)}.$$

Dans la réduction du composé neutre, on écrit

$$A_{\mathrm{EM}}^{(Z)} = 4\,\mathcal{C}_{\mathrm{EM}}^{(2)}, \qquad A_{\mathrm{P}}^{(Z)} = 2\,\mathcal{C}_{\mathrm{P}}^{(2)}, \qquad \text{cf. (22.14)}.$$

Le coefficient EM réduit consommé par le composé neutre est $\mathcal{C}_{\mathrm{EM}}^{(2)}$, cf. (22.15). Il ne doit pas être confondu avec le projecteur cap pur $\Pi_{\ell=1}^{\mathrm{EM}}$ défini dans la fermeture EM–like de champ. Le coefficient $\mathcal{C}_{\mathrm{EM}}^{(2)}$ est le coefficient de forme source–cap–canal utilisé dans la réduction bilobe :

$$\mathcal{C}_{\mathrm{EM}}^{(2)} = \Pi_{\ell=1}^{\mathrm{EM}}\,\Gamma_{\mathrm{EM}}\,\frac{J_0^2}{\pi}, \qquad \text{cf. (22.19)}.$$

Il correspond à la partie réduite sans transfert de largeur du canal EM–like. Le facteur de transfert deux-jambes

$$\eta_{2\mathrm{leg}} = \left(\frac{1}{\Delta_{\mathrm{EM}}^2\, b_0^{(2)}}\right)^2$$

appartient à la constante de canal dimensionnée $\Phi_{\mathrm{EM}}^{(\mathrm{two})}$, cf. (20.37), mais il n'est pas consommé dans le coefficient réduit $\mathcal{C}_{\mathrm{EM}}^{(2)}$ utilisé pour le ratio neutre/chargé.

La stationnarité de l'énergie interne, évaluée au point lié verrouillé, fixe le coefficient de Préclusion :

$$A_{\mathrm{P}} = A_{\mathrm{EM}}\,\frac{\mathcal{O}_1'(u_{\mathsf{Z}}^\star)}{\mathcal{O}_2'(u_{\mathsf{Z}}^\star)}, \qquad \text{cf. (22.18)}.$$

L'incrément sans échelle gouvernant l'écart neutre/chargé vaut alors

$$\delta^*(u_{\mathsf{Z}}^\star) = A_{\mathrm{P}}\,\mathcal{O}_2(u_{\mathsf{Z}}^\star) - A_{\mathrm{EM}}\,\mathcal{O}_1(u_{\mathsf{Z}}^\star).$$

La masse prédite est

$$\boxed{m_Z^{(\mathrm{th})} = m_W\,\sqrt{1 + |\delta^*(u_{\mathsf{Z}}^\star)|}.} \tag{30.1}$$

Le ratio théorique associé est

$$\boxed{R_{\mathrm{th}} := \left(\frac{m_Z^{(\mathrm{th})}}{m_W}\right)^4 = \left(1 + |\delta^*(u_{\mathsf{Z}}^\star)|\right)^2.} \tag{30.2}$$

Évaluation numérique (LO canonique). On utilise le coefficient réduit complet de (22.19),

$$\mathcal{C}_{\mathrm{EM}}^{(2)} \simeq 1.538610075.$$

d'où

$$A_{\mathrm{EM}} = 4\,\mathcal{C}_{\mathrm{EM}}^{(2)} \simeq 6.154440302.$$

Au point canonique

$$u_{\mathsf{Z}}^\star \simeq 2.00712,$$

on obtient

$$\mathcal{O}_1(u_{\mathsf{Z}}^\star) = 0.3017655126, \qquad \mathcal{O}_2(u_{\mathsf{Z}}^\star) = 0.1619395279,$$

et

$$\mathcal{O}_1'(u_{\mathsf{Z}}^\star) = -0.3250327354, \qquad \mathcal{O}_2'(u_{\mathsf{Z}}^\star) = -0.2029911703.$$

Ainsi,

$$A_{\mathrm{P}} = A_{\mathrm{EM}}\,\frac{\mathcal{O}_1'(u_{\mathsf{Z}}^\star)}{\mathcal{O}_2'(u_{\mathsf{Z}}^\star)} \simeq 9.854589062,$$

et, de manière équivalente,

$$\mathcal{C}_{\mathrm{P}}^{(2)} = \frac{A_{\mathrm{P}}}{2} \simeq 4.927294531.$$

On en déduit

$$\delta^*(u_{\mathsf{Z}}^\star) = A_{\mathrm{P}}\,\mathcal{O}_2(u_{\mathsf{Z}}^\star) - A_{\mathrm{EM}}\,\mathcal{O}_1(u_{\mathsf{Z}}^\star) = -0.2613503319,$$

d'où

$$|\delta^*(u_{\mathsf{Z}}^\star)| = 0.2613503319,$$

$$\frac{m_Z^{(\mathrm{th})}}{m_W} = \sqrt{1 + |\delta^*(u_{\mathsf{Z}}^\star)|} = 1.1230985406,$$

et

$$R_{\mathrm{th}} = (1 + |\delta^*(u_{\mathsf{Z}}^\star)|)^2 = 1.5910046598.$$

Pour

$$m_W = 80.379 \text{ GeV},$$

il vient

$$\boxed{m_Z^{(\mathrm{th})} = 90.2735 \text{ GeV}.}$$

Comparaison à l'observable. La comparaison à l'observable n'intervient qu'a posteriori comme test de la fermeture :

$$m_Z^{(\mathrm{obs})} = 91.1876 \text{ GeV}, \qquad \Delta m_Z = m_Z^{(\mathrm{th})} - m_Z^{(\mathrm{obs})} = -0.9141 \text{ GeV},$$

soit un écart relatif

$$\frac{\Delta m_Z}{m_Z^{(\mathrm{obs})}} = -1.00 \times 10^{-2}.$$

Remarques. (i) Cette prédiction est *sans échelle* : elle ne mobilise ni ρ, ni T, ni ℓ_0, ni R_0, et ne consomme pas $m_Z^{(\mathrm{obs})}$. Il n'y a donc pas de circularité.
(ii) La quantité

$$R_{\mathrm{th}} = \left(\frac{m_Z^{(\mathrm{th})}}{m_W}\right)^4$$

sera utilisée dans la sous-section suivante pour remonter à κ_μ sans consommer le ratio observé $m_Z^{(\mathrm{obs})}/m_W$.
(iii) L'écart résiduel de l'ordre de 1% obtenu ici correspond au vrai écart LO de la fermeture 2DOF neutre/chargé ; les corrections NLO (anisotropie, filtres spectraux raffinés, fermeture conique complète) restent donc pertinentes.

Incertitude sur la prédiction. Dans la stratégie retenue en §29.2.1, la quantité $u_{\mathsf{Z}}^\star$ est le point lié neutre verrouillé par (22.17). Il ne porte donc pas d'incertitude locale supplémentaire dans cette section.

Le coefficient réduit $\mathcal{C}_{\mathrm{EM}}^{(2)}$ consommé par $\delta^*(u_{\mathsf{Z}}^\star)$ est donné par (22.19). Comme précisé dans les formules réduites, ce coefficient ne contient pas le transfert de largeur η_{2leg}, et donc ne contient pas $b_0^{(2)}$. Par conséquent,

$$\frac{\partial \ln \mathcal{C}_{\mathrm{EM}}^{(2)}}{\partial \ln b_0^{(2)}} = 0, \qquad \frac{\partial \delta^*(u_{\mathsf{Z}}^\star)}{\partial \ln b_0^{(2)}} = 0, \qquad \frac{\partial \ln(m_Z^{(\mathrm{th})}/m_W)}{\partial \ln b_0^{(2)}} = 0.$$

L'incertitude de régularisation attachée à $b_0^{(2)}$ n'est donc pas propagée dans le ratio $m_Z^{(\mathrm{th})}/m_W$.

La seule contribution expérimentale propagée provient de m_W via (30.1) ; elle est négligeable à la précision utile retenue ici. Les erreurs numériques directes sur l'évaluation de $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$, $\mathcal{O}_1'$, $\mathcal{O}_2'$, de $\delta^*(u_Z^\star)$ et de R_{th} sont également négligeables à cette échelle.

L'écart relatif observé dans la comparaison à $m_Z^{(\mathrm{obs})}$ est donc affiché comme l'écart LO de fermeture du doublet 2DOF neutre/chargé, et non comme une barre d'erreur propagée depuis $b_0^{(2)}$.

30.0.2 Bump 2DOF — voie EM (1–corps) : prédiction de masse au LO

Références (labels). La fermeture spectrale LO de la masse 1–corps du bump 2DOF est donnée dans §6.6.8. Les facteurs entrant dans cette fermeture sont définis par (6.73), (6.74), (6.75) et (6.77). La formule complète est (6.79b). La lecture mécanique est donnée par (6.101), et la compatibilité spectrale–mécanique par (6.102)–(6.103).

Cadre. Dans cette sous-section de prédiction, on identifie $h_{\mathrm{eff}} = \hbar$ et $c_t = c$, conformément aux conventions du chapitre de calibrage. On évalue la fermeture LO complète de la masse 1–corps du bump 2DOF issue de la chaîne EM. Contrairement au schéma NSL, il n'y a ici ni structure à deux jambes ni facteur de composition supplémentaire : on utilise directement la fermeture 1–corps.

Constantes et entrées (LO).

$$J_0 = 10.3354255601, \qquad J_2 = 7.6339320582, \qquad \kappa_\omega = 54.9589563237,$$

$$b_0^{(2)} = 1.809206964 \times 10^4, \qquad \ell_0 = 2.079372183 \times 10^{-22}\ \mathrm{m},$$

$$h_{\mathrm{eff}} = \hbar = 1.054571817 \times 10^{-34}\ \mathrm{J\,s}, \qquad c = 299792458\ \mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Formule LO complète (affichée en clair). La fermeture LO complète de la masse 1–corps du bump 2DOF est

$$m_{\mathrm{bump}}^{(\mathrm{LO})} c^2 = \Big(\frac{h_{\mathrm{eff}} c}{\ell_0}\Big)\, \Pi_{\mathrm{proj}}\, Z_{\mathrm{ann}}\, Z_{\mathrm{proj}}\, \frac{1}{\kappa_\omega^2\, b_0^{(2)}}, \tag{30.3}$$

conformément à (6.79b), avec

$$\Pi_{\mathrm{proj}} = \Big(\frac{J_2}{J_0}\Big)\Big(\frac{J_0}{J_0 + J_2}\Big)^2 = 0.2443495536,$$

$$Z_{\mathrm{ann}} = (2\pi)^{-1} = 0.1591549431, \qquad Z_{\mathrm{proj}} = \sqrt{\frac{J_0}{J_0 + J_2}} = 0.7583992690.$$

Évaluation numérique (LO). On obtient

$$\frac{h_{\mathrm{eff}} c}{\ell_0} = \frac{\hbar c}{\ell_0} \simeq 9.4897383922 \times 10^8\ \mathrm{MeV},$$

puis

$$\Pi_{\mathrm{proj}}\, Z_{\mathrm{ann}}\, Z_{\mathrm{proj}}\, \frac{1}{\kappa_\omega^2\, b_0^{(2)}} = 5.3971486886 \times 10^{-10}.$$

Il vient donc

$$\boxed{m_{\mathrm{bump}}^{(\mathrm{LO})} = 0.512175291\ \mathrm{MeV}.} \tag{30.4}$$

Structure du calcul. La prédiction LO provient directement de la chaîne EM 1–corps complète : échelle micro ($h_{\mathrm{eff}}c/\ell_0$), facteur projectif Π_{proj}, moyenne mono–anneau Z_{ann}, projection cinétique transverse Z_{proj}, et fermeture spectrale via $\kappa_\omega^2\, b_0^{(2)}$. Aucun facteur correctif additionnel (gaine, ancrage, etc.) n'est introduit à ce rang dans cette écriture complète.

Lien avec la fermeture mécanique 1–corps. La masse calculée dans cette sous-section est la masse spectrale $m_{\mathrm{bump}}^{(\mathrm{spec})}$ définie par (6.79a). Elle est indépendante de R_0. La fermeture mécanique

$$m_{\mathrm{bump}}^{(\mathrm{mech})} = \kappa_{\mathrm{core}}\, \rho\, \lambda_e^2\, R_0$$

est reliée à la masse spectrale par la condition de compatibilité (6.102). Dans la chaîne actuelle, cette compatibilité sert en amont à fermer la combinaison

$$P_{\rho R} = \rho R_0$$

sans utiliser m_e^{obs}. La présente sous-section ne réutilise donc ni R_0, ni ρ, ni $P_{\rho R}$: elle évalue directement la masse spectrale et la compare ensuite à l'observable.

Comparaison à l'observable. On note m_e^{obs} la masse de l'électron, utilisée ici uniquement comme observable de comparaison. On définit

$$\Delta m \equiv m_{\mathrm{bump}}^{(\mathrm{LO})} - m_e^{\mathrm{obs}}, \qquad \delta_{\%} \equiv 100 \times \frac{m_{\mathrm{bump}}^{(\mathrm{LO})} - m_e^{\mathrm{obs}}}{m_e^{\mathrm{obs}}}.$$

Avec

$$m_{\mathrm{bump}}^{(\mathrm{LO})} = 0.512175291 \text{ MeV}, \qquad m_e^{\mathrm{obs}} = 0.51099895 \text{ MeV},$$

on obtient

$$\Delta m = 1.176341 \times 10^{-3} \text{ MeV} = 1.176341 \text{ keV},$$

et

$$\delta_{\%} = 2.302042 \times 10^{-1}\,\%.$$

Incertitude sur la prédiction. Dans la stratégie retenue en §29.2.1, les quantités J_0, J_2, h_{eff} et c sont prises comme fixées par les fermetures strictes ou par les conventions de calibrage. La quantité $b_0^{(2)}$ est une fermeture LO régularisée, mais son effet doit être propagé de manière corrélée avec ℓ_0 et κ_ω.

La masse LO s'écrit

$$m_{\mathrm{bump}}^{(\mathrm{LO})} \propto \ell_0^{-1}\, \frac{1}{\kappa_\omega^2 b_0^{(2)}}.$$

Or

$$\kappa_\omega^2 \propto b_0^{(2)}, \qquad \left.\frac{\delta \ell_0}{\ell_0}\right|_{b_0} = -2\, \frac{\delta b_0^{(2)}}{b_0^{(2)}}.$$

La contribution corrélée de $b_0^{(2)}$ à cette prédiction est donc

$$\boxed{\left.\frac{\delta m_{\mathrm{bump}}^{(\mathrm{LO})}}{m_{\mathrm{bump}}^{(\mathrm{LO})}}\right|_{b_0} = -\left(-2\, \frac{\delta b_0^{(2)}}{b_0^{(2)}}\right) - 2\, \frac{\delta b_0^{(2)}}{b_0^{(2)}} = 0.} \tag{30.5}$$

Ainsi, lorsque la même fermeture $b_0^{(2)}$ est utilisée à la fois dans le calibrage EM de ℓ_0 et dans la masse bump 2DOF, l'incertitude de régularisation de $b_0^{(2)}$ s'annule au rang LO dans cette prédiction. La dépendance métrologique restante est celle de Z_0^{obs}, via

$$\frac{\delta m_{\mathrm{bump}}^{(\mathrm{LO})}}{m_{\mathrm{bump}}^{(\mathrm{LO})}} = \frac{1}{2}\,\frac{\delta Z_0}{Z_0^{\mathrm{obs}}},$$

à laquelle s'ajoutent les incertitudes de schéma propres au rang LO. La valeur affichée ci-dessous est donc une valeur centrale LO cohérente avec la fermeture $b_0^{(2)}$ retenue.

Grandeur	Valeur	Commentaire
$m_{\mathrm{bump}}^{(\mathrm{LO})}$	0.512175291 MeV	prédiction LO, voie EM 1–corps complète
m_e^{obs}	0.51099895 MeV	observable de comparaison
Δm	1.176341×10^{-3} MeV	1.176341 keV
$\delta_{\%}$	$2.302042 \times 10^{-1}\,\%$	relatif à m_e^{obs}
z	$\dfrac{1.176341\ \mathrm{keV}}{\sigma_{m_e}\ [\mathrm{keV}]}$	dépend de σ_{m_e}

30.1 Breather 2DOF : rapports LO des écarts de masse au carré

Références (labels). §23.3.1, §23.3, (23.21), (23.22), (23.27), (23.28), (23.29), (23.30), (23.31), (23.33), (23.34), (23.35), (23.36), (23.37), (23.45), §29.2.

Cadre (LO, sans échelle). Au rang LO, la structure des écarts de masse au carré des breathers 2DOF est

$$\Delta m^2(q) = M_*^2\,\mathcal{S}(q; q_\star), \tag{30.6}$$

où M_*^2 est un préfacteur commun à tous les niveaux, inutile pour les rapports, et $\mathcal{S}(q; q_\star)$ est un nombre pur qui encode la structure spectrale du breather 2DOF sur $\mathbb{S}^3$, avec saturation différentielle au-delà du premier seuil fin $q_\star$.

Dans la présente partie observationnelle, les indices q sont pris dans le triplet de calibrage commun fixé en §29.3.1 :

$$\boxed{(q_1, q_2, q_3)_{\mathrm{cal}} = (1,\ 207,\ 3477).}$$

Le premier seuil fin est donc

$$\boxed{q_\star = q_2 = 207.}$$

Statut de l'identification des seuils. Cette utilisation du même triplet pour la branche breather 2DOF et pour la branche bump 2DOF est une identification structurelle de seuils admissibles. Le triplet $(1, 207, 3477)$ est une entrée de calibrage issue des leptons chargés ; la comparaison neutrino teste donc la réutilisation du même filtre spectral dans la branche breather. Les rapports obtenus ci-dessous ne consomment pas les écarts de masse neutrino observés.

Convention de comparaison aux observables oscillatoires. Les données d'oscillation ne fournissent pas les masses absolues des états neutrino, mais deux écarts de masse au carré indépendants. Dans cette section, la quantité

$$\Delta m^2(q) = M_*^2\,\mathcal{S}(q; q_\star)$$

désigne l'échelle d'écart de masse au carré portée par le seuil spectral q, et non la masse au carré absolue d'un niveau. La comparaison aux données se fait par appariement direct entre seuils spectraux et écarts observés :

$$\Delta m^2_{\mathrm{sol}} \longleftrightarrow \Delta m^2(q_{\mathrm{sol}}), \qquad \Delta m^2_{\mathrm{atm}} \longleftrightarrow \Delta m^2(q_{\mathrm{atm}}).$$

Dans l'appariement LO retenu ici,

$$q_{\mathrm{sol}} = 1, \qquad q_{\mathrm{atm}} = 207.$$

Fermeture spectrale retenue. La fonction $\mathcal{S}(q; q_\star)$ est définie par (23.37). Elle consomme la coupure EBK canonique

$$k_c(q) = 5q^{1/3},$$

puis la coupure effective saturée

$$k_{\mathrm{eff}}(q; q_\star)$$

définie par (23.27). Cette saturation ne modifie pas le premier seuil fin $q_\star$; elle borne uniquement l'excès spectral $k_c^2(q) - k_c^2(q_\star)$ au-delà de ce seuil.

Évaluation numérique des rapports spectraux (LO). En évaluant numériquement la procédure définie par (23.27)–(23.37), avec

$$q_\star = 207, \qquad L_{\max} = c\, mR_0, \qquad c \gtrsim 8,$$

puis stabilisation conjointe de $(mR_0, L_{\max})$, on obtient

q	$\mathcal{S}(q; 207)$
1	1
207	36.84
3477	207.78

(30.7)

et donc

$$\boxed{\frac{\mathcal{S}(207;207)}{\mathcal{S}(1;207)} \simeq 36.84, \qquad \frac{\mathcal{S}(3477;207)}{\mathcal{S}(1;207)} \simeq 207.78, \qquad \frac{\mathcal{S}(3477;207)}{\mathcal{S}(207;207)} \simeq 5.64.} \tag{30.8}$$

Forme inversée (lecture alternative).

$$\boxed{\frac{\mathcal{S}(1;207)}{\mathcal{S}(207;207)} \simeq 0.0271, \qquad \frac{\mathcal{S}(1;207)}{\mathcal{S}(3477;207)} \simeq 0.00497, \qquad \frac{\mathcal{S}(207;207)}{\mathcal{S}(3477;207)} \simeq 0.183.}$$

Comparaison au ratio observationnel. Pour la comparaison numérique en ordre normal, les valeurs centrales de référence utilisées sont celles de NuFIT 5.3 [3] :

$$\Delta m^2_{21} = 7.41 \times 10^{-5}\ \mathrm{eV}^2, \qquad \Delta m^2_{3\ell} = 2.507 \times 10^{-3}\ \mathrm{eV}^2.$$

Ces valeurs servent uniquement de référence de comparaison pour le ratio observationnel ; elles ne sont pas consommées dans la fermeture LO du préfacteur breather. Le ratio observationnel atmosphérique/solaire vaut donc

$$\boxed{R_{\mathrm{obs}} := \frac{\Delta m^2_{\mathrm{atm}}}{\Delta m^2_{\mathrm{sol}}} = \frac{2.507 \times 10^{-3}}{7.41 \times 10^{-5}} = 33.83.} \tag{30.9}$$

Dans l'appariement LO retenu, la prédiction structurelle est

$$\boxed{R_{\mathrm{th}}^{(\mathrm{LO})} = \frac{\mathcal{S}(207;207)}{\mathcal{S}(1;207)} = 36.84.} \tag{30.10}$$

L'écart relatif correspondant est

$$\frac{R_{\mathrm{th}}^{(\mathrm{LO})} - R_{\mathrm{obs}}}{R_{\mathrm{obs}}} = \frac{36.84 - 33.83}{33.83} = 8.90\%.$$

TABLE 30.1 – Breather 2DOF (LO) — comparaison du ratio structurel au ratio atmosphérique/solaire.

Grandeur	Prédit (LO)	Observé	Écart relatif
$R_{\mathrm{atm/sol}}$	36.84	33.83	+8.90%

Lecture en rapport de masses minimal. Dans le cas minimal $m_0^2 = 0$, le rapport de masses associé aux deux écarts oscillatoires est la racine du rapport précédent :

$$\boxed{\left(\frac{m_3}{m_2}\right)_{\mathrm{HSM}}^{\mathrm{LO}} = \sqrt{36.84} = 6.070.} \tag{30.11}$$

La lecture observationnelle correspondante, construite à partir des valeurs de référence utilisées dans (30.9), vaut

$$\boxed{\left(\frac{m_3}{m_2}\right)_{\mathrm{obs}} = \sqrt{\frac{2.507 \times 10^{-3}}{7.41 \times 10^{-5}}} = 5.817.} \tag{30.12}$$

L'écart relatif est donc

$$\boxed{\frac{6.070 - 5.817}{5.817} = 4.34\%.} \tag{30.13}$$

TABLE 30.2 – Breather 2DOF (LO minimal) — comparaison du rapport de masses reconstruit.

Grandeur	Prédit (LO)	Référence oscillatoire	Écart relatif
m_3/m_2	6.070	5.817	+4.34%

Les bandes reportées dans cette section correspondent uniquement à la stabilité numérique de la fermeture spectrale EBK vis-à-vis de $L_{\max}$, de la largeur effective de fenêtre et de la discrétisation angulaire.

30.2 Breather 2DOF : masses absolues et borne sur le plancher quartique

Références (labels). §23.3.5, (23.51), (23.52), (23.56), (23.57), (23.58), (23.59), (23.62), (23.63), (23.66), (23.67), §23.3, §23.3.5, §29.2.

Rappels (entrées numériques et préfacteur absolu). Dans cette sous-section, on travaille en unités de calibrage avec $h_{\text{eff}} = \hbar$ et $c_t = c$. Le préfacteur absolu des écarts de masse au carré du breather 2DOF s'écrit, conformément à (23.58),

$$M_*^2 = \Gamma_{\text{shape}}^{(\text{LO})}\, \mathcal{B}_\nu^{(\text{LO})}.$$

La constante de forme est dérivée en amont :

$$\Gamma_{\text{shape}}^{(\text{LO})} = \sin^2\psi_c^{(\text{can})}\, \frac{J_2}{J_0}\, \frac{1}{\kappa_\omega^2} = 2.04629 \times 10^{-4}.$$

Ici $\psi_c^{(\text{can})}$ désigne l'angle conique canonique défini par (22.46)–(22.47). Il est distinct de l'angle cellule $\psi_c^{(\text{cell})}$, pour lequel $\sin^2\psi_c^{(\text{cell})} = 1/3$, cf. (6.47).

Le bloc absolu commun du breather est

$$\mathcal{B}_\nu^{(\text{LO})} = \Phi_{\text{core}}^{(\text{LO})}\, \delta_\omega^{12} \left(\frac{\hbar c}{\ell_0}\right)^2, \qquad \delta_\omega = \kappa_\omega^{-1}.$$

Avec

$$\Phi_{\text{core}}^{(\text{LO})} = 3.0954497129 \times 10^{-10}, \qquad \delta_\omega^{12} = 1.3168559732 \times 10^{-21},$$

et avec la valeur calibrée de ℓ_0, on obtient

$$\frac{\hbar c}{\ell_0} \simeq 9.4897383922 \times 10^{14}\ \text{eV},$$

puis

$$\boxed{\mathcal{B}_\nu^{(\text{LO})} = 3.6708827364 \times 10^{-1}\ \text{eV}^2, \qquad M_*^2 \simeq 7.5117 \times 10^{-5}\ \text{eV}^2.}$$

Propagation de l'incertitude de fermeture de $b_0^{(2)}$. Le préfacteur absolu M_*^2 hérite de la fermeture spectrale LO régularisée $b_0^{(2)}$. Cette dépendance doit être propagée avec les corrélations déjà fixées dans les sections précédentes.

On utilise

$$\kappa_\omega^2 \propto b_0^{(2)}, \qquad \delta_\omega = \kappa_\omega^{-1}, \qquad \left.\frac{\delta\ell_0}{\ell_0}\right|_{b_0} = -2\, \frac{\delta b_0^{(2)}}{b_0^{(2)}}.$$

Les trois facteurs de M_*^2 se comportent alors comme suit :

$$\Gamma_{\text{shape}}^{(\text{LO})} \propto \kappa_\omega^{-2} \propto \left(b_0^{(2)}\right)^{-1},$$

$$\Phi_{\text{core}}^{(\text{LO})} \propto \left(b_0^{(2)}\right)^{-2}, \qquad \delta_\omega^{12} = \kappa_\omega^{-12} \propto \left(b_0^{(2)}\right)^{-6},$$

et

$$\left(\frac{\hbar c}{\ell_0}\right)^2 \propto \left(b_0^{(2)}\right)^4.$$

Ainsi,

$$\boxed{M_*^2 \propto \left(b_0^{(2)}\right)^{-1-2-6+4} = \left(b_0^{(2)}\right)^{-5}.} \tag{30.14}$$

La contribution relative de $b_0^{(2)}$ au préfacteur absolu est donc

$$\boxed{\left.\frac{\delta M_*^2}{M_*^2}\right|_{b_0} = -5\, \frac{\delta b_0^{(2)}}{b_0^{(2)}}.} \tag{30.15}$$

Avec l'enveloppe LO régularisée

$$\frac{\sigma_{b_0}}{b_0} \simeq 2.2\%,$$

on obtient une incertitude de fermeture d'environ

$$\left.\frac{\sigma_{M_*^2}}{M_*^2}\right|_{b_0} \simeq 11\%.$$

Dans le cas LO minimal $m_0 = 0$, les masses m_2 et m_3 sont proportionnelles à $\sqrt{M_*^2}$. Elles héritent donc de

$$\boxed{\left.\frac{\sigma_{m_2}}{m_2}\right|_{b_0} = \left.\frac{\sigma_{m_3}}{m_3}\right|_{b_0} = \frac{1}{2}\left.\frac{\sigma_{M_*^2}}{M_*^2}\right|_{b_0} \simeq 5.5\%.} \tag{30.16}$$

Les valeurs absolues affichées ci-dessous sont donc des valeurs centrales LO ; leur incertitude théorique de fermeture est dominée, dans cette chaîne, par la dépendance résiduelle à $b_0^{(2)}$.

Triplet utilisé et statut. Dans la présente partie observationnelle, les indices spectraux q sont ceux du triplet de calibrage commun fixé en §29.3.1 :

$$\boxed{(q_1, q_2, q_3)_{\mathrm{cal}} = (1,\ 207,\ 3477).}$$

Les masses absolues écrites ci-dessous sont donc conditionnelles à ce triplet. Le triplet n'est pas redérivé dans cette sous-section ; il est consommé comme entrée spectrale calibrée commune.

Paramétrisation absolue des trois états. Les données oscillatoires fixent deux écarts de masse au carré indépendants, et non le plancher absolu commun. On paramètre donc les trois masses en ordre normal sous la forme

$$m_1^2 = m_0^2, \qquad m_2^2 = m_0^2 + M_*^2 \mathcal{S}(1;207), \qquad m_3^2 = m_0^2 + M_*^2 \mathcal{S}(207;207).$$

Avec la normalisation $\mathcal{S}(1;207) = 1$ et l'évaluation numérique

$$\frac{\mathcal{S}(207;207)}{\mathcal{S}(1;207)} = 36.84,$$

on obtient

$$\boxed{m_1^2 = m_0^2, \qquad m_2^2 = m_0^2 + M_*^2, \qquad m_3^2 = m_0^2 + 36.84\, M_*^2.} \tag{30.17}$$

La valeur $\mathcal{S}(3477;207)$ n'intervient pas dans cette paramétrisation minimale des trois masses associées aux deux écarts oscillatoires ; elle reste un niveau spectral supérieur utile dans l'analyse des rapports structurels.

LO minimal. Le cas LO minimal correspond à un plancher commun nul,

$$m_0^2 = 0,$$

conformément au statut LO rappelé par (23.62). On obtient alors

$$m_1 = 0, \qquad m_2 = \sqrt{M_*^2}, \qquad m_3 = \sqrt{36.84\, M_*^2}.$$

Numériquement, en affichant l'incertitude de fermeture issue de (30.16),

$$\boxed{m_1 = 0, \qquad m_2 = (8.67 \pm 0.48) \times 10^{-3}\ \mathrm{eV}, \qquad m_3 = (5.26 \pm 0.29) \times 10^{-2}\ \mathrm{eV}.}$$

La somme vaut

$$\boxed{\Sigma m_\nu^{(\mathrm{LO,min})} = 6.127 \times 10^{-2}\ \mathrm{eV}.} \tag{30.18}$$

Paramètre quartique de plancher commun. Au-delà du LO minimal, une correction quartique de maille ou de fond peut induire un plancher commun non nul. La fermeture LO utilisée dans cette section ne fixe pas ce coefficient quartique ; elle fixe en revanche la forme de son effet sur les masses absolues. On introduit donc le paramètre effectif λ_4^{eff} par

$$m_0^2 = \lambda_4^{\text{eff}} \left(\frac{2}{3}\right) \mathcal{B}_\nu^{(\text{LO})}. \tag{30.19}$$

Le facteur 2/3 est le rapport de forme

$$\frac{I_4}{I_2} = \frac{2}{3}$$

de la branche breather 2DOF. Avec

$$\mathcal{B}_\nu^{(\text{LO})} = 3.6708827364 \times 10^{-1}\ \text{eV}^2,$$

on obtient

$$\boxed{m_0^2 = 0.2447255158\, \lambda_4^{\text{eff}}\ \text{eV}^2.} \tag{30.20}$$

Le coefficient λ_4^{eff} ne modifie pas les écarts spectraux :

$$m_2^2 - m_1^2 = M_*^2, \qquad m_3^2 - m_1^2 = 36.84\, M_*^2.$$

Il décale seulement le plancher commun des masses absolues. La prédiction fermée au rang LO reste donc le cas minimal

$$\lambda_4^{\text{eff}} = 0, \qquad m_0^2 = 0.$$

Un coefficient $\lambda_4^{\text{eff}} > 0$ relève d'une fermeture quartique supplémentaire ; il n'est pas utilisé ici comme prédiction indépendante.

Somme des masses en présence d'un plancher quartique. Pour $\lambda_4^{\text{eff}} \geq 0$, la somme des masses s'écrit

$$\boxed{\Sigma m_\nu(\lambda_4^{\text{eff}}) = \sqrt{A\lambda_4^{\text{eff}}} + \sqrt{A\lambda_4^{\text{eff}} + M_*^2} + \sqrt{A\lambda_4^{\text{eff}} + 36.84\, M_*^2},} \tag{30.21}$$

avec

$$\boxed{A = 0.2447255158\ \text{eV}^2.} \tag{30.22}$$

Cette expression montre que λ_4^{eff} agit comme un plancher commun : il augmente les masses absolues sans changer les deux écarts oscillatoires.

Borne observationnelle sur λ_4^{eff}. Une borne externe sur la somme des masses neutrino fournit une contrainte directe sur λ_4^{eff}. Si l'on note

$$\Sigma m_\nu \leq \Sigma_{\max}^{\text{cosmo}},$$

alors λ_4^{eff} est borné par la solution de

$$\Sigma m_\nu(\lambda_{4,\max}^{\text{eff}}) = \Sigma_{\max}^{\text{cosmo}}. \tag{30.23}$$

En utilisant la borne cosmologique

$$\Sigma_{\max}^{\text{cosmo}} = 0.12\ \text{eV}$$

citée en [4], l'équation (30.23) donne

$$\boxed{\lambda_4^{\text{eff}} \leq 3.52 \times 10^{-3}.} \tag{30.24}$$

Le plancher commun correspondant est

$$\boxed{m_0 = \sqrt{A\lambda_4^{\text{eff}}} \leq 2.94 \times 10^{-2}\ \text{eV}.} \tag{30.25}$$

Lecture du résultat. La borne (30.24) n'est pas une prédiction de λ_4^{eff}. Elle exprime la contrainte imposée par la borne cosmologique sur le plancher quartique admissible. La prédiction fermée publiée au rang LO reste

$$\lambda_4^{\mathrm{eff}} = 0, \qquad \Sigma m_\nu^{(\mathrm{LO,min})} = 6.101 \times 10^{-2}\ \mathrm{eV}.$$

Un plancher positif demeure possible comme correction quartique, mais il est contraint par (30.23) dès qu'une borne externe sur Σm_ν est choisie.

30.3 Composé six-bump 2DOF : sortie interne de la réduction 3×2

Objet évalué. On évalue ici la sortie interne de la branche de fort recouvrement du composé $\mathcal{C}_{3\times 2}$, défini au chapitre 24. Dans cette lecture, le composé est un composé de six bump 2DOF dont la réduction effective sélectionne trois témoins collectifs breather-like. Le triplet EBK consommé est celui fixé en §29.3.1 :

$$\boxed{(q_1, q_2, q_3) = (1, 207, 3477).} \tag{30.26}$$

Cette section évalue seulement la matrice réduite interne et les angles associés. Elle ne procède à aucune identification externe des modes propres et ne déduit pas de masse absolue du composé.

Statut des degrés de liberté. Une fois le triplet (30.26) fixé, la réduction projective 3×2 ne contient pas de paramètre angulaire ajustable. Les quantités G_2, G_3, $\Xi_{207,3477}$, R_k, γ, ϵ_{D_η}, H_{23}^{br2}, α_{D_η} et β_{D_η} sont calculées par les fermetures citées ci-dessous. Les angles ϑ_{ij} ne sont donc pas injectés dans la construction ; ils sont extraits après coup par diagonalisation réelle de la matrice réduite.

Références théoriques consommées. La construction théorique consommée est la fermeture projective du composé :

(24.8), (24.10), (24.13), (24.14), (24.15), (24.16),

(24.17), (24.18), (24.19), (24.20), (24.21),

(24.22), (24.23).

Le raccord EM–like projeté est consommé depuis le couplage champ–solution :

(21.8), (21.10), (21.11).

La constante de canal Γ_{EM} est celle définie par (20.36).

Compatibilité de largeur du bloc fin. Pour le couple interne $q_2/q_3 = 207/3477$, la compatibilité de largeur vaut

$$\boxed{\Xi_{207,3477} = \frac{4(207)(3477)}{(207+3477)^2} \simeq 0.212.} \tag{30.27}$$

Témoins projetés et métriques réduites. Le projecteur interne q_2-like donne

$$\boxed{G_2 = G_{22}^{\mathrm{br2}} \simeq \frac{1.6155}{207} \simeq 7.80 \times 10^{-3}.} \tag{30.28}$$

Le verrouillage angulaire saturé donne

$$\boxed{R_k = \frac{k_{3477}}{k_{207}} \simeq \frac{3477}{207}\,\Xi_{207,3477} \simeq 3.56, \qquad \gamma = \frac{1 - R_k}{2(1 + R_k)} \simeq -0.28.} \tag{30.29}$$

La métrique du témoin transverse collectif est alors

$$\boxed{G_3 = G_{33}^{\mathrm{br2}} \simeq 1.36 \times 10^{-2}.} \tag{30.30}$$

Quasi-résonance du bloc fin. La correction diagonale fine vaut

$$\boxed{\mathcal{C}_K^{\mathrm{fine}} = 1 + \Xi_{207,3477}\left(1 - \frac{207}{3477}\right) + O(e^{-207\Delta R_\star}) \simeq 1.20.} \tag{30.31}$$

En consommant (24.18), on obtient la plage

$$\boxed{\epsilon_{D_\eta} \simeq 0.087\text{–}0.090.} \tag{30.32}$$

Couplage EM–like projeté. Le hors-diagonal fin est

$$\boxed{H_{23}^{\mathrm{br2}} = \Gamma_{\mathrm{EM}}\,\Xi_{207,3477}\,\frac{2}{\pi} \simeq 1.42 \times 10^{-2}.} \tag{30.33}$$

La normalisation métrique donne

$$b_{\mathrm{EM}} = \frac{H_{23}^{\mathrm{br2}}}{\sqrt{G_2 G_3}}.$$

Avec (30.28)–(30.30), on obtient

$$b_{\mathrm{EM}} \simeq 1.3\text{–}1.4.$$

Fermeture croisée de l'échelle fine. L'échelle commune du bloc fin est

$$M_{\mathrm{fine}} := \frac{m_2 + m_3}{2}.$$

La route géométrique et la route EM–like donnent la même échelle réduite à l'ordre de précision de la fermeture projective :

$$\boxed{M_{\mathrm{fine}}^{(\alpha)} \simeq M_{\mathrm{fine}}^{(\beta)} \simeq 1.5 \pm 0.1.} \tag{30.34}$$

On en déduit

$$\boxed{\alpha_{D_\eta} \simeq 0.35\text{–}0.38, \qquad \beta_{D_\eta} \simeq 0.82\text{–}0.84.} \tag{30.35}$$

Matrice réduite. L'évaluation centrale des plages précédentes donne

$$\boxed{\mathcal{M}_{\mathrm{red}}^{D_\eta} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 0.373 & 0 \\ 0.373 & 1.089 & 0.828 \\ 0 & 0.828 & 0.911 \end{pmatrix}.} \tag{30.36}$$

Cette matrice est une matrice interne réduite du composé. Elle n'est pas une matrice de masse absolue. Ses coefficients proviennent des fermetures listées ci-dessus et des valeurs réduites calculées dans cette section ; ils ne sont pas ajustés sur les angles externes de comparaison.

Angles internes de la réduction projective. La diagonalisation réelle de (30.36), avec la convention de rotations réelles usuelle, donne

$$\boxed{(\vartheta_{12},\vartheta_{13},\vartheta_{23}) \simeq (33.4^\circ,\ 8.6^\circ,\ 49.3^\circ\text{–}49.5^\circ).} \tag{30.37}$$

Ces angles sont les sorties internes principales de la réduction projective 3×2 du composé six-bump 2DOF pour le triplet (30.26). Ils sont obtenus uniquement par diagonalisation de (30.36). Aucun angle PMNS externe n'intervient dans cette extraction. La proximité numérique avec les angles de comparaison ne doit donc pas être lue comme le résultat d'un ajustement angulaire, mais comme un contrôle de cohérence de la réduction projective une fois le triplet consommé. L'interprétation externe des angles ϑ_{ij} relève du chapitre de correspondance.

30.4 Bump 3DOF isolé : sorties internes de source

Références théoriques. La branche bump 3DOF isolée est définie par §10.11, en particulier (10.13), (10.14) et (10.15).

Énergie spectrale isolée. La partie spectrale isolée est

$$\frac{E^{\mathrm{spec}}_{f,X}}{E_*} = q_f \sigma_X.$$

Avec

$$(q_1,q_2,q_3)_{\mathrm{cal}} = (1,207,3477), \qquad \sigma_\downarrow = \frac{1}{3}, \qquad \sigma_\uparrow = \frac{2}{3},$$

et

$$E_* = 0.512175291 \text{ MeV},$$

on obtient les sorties internes suivantes :

branche	(f,X)	$E^{\mathrm{spec}}_{f,X}/E_*$	$E^{\mathrm{spec}}_{f,X}$ [MeV]
d	$(q_1,\downarrow)$	1/3	0.170725097
u	$(q_1,\uparrow)$	2/3	0.341450194
s	$(q_2,\downarrow)$	69	35.3400951
c	$(q_2,\uparrow)$	138	70.6801902
b	$(q_3,\downarrow)$	1159	593.611162
t	$(q_3,\uparrow)$	2318	1187.222325

Ces valeurs sont des masses spectrales internes de bump 3DOF isolé.

Auto–réponse forte–like isolée. La théorie définit aussi

$$E^{\mathrm{iso}}_{\mathsf{s}}[S_{f,X}] = \frac{1}{2}\langle S_{f,X}, G_{\mathsf{s}} S_{f,X}\rangle.$$

Passage aux états liés. Les masses ci-dessus caractérisent les solutions bump 3DOF isolées dans la fermeture spectrale. Lorsqu'un ou plusieurs bump 3DOF entrent dans un composé couleur–blanc, leur énergie n'est plus obtenue par simple addition des masses isolées : le raccord forte–like collectif, le défaut de blancheur et les modes internes de jonction modifient l'énergie totale.

La section suivante construit ces corrections directement sur la source blanche collective du CB3. C'est cette fermeture liée qui doit être utilisée pour les masses baryon–like.

Incertitude. Les valeurs du tableau sont des sorties centrales LO de la fermeture spectrale isolée

$$E_{f,X}^{\mathrm{spec}} = E_* q_f \sigma_X.$$

Les facteurs $\sigma_\downarrow = 1/3$ et $\sigma_\uparrow = 2/3$ sont des coefficients rationnels de branche. Les entiers q_f sont ceux de la fermeture spectrale discrète rappelée dans la présente section. L'incertitude propagée sur $E_{f,X}^{\mathrm{spec}}$ provient donc uniquement de l'incertitude éventuellement attachée à l'échelle E_* :

$$\Delta E_{f,X}^{\mathrm{spec}} = q_f \sigma_X \, \Delta E_*, \qquad \frac{\Delta E_{f,X}^{\mathrm{spec}}}{E_{f,X}^{\mathrm{spec}}} = \frac{\Delta E_*}{E_*}.$$

Lorsqu'aucune incertitude numérique n'est fournie pour E_* dans la chaîne amont, les valeurs affichées doivent être lues comme valeurs centrales LO.

30.5 CB3 : prédictions LO des masses couleur–blanches baryon-like

Références théoriques. La fermeture CB3 utilisée ici est définie par (28.23), avec (28.19), (28.16), (28.17) et (28.18). Le mode bas du sous-couple $udQ_\uparrow$ est défini par (28.28) et (28.31).

Entrées numériques tracées. On utilise le triplet spectral calibré dans §29.3.1,

$$(q_1, q_2, q_3)_{\mathrm{cal}} = (1, 207, 3477),$$

et l'échelle d'énergie spectrale

$$E_* = m_{\mathrm{bump}}^{(\mathrm{LO})} c_t^2,$$

dont la valeur numérique est celle de (30.4),

$$E_* = 0.512175291 \text{ MeV}.$$

Les constantes de forme $b_0^{(2)}$ et J_2 sont celles invoquées dans (28.23) et la définition

$$\tau_3 = \sqrt{3\, b_0^{(2)}\, J_2}.$$

Dictionnaire de branches. On utilise les identifications internes

$$u = (q_1, \uparrow), \qquad d = (q_1, \downarrow), \qquad s = (q_2, \downarrow), \qquad c = (q_2, \uparrow), \qquad b = (q_3, \downarrow).$$

Ce dictionnaire ne transforme pas les bump 3DOF isolés en états observables : il sert seulement à construire les combinaisons CB3 couleur–blanches.

Formule générique. La masse générique du CB3 est calculée par

$$\frac{M_{abc}^{\mathrm{CB3,gen}} c_t^2}{E_*} = 3\tau_3 + \sum_{i=1}^{3} q_i \sigma_i + \frac{1}{6\pi^2}\, \mathcal{W}_{abc}(\delta_*) - \frac{\tau_3}{2\pi q_{\max}} + \mathcal{F}_{\mathrm{fam}}^{abc}.$$

Pour les sorties numériques LO ci-dessous, on utilise le seuil de raccord canonique CB3

$$\delta_{\mathrm{CB3}}^{\mathrm{LO}} = 1.$$

Cette valeur n'est pas un optimum variationnel de branche. Elle correspond au seuil LO de sortie de saturation des sous-cœurs CB3, défini par (28.16) et justifié par la Proposition 28.4. Elle n'est pas calibrée sur les masses baryoniques utilisées en comparaison.

Mode bas $udQ_\uparrow$. Lorsque le troisième constituant est une branche ↑ lourde, le mode bas mécanique du sous-couple ud est

$$M_{udQ_\uparrow}^{\mathrm{CB3,bas}} = M_{udQ_\uparrow}^{\mathrm{CB3,gen}} - \frac{E_* \tau_3}{c_t^2} \left(1 - \frac{1}{q_Q}\right) \frac{2G_\uparrow(q_Q)}{1 + 2G_\uparrow(q_Q)}.$$

Dans la table, udc_{bas} désigne cette branche basse ; udc_{gen} désigne la branche générique non relaxée.

Sorties numériques LO génériques. Les valeurs suivantes sont obtenues par substitution directe dans (28.23) et, pour udc_{bas}, dans (28.31). Le recalcul direct de (28.23), avec les constantes E_*, $b_0^{(2)}$, J_2, q_c, les projections σ_X, ρ_X, χ_X et la règle saturée/non saturée indiquées ci-dessous, régénère toutes les valeurs du tableau à l'arrondi affiché.

Pour le doublet léger uud/udd, ce tableau donne les masses génériques avant correction fine nucléon–like. Le splitting physique $m_n - m_p$ est traité séparément ci-dessous.

La substitution numérique consomme explicitement les projections et holonomies de branche

$$\sigma_\downarrow = \frac{1}{3}, \qquad \sigma_\uparrow = \frac{2}{3}, \qquad \rho_\downarrow = \frac{2}{3}, \qquad \rho_\uparrow = \frac{1}{3}, \qquad \chi_\downarrow = 1, \qquad \chi_\uparrow = \frac{2\pi}{3},$$

définies par (21.28) et (21.29). Elle consomme aussi la coupure réduite

$$q_c = 4\pi \sqrt{\frac{3\, b_0^{(2)}}{J_2}},$$

définie par (28.12), les poids diagonaux

$$G_i = \frac{1}{1 + \left(\frac{q_i \rho_i}{q_c}\right)^2}, \qquad Q_i^{\mathrm{CB3}} = q_i \sigma_i \chi_{X_i}, \qquad \Xi_i = \sigma_i \chi_{X_i},$$

et la règle LO de recouvrement saturé/non saturé

$$\mathcal{O}_{ij}^{\mathrm{CB3,LO}} = \begin{cases} 1, & q_i = q_j, \\ (q_{ij}^{\max})^{-3/2}\, \mathrm{sech}(1), & q_i \neq q_j, \end{cases}$$

avec $\delta_{\mathrm{CB3}}^{\mathrm{LO}} = 1$, cf. (28.16), (28.17) et (28.18). Le terme familial consomme enfin

$$\mathcal{S}_{ij} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2(q_{ij}^{\max} - q_{ij}^{\min})}{3 q_c}\right)^2}},$$

conformément à (28.26).

CB3	Réf.	HSM LO gén. [MeV]	Obs. [MeV]	Ecart
uud	p	937.46 (±1.1%)	938.2721	−0.087%
udd	n	937.29 (±1.1%)	939.5654	−0.242%
udc_{gen}	$\Sigma_c(2455)^+$	2498.93	2452.65	+1.887%
udc_{bas}	Λ_c^+	2280.51	2286.46	−0.260%
udb	Λ_b^0	5599.33	5619.57	−0.360%
uss	Ξ^0	1332.00	1314.86	+1.304%
dss	Ξ^-	1331.80	1321.71	+0.763%
sss	Ω^-	1668.30	1672.45	−0.248%
ssb	Ω_b^-	6108.70	6045.8	+1.040%

Comparaison aux états baryon–like. Les sorties uud et udd donnent l'échelle nucléon–like. Les sorties uds, uss/dss et sss donnent respectivement les échelles hyperon–like à une, deux et trois branches étranges. La branche $udc_{\rm bas}$ correspond au mode bas du raccord $udQ_\uparrow$, tandis que $udc_{\rm gen}$ correspond au mode non relaxé au même rang LO.

Correction fine nucléon–like. La correction conique compacte et la correction EM–like compacte donnent, au rang LO compact,

$$\boxed{m_n - m_p \simeq \frac{E_*\tau_3}{18\pi^2} - \frac{E_*}{3} - \alpha_{\rm EM}^{\rm HSM,LO}\frac{E_*\tau_3}{2\pi}.} \tag{30.38}$$

Le premier terme provient du complément conique $\rho = \cos^2\alpha$, le second de la différence spectrale uud/udd, et le troisième du terme EM–like compact porté par le contraste de charge interne du CB3. Ce terme EM–like compact est le rappel observationnel de (21.18). Le couplage élémentaire $\alpha_{\rm EM}^{\rm HSM,LO}$ est fermé dans le canal EM–like par (20.34).

Avec

$$\alpha_{\rm EM}^{\rm HSM,LO} = 7.2846062 \times 10^{-3},$$

la correction fine donne

$$\boxed{m_n - m_p \simeq +1.31 \text{ MeV},}$$

à comparer à

$$(m_n - m_p)_{\rm obs} \simeq +1.293 \text{ MeV}.$$

Ainsi, la sortie physique du splitting $n - p$ est celle de la correction fine compacte ; le tableau générique précédent doit être lu comme un tableau de masses de base avant cette correction spécifique du doublet léger.

Statut. La section compare des états couleur–blancs CB3, et non des bump 3DOF isolés. Les masses affichées dans le tableau sont les sorties génériques pertinentes pour une comparaison baryon–like au rang LO. Pour le doublet uud/udd, le splitting physique consomme la correction fine nucléon–like (30.38), dont le terme EM–like compact utilise le couplage élémentaire fermé $\alpha_{\rm EM}^{\rm HSM,LO}$.

Les sous-branches multi-lourdes relèvent du critère de sélection interne des branches CB3. Lorsque, avec les constantes calibrées, ce critère sélectionne un minimum intérieur, la masse correspondante est reportée. Lorsque le critère place la branche sur le bord du domaine admissible, aucune masse de minimum intérieur n'est reportée dans ce tableau.

Incertitude et statut LO. Les masses affichées sont des valeurs centrales LO de la fermeture CB3

$$M_{abc}^{\rm CB3} = E_*\,\mathcal{M}_{abc}^{\rm CB3},$$

où $\mathcal{M}_{abc}^{\rm CB3}$ désigne la quantité réduite définie par (28.23), complétée si nécessaire par (28.31).

L'échelle E_* est celle de la masse bump 2DOF centrale (30.4) :

$$E_* = m_{\rm bump}^{\rm (LO)} c_t^2.$$

La dépendance corrélée en $b_0^{(2)}$ de cette échelle s'annule au rang LO, comme montré explicitement par (30.5). En effet, dans la chaîne EM 1–corps complète,

$$m_{\rm bump}^{\rm (LO)} \propto \ell_0^{-1}\,\frac{1}{\kappa_\omega^2 b_0^{(2)}}, \qquad \kappa_\omega^2 \propto b_0^{(2)}, \qquad \ell_0 \propto \big(b_0^{(2)}\big)^{-2},$$

d'où

$$\frac{\partial \ln E_*}{\partial \ln b_0^{(2)}} = \frac{\partial \ln m_{\mathrm{bump}}^{(\mathrm{LO})}}{\partial \ln b_0^{(2)}} = 0.$$

L'incertitude corrélée de régularisation de $b_0^{(2)}$ ne se transmet donc pas par l'échelle E_*. L'incertitude transmise par E_* est celle de l'échelle centrale retenue :

$$\Delta M_{abc}^{(E_*)} = \mathcal{M}_{abc}^{\mathrm{CB3}}\, \Delta E_*.$$

Les coefficients rationnels de branche ne portent pas d'incertitude numérique. En revanche, $b_0^{(2)}$ intervient aussi dans les constantes de forme CB3, notamment

$$\tau_3 = \sqrt{3 b_0^{(2)} J_2}, \qquad q_c = 4\pi \sqrt{\frac{3 b_0^{(2)}}{J_2}}.$$

La propagation locale donne

$$\frac{\Delta \tau_3}{\tau_3} = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta b_0^{(2)}}{b_0^{(2)}} + \frac{\Delta J_2}{J_2}\right), \qquad \frac{\Delta q_c}{q_c} = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta b_0^{(2)}}{b_0^{(2)}} - \frac{\Delta J_2}{J_2}\right).$$

La dépendance restante des masses CB3 à q_c passe par les poids saturés ou non saturés de la fermeture réduite ; elle doit être propagée par variation directe de la formule (28.23) lorsque l'on souhaite une barre d'erreur quantitative. Les valeurs affichées dans le tableau sont donc des valeurs centrales LO, avec une incertitude de fermeture de type B héritée de $b_0^{(2)}$.

Au-delà de cette propagation, les incertitudes de troncature dominantes proviennent de l'approximation locale des recouvrements $\mathcal{O}_{ij}$, de la fermeture $\delta_* = 1$, et du diagnostic de sélection des sous-branches multi-lourdes. Ces effets définissent le statut LO des valeurs affichées et le périmètre des masses reportées.

30.6 Higgs-like radial (scalaire, $s_g = 0$) : prédiction de schéma par cœur actif minimal et raffinement NLO

Références (labels). §14.8, (14.14), (14.15), §14.10, (14.17), (14.18), §14.12, (14.19), (14.43), (14.44), (14.25), (14.26), (14.29), (14.35), (14.41), (14.42), (14.37), (14.38), (14.39), (14.45), 14.7.

Principe. On utilise la fermeture du canal Higgs-like radial obtenue à partir : (i) du cœur actif minimal, (ii) du raccord scalaire exact sur $\mathbb{S}^3$, et (iii) du raffinement NLO local minimal de bord.

Dans la partie théorique, la relation fermée est écrite relativement à la branche NSL chargée interne :

$$m_{\mathrm{Hlike}}^{(\mathrm{HSM})} = m_{\mathrm{NSL,ch}}^{(\mathrm{HSM})} \sqrt{1 + \delta_H^*}.$$

Dans la présente section observationnelle, on spécialise cette branche NSL chargée interne par l'ancrage d'échelle

$$m_{\mathrm{NSL,ch}}^{(\mathrm{HSM})} \longmapsto m_W.$$

On obtient donc, pour l'évaluation numérique,

$$m_H^{(\mathrm{pred})} = m_W \sqrt{1 + \delta_H^*}.$$

La prédiction sans échelle spécialisée est le ratio

$$\frac{m_H^{(\mathrm{pred})}}{m_W} = \sqrt{1 + \delta_H^*}.$$

L'incrément scalaire corrigé au rang NLO local minimal est

$$\delta_H^* = A_0 \Big[B(u_H^*) + \Big(1 + \frac{\pi}{2}\Big)\zeta(u_H^*) \Big],$$

où u_H^* est fixé par la loi de fermeture du raccord Higgs-like, cf. (14.45). Le facteur

$$\Big(1 + \frac{\pi}{2}\Big)\zeta(u_H^*)$$

n'est pas un coefficient ajusté sur la masse du Higgs. Il provient de la somme du terme local LO et du terme de bord NLO minimal,

$$\Sigma_{\mathrm{loc}}(u) + \Sigma_{\mathrm{rim}}(u) = \zeta(u) + \frac{\pi}{2}\zeta(u),$$

avec

$$\Sigma_{\mathrm{rim}}(u) = \frac{\pi}{2}\zeta(u),$$

cf. (14.42) et (14.37). Le facteur $\pi/2$ est l'inverse de la compliance linéaire orientée

$$\mathcal{C}_{\partial H}^{(1)}(u) = \frac{2}{\pi}\mathcal{C}_{\mathrm{stat}}(u),$$

cf. (14.35). Le contrôle quadratique $1/\sqrt{2}$ existe dans la théorie comme contrôle RMS du même cycle, mais il ne définit pas la fermeture active de bord utilisée ici. La fermeture de u_H^* est ensuite donnée par (14.45).

On a

$$B(u) = \mathcal{O}_2^{(S)}(u) - \frac{\mathcal{O}_2^{(S)\prime}(u)}{\mathcal{O}_1^{(S)\prime}(u)}\mathcal{O}_1^{(S)}(u),$$

avec

$$\mathcal{O}_1^{(S)}(u) = (u\ \mathrm{csch}\, u)^2, \qquad \mathcal{O}_2^{(S)}(u) = 2\,(u \coth u - 1)\ \mathrm{csch}^2 u,$$

et

$$\zeta(u) = \frac{1}{2}\, u\, \coth u\, \mathrm{csch}^2 u.$$

Dans le régime monopole du cœur quasi-plan,

$$A_0 = \frac{J_0^2}{J_2}\,\hat{c}_0^{(S)}(u)^2 \simeq \frac{J_0^2}{J_2}.$$

Le choix $a(\xi) = \mathrm{sech}\,\xi$ doit être lu ici comme représentant canonique de la classe universelle des profils localisés au LO, et non comme une affirmation littérale sur le profil exact du cœur.

Choix de branche. On retient la branche fondamentale du cœur actif minimal. Au rang LO, la loi de raccord fermée donne

$$u_{H,\mathrm{LO}}^* = \frac{3\pi}{4} + \mathcal{O}\left(\frac{\ell_r^2}{R_0^2}\right), \qquad \text{cf. (14.29).}$$

Avec le raffinement NLO local minimal, la loi de raccord devient

$$y \cot y = -u + \Big(1 + \frac{\pi}{2}\Big)\zeta(u), \qquad \text{cf. (14.38).}$$

Dans la réduction locale du cœur actif minimal, on utilise

$$y \simeq u, \qquad \text{cf. (14.26)},$$

ce qui donne la loi scalaire locale

$$u \cot u = -u + \Big(1 + \frac{\pi}{2}\Big)\zeta(u).$$

Sa solution fondamentale vaut

$$u_H^* \simeq 2.3302825264.$$

Les autres branches du raccord scalaire correspondent à des racines excitées ou à des oscillations radiales supplémentaires ; elles ne sont pas retenues dans la prédiction de schéma minimale.

Évaluation des briques. À cette valeur,

$$B(u_H^*) \simeq -0.01639, \qquad \zeta(u_H^*) \simeq 0.04580.$$

Le facteur de bord NLO vaut

$$1 + \frac{\pi}{2} \simeq 2.570796,$$

de sorte que

$$B(u_H^*) + \Big(1 + \frac{\pi}{2}\Big)\zeta(u_H^*) \simeq 0.10135.$$

Avec

$$J_0 = 10.3354255601, \qquad J_2 = 7.6339320582, \qquad A_0 = \frac{J_0^2}{J_2} \simeq 13.993,$$

on obtient

$$\delta_H^* \simeq 1.41816.$$

Résultat. La spécialisation observationnelle de la relation HSM donne

$$m_H^{(\mathrm{pred})} = m_W \sqrt{1 + \delta_H^*}.$$

Pour la valeur d'ancrage utilisée dans cette évaluation,

$$m_W = 80.379 \text{ GeV},$$

on obtient

$$\boxed{m_H^{(\mathrm{pred})} \simeq 124.993 \text{ GeV}.}$$

De manière équivalente, la prédiction sans échelle spécialisée est le ratio

$$\boxed{\frac{m_H^{(\mathrm{pred})}}{m_W} = \sqrt{1 + \delta_H^*} \simeq 1.55504.}$$

Comparaison à la valeur de référence. En prenant comme valeur de référence

$$m_H^{(\mathrm{ref})} = 125.20 \pm 0.11 \text{ GeV},$$

on obtient

$$\Delta = m_H^{(\mathrm{pred})} - m_H^{(\mathrm{ref})} \simeq -0.207 \text{ GeV},$$

et

$$\frac{\Delta}{m_H^{(\mathrm{ref})}} \simeq -1.65 \times 10^{-3} \simeq -0.165\%.$$

L'écart reste inférieur au pourcent, mais il ne doit pas être présenté comme un accord au niveau 10^{-5} lorsque la comparaison est faite à la valeur expérimentale actuelle.

Statut de la prédiction. La présente valeur est une *prédiction de schéma* : elle repose sur le cœur actif minimal, la branche fondamentale, la fermeture scalaire LO universalisée, et le raffinement NLO local minimal de bord. Aucun ajustement direct sur la masse du Higgs n'est introduit dans cette section.

Le choix du facteur de bord $\pi/2$ n'est pas sélectionné par l'accord numérique final avec m_H^{ref}. Il est fixé en amont par la compliance linéaire orientée de reclosure,

$$\mathcal{C}_{\partial H}^{(1)} = \frac{2}{\pi}\mathcal{C}_{\mathrm{stat}}, \qquad \Sigma_{\mathrm{rim}} = \frac{\pi}{2}\zeta,$$

cf. (14.35) et (14.42). Une fermeture quadratique RMS conduirait à un autre schéma de bord ; elle n'est pas utilisée dans la prédiction affichée.

La partie théorique fournit d'abord la relation relative

$$m_{\mathrm{Hlike}}^{(\mathrm{HSM})} = m_{\mathrm{NSL,ch}}^{(\mathrm{HSM})}\sqrt{1+\delta_H^*}.$$

La valeur numérique affichée ci-dessus est obtenue en spécialisant la branche NSL chargée interne par l'ancrage d'échelle m_W. Le schéma prédit donc le ratio spécialisé $m_H^{(\mathrm{pred})}/m_W$, puis la masse $m_H^{(\mathrm{pred})}$ est obtenue en utilisant m_W comme ancrage d'échelle.

Incertitude. Les incertitudes numériques directes associées à la résolution de u_H^* sont négligeables à la précision affichée, puisque u_H^* est déterminé par la loi de fermeture du schéma retenu. L'incertitude expérimentale de l'ancrage m_W se propage linéairement dans $m_H^{(\mathrm{pred})}$, tandis que l'incertitude expérimentale de la valeur de référence $m_H^{(\mathrm{ref})}$ intervient uniquement dans la comparaison finale. Les incertitudes structurelles résiduelles ne portent pas sur l'existence d'une fermeture de u_H^*, mais sur le choix du rang retenu, LO ou NLO local minimal, et sur la décision de ne pas inclure, dans ce chapitre, de degrés de bord non locaux ou d'opérateurs de bord d'ordre supérieur.

Commentaires. (i) La valeur de raccord obtenue ne provient pas d'un choix canonique importé du bump ou du NSL, mais d'une fermeture spécifique au canal Higgs-like radial. (ii) Aucun facteur empirique n'est ajusté sur la masse du Higgs. (iii) La relation HSM utilise comme référence la branche NSL chargée interne ; la présence de m_W dans cette section relève uniquement de la spécialisation observationnelle de cette branche comme ancrage d'échelle. (iv) La proximité avec la valeur de référence constitue un test fort du schéma Higgs-like retenu, sans valoir encore, à elle seule, démonstration ultime du secteur scalaire complet.

30.7 Photon : prédictions LO de masse, vitesse et polarisations

Références (labels). Le secteur transverse local est défini par le Lagrangien (1.16). Sa variation donne l'équation d'onde transverse (1.17), avec la vitesse locale

$$c_t^2 = \frac{T}{\rho},$$

cf. (1.18). La branche bosonique quasi-c_t 2DOF est introduite dans la définition 8.1 et dans le chapitre des solutions quasi-c_t 2DOF. Ses invariants d'énergie, de spin et de normalisation sont donnés en §8.3, avec la fermeture d'action (8.11). La sélection fréquentielle sur $\mathbb{S}^3$ est rappelée par (8.14).

Identification observationnelle. Dans la théorie HSM, l'objet calculé au LO est la branche bosonique transverse quasi-c_t. Dans la partie observationnelle, cette branche est identifiée au photon parce qu'elle vérifie simultanément les trois critères minimaux :

$$v = c, \qquad m_\gamma^{(\mathrm{LO})} = 0, \qquad N_{\mathrm{pol}}^{\mathrm{phys}} = 2.$$

Le terme « photon » désigne donc ici la lecture observationnelle de cette branche HSM transverse, et non l'importation préalable d'une théorie de jauge abélienne complète.

Dispersion et vitesse. Au rang LO et dans le secteur transverse local, la variation de (1.16) donne la dispersion quasi-plane

$$\omega^2 = c_t^2 k^2.$$

Dans la partie observationnelle, on utilise l'identification calibrée

$$c_t = c.$$

On obtient donc

$$\boxed{\omega^2 = c^2 k^2.} \tag{30.39}$$

La vitesse de propagation du mode identifié au photon est donc

$$\boxed{v_\gamma^{(\mathrm{LO})} = c.} \tag{30.40}$$

Masse LO. La branche quasi-c_t étudiée ici est gapless au rang meneur : aucun terme linéaire de masse effective n'entre dans la dispersion LO. En comparant (30.39) à une dispersion massive de type Proca,

$$\omega^2 = c^2 k^2 + \frac{m_\gamma^2 c^4}{h_{\mathrm{eff}}^2},$$

on obtient

$$\boxed{m_\gamma^{(\mathrm{LO})} = 0.} \tag{30.41}$$

Polarisations physiques. Le mode identifié au photon est la branche bosonique quasi-c_t 2DOF purement tangentielle. Dans cette branche, le champ porte deux hélicités transverses, ou de manière équivalente deux polarisations transverses physiques. Les composantes non transverses ne sont pas des polarisations propagatives de cette branche LO. On retient donc

$$\boxed{N_{\mathrm{pol}}^{\mathrm{phys}} = 2.} \tag{30.42}$$

Canal observationnel	Dispersion (LO)	Masse LO	# pol. physiques
Photon	$\omega^2 = c^2 k^2$	$m_\gamma = 0$	2

Comparaison observationnelle minimale. La prédiction LO

$$m_\gamma^{(\mathrm{LO})} = 0$$

est compatible avec les contraintes expérimentales existantes sur une éventuelle masse du photon. Ces contraintes sont des bornes supérieures et dépendent des hypothèses utilisées pour relier une masse effective à des observations astrophysiques, solaires, de plasma ou de laboratoire. La présente section ne cherche donc pas à sélectionner une borne unique : elle constate seulement que la limite LO HSM est le cas exactement sans masse.

Commentaires. (i) Au LO, cette observable minimale est entièrement fixée par le secteur transverse et par l'identification $c_t = c$ dans la partie observationnelle.

(ii) L'identification au photon repose sur trois critères simultanés : propagation à c, masse nulle au LO, et deux polarisations transverses physiques.

(iii) La branche considérée est la branche quasi-c_t 2DOF bosonique du support HSM. Elle ne suppose pas l'introduction d'un terme de masse de Proca au rang LO.

(iv) Les lectures de type jauge, ainsi que les extensions non abéliennes effectives, relèvent d'un niveau de description ultérieur et ne sont donc pas détaillées dans la présente section.

30.7.1 Constante de structure fine EM–like : prédiction LO

Références (labels). Le couplage élémentaire EM–like est fermé dans le canal champ par (20.34). Cette fermeture consomme le facteur de Green local $1/(4\pi)$, la normalisation cyclique élémentaire $1/(2\pi)$, et la projection source simple du cœur

$$\Pi^{\mathrm{EM}}_{\mathrm{source}} = \frac{J_0}{J_0 + J_2},$$

définie par (16.2). Elle est distincte des coefficients de fermeture active à deux projections tels que Γ_{EM}.

Prédiction LO. La constante de couplage EM–like prédite au rang LO est

$$\boxed{\alpha_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{HSM,LO}} = \frac{1}{8\pi^2}\frac{J_0}{J_0 + J_2}.} \tag{30.43}$$

Avec

$$J_0 = \frac{\pi^3}{3}, \qquad J_2 = 7.6339320582,$$

on obtient

$$\boxed{\alpha_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{HSM,LO}} \simeq 7.285 \times 10^{-3}, \qquad \left(\alpha_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{HSM,LO}}\right)^{-1} \simeq 137.3.} \tag{30.44}$$

Comparaison observationnelle. La constante de structure fine observée est

$$\alpha_{\mathrm{fs}}^{-1} \simeq 137.036.$$

La prédiction LO donne donc un écart relatif de l'ordre de

$$\frac{\left(\alpha_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{HSM,LO}}\right)^{-1} - \alpha_{\mathrm{fs}}^{-1}}{\alpha_{\mathrm{fs}}^{-1}} \simeq 1.8 \times 10^{-3}.$$

soit un écart relatif d'environ 0.175%.

Statut. Cette section ne fixe pas $\alpha_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{HSM,LO}}$ par la charge externe e. La prédiction (30.43) est une fermeture adimensionnée du canal EM–like, issue des constantes de forme J_0, J_2 et des facteurs géométriques/cycliques du vertex élémentaire. Le quantum absolu de charge du champ EM–like est prédit séparément en §30.7.2, à partir de cette fermeture et de l'impédance native du canal EM–like. Sa comparaison à e, après lecture SI, n'est cependant pas un test phénoménologique entièrement indépendant de la comparaison précédente à α_{fs}.

30.7.2 Quantum de charge EM–like : prédiction dérivée et lecture SI

Références (labels). Le quantum positif de charge du champ EM–like est défini et fermé dans la partie théorique par (20.51)–(20.52). Cette fermeture consomme le couplage élémentaire $\alpha_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{HSM,LO}}$, fermé par (20.34), ainsi que l'impédance de canal $Z_{\mathrm{EM,ref}}^{(\mathrm{LO})}$, fermée par (20.41) et (20.44). La constante pure de canal $\Phi_{\mathrm{EM}}^{(\mathrm{two})}$ est celle de (29.13), avec la valeur dérivée dans la chaîne (20.37).

Lecture mécanique de la charge EM–like. La fermeture théorique (20.51) donne d'abord une charge de champ dans la normalisation mécanique du canal EM–like :

$$\boxed{Q_{\mathrm{EM},*}^{\mathrm{HSM,LO}} = \left(\frac{4\pi h_{\mathrm{eff}}\, \alpha_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{HSM,LO}}}{Z_{\mathrm{EM,ref}}^{(\mathrm{LO})}} \right)^{1/2}.} \tag{30.45}$$

Cette écriture ne fait intervenir aucune unité électrique externe.

On introduit l'unité mécanique naturelle associée au canal EM–like :

$$\boxed{\mathcal{Q}_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{mec}} := \left(\frac{h_{\mathrm{eff}}}{Z_{\mathrm{EM,ref}}^{(\mathrm{LO})}} \right)^{1/2}.} \tag{30.46}$$

La fermeture devient alors

$$\boxed{Q_{\mathrm{EM},*}^{\mathrm{HSM,LO}} = \sqrt{4\pi\, \alpha_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{HSM,LO}}}\, \mathcal{Q}_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{mec}}.} \tag{30.47}$$

Dimension mécanique. D'après (20.44),

$$Z_{\mathrm{EM,ref}}^{(\mathrm{LO})} = \frac{h_{\mathrm{eff}} c_t}{\ell_0^2}\, \Phi_{\mathrm{EM}}^{(\mathrm{two})}.$$

Ainsi,

$$[Z_{\mathrm{EM,ref}}^{(\mathrm{LO})}] = \left[\frac{h_{\mathrm{eff}} c_t}{\ell_0^2} \right] = MLT^{-2}, \qquad [h_{\mathrm{eff}}] = ML^2T^{-1}.$$

Donc

$$[\mathcal{Q}_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{mec}}] = \left[\frac{h_{\mathrm{eff}}}{Z_{\mathrm{EM,ref}}^{(\mathrm{LO})}} \right]^{1/2} = L^{1/2}T^{1/2}.$$

Dans l'atterrissage observationnel où HSM est identifié à l'univers physique, cette dimension mécanique est la dimension HSM sous-jacente de la charge électrique observée :

$$\boxed{[\mathrm{C}]_{\mathrm{HSM}} = L^{1/2}T^{1/2}.} \tag{30.48}$$

Cette égalité est une identification dimensionnelle dans le cadre HSM–univers ; elle ne signifie pas une égalité numérique brute $1\,\mathrm{C} = 1\,\mathrm{m}^{1/2}\mathrm{s}^{1/2}$.

Valeur numérique dans l'unité mécanique HSM. Avec

$$\alpha_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{HSM,LO}} = 7.2846062 \times 10^{-3} \quad ((30.44)),$$

on obtient

$$\boxed{Q_{\mathrm{EM},*}^{\mathrm{HSM,LO}} = 0.30255\, \mathcal{Q}_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{mec}}.} \tag{30.49}$$

À ce stade, la grandeur n'est pas encore exprimée en coulombs. Elle est exprimée dans l'unité mécanique du canal EM–like.

Lecture observationnelle en coulombs. Dans l'atterrissage observationnel, les identifications

$$h_{\text{eff}} = \hbar, \qquad c_t = c$$

sont celles de §29.3. L'impédance de canal est identifiée à l'impédance observable du vide dans la fermeture de ℓ_0,

$$Z^{(\text{LO})}_{\text{EM,ref}} = Z_0^{\text{obs}}, \tag{30.50}$$

conformément à (29.12)–(29.14). La même fermeture peut alors être lue dans l'unité SI de charge :

$$\boxed{Q^{\text{HSM,LO}}_{\text{EM},*} = \left(\frac{4\pi\hbar\, \alpha^{\text{HSM,LO}}_{\text{EM}}}{Z_0^{\text{obs}}} \right)^{1/2}.} \tag{30.51}$$

La charge élémentaire externe e n'intervient pas dans (30.51). Elle intervient seulement comme référence de comparaison.

Évaluation numérique en unité SI. Avec

$$\alpha^{\text{HSM,LO}}_{\text{EM}} = 7.2846062 \times 10^{-3}, \qquad \hbar = 1.054571817 \times 10^{-34}\ \text{J s}, \qquad Z_0^{\text{obs}} = 376.730313412\ \Omega,$$

il vient

$$\boxed{Q^{\text{HSM,LO}}_{\text{EM},*} = 1.60078 \times 10^{-19}\ \text{C}.} \tag{30.52}$$

Comparaison à la charge élémentaire. La charge élémentaire externe vaut

$$e = 1.602176634 \times 10^{-19}\ \text{C}.$$

Elle n'a pas été consommée dans la fermeture précédente. La comparaison donne

$$\boxed{\frac{Q^{\text{HSM,LO}}_{\text{EM},*}}{e} = 0.999126,} \tag{30.53}$$

et donc

$$\boxed{\frac{Q^{\text{HSM,LO}}_{\text{EM},*} - e}{e} = -8.74 \times 10^{-4}.} \tag{30.54}$$

L'écart relatif est donc

$$-0.0874\%.$$

Statut de la comparaison à e. Le quantum $Q^{\text{HSM,LO}}_{\text{EM},*}$ est une prédiction dérivée du canal EM–like HSM : sa fermeture théorique (30.45) consomme $\alpha^{\text{HSM,LO}}_{\text{EM}}$, h_{eff} et $Z^{(\text{LO})}_{\text{EM,ref}}$, mais ne consomme pas la charge élémentaire observée e. En revanche, une fois la lecture SI effectuée, la comparaison à e est algébriquement liée à la comparaison déjà faite sur $\alpha^{\text{HSM,LO}}_{\text{EM}}$. En effet, la relation SI

$$e^2 = \frac{4\pi\hbar\, \alpha_{\text{fs}}}{Z_0^{\text{obs}}}$$

implique, avant spécialisation des identifications observationnelles,

$$\boxed{\frac{Q^{\text{HSM,LO}}_{\text{EM},*}}{e} = \left[\frac{h_{\text{eff}}}{\hbar}\, \frac{\alpha^{\text{HSM,LO}}_{\text{EM}}}{\alpha_{\text{fs}}}\, \frac{Z_0^{\text{obs}}}{Z^{(\text{LO})}_{\text{EM,ref}}} \right]^{1/2}.} \tag{30.55}$$

Dans l'atterrissage observationnel utilisé ici,

$$h_{\mathrm{eff}} = \hbar, \qquad Z_{\mathrm{EM,ref}}^{(\mathrm{LO})} = Z_0^{\mathrm{obs}},$$

de sorte que

$$\boxed{\frac{Q_{\mathrm{EM},*}^{\mathrm{HSM,LO}}}{e} = \left(\frac{\alpha_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{HSM,LO}}}{\alpha_{\mathrm{fs}}}\right)^{1/2}.} \tag{30.56}$$

La proximité numérique de $Q_{\mathrm{EM},*}^{\mathrm{HSM,LO}}$ à e ne doit donc pas être comptée comme une seconde validation phénoménologique entièrement indépendante après celle de $\alpha_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{HSM,LO}}$. Elle constitue un contrôle de cohérence de la chaîne complète de lecture EM–like :

$$\alpha_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{HSM,LO}}, \qquad Z_{\mathrm{EM,ref}}^{(\mathrm{LO})}, \qquad h_{\mathrm{eff}} \quad \Longrightarrow \quad Q_{\mathrm{EM},*}^{\mathrm{HSM,LO}}.$$

Propagation d'incertitude. La lecture SI (30.51) donne

$$\ln Q_{\mathrm{EM},*}^{\mathrm{HSM,LO}} = \frac{1}{2}\ln \alpha_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{HSM,LO}} - \frac{1}{2}\ln Z_0^{\mathrm{obs}} + \frac{1}{2}\ln(4\pi\hbar).$$

La propagation logarithmique conduit à

$$\boxed{\left(\frac{\sigma_{Q_{\mathrm{EM},*}}}{Q_{\mathrm{EM},*}}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{\sigma_{\alpha_{\mathrm{EM}}}}{\alpha_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{HSM,LO}}}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\sigma_{Z_0}}{Z_0^{\mathrm{obs}}}\right)^2.} \tag{30.57}$$

La constante $\hbar$ est exacte dans la convention SI déclarée. À la précision affichée ici, l'incertitude observationnelle de Z_0^{obs} est sous-dominante devant l'échelle de troncature LO du canal EM–like. Dans la lecture SI retenue, l'écart relatif sur la charge est la moitié de l'écart relatif sur la constante de structure fine :

$$\frac{\delta Q_{\mathrm{EM},*}}{Q_{\mathrm{EM},*}} = \frac{1}{2}\frac{\delta\alpha_{\mathrm{EM}}}{\alpha_{\mathrm{EM}}}.$$

La distance à la valeur de comparaison fournit l'échelle effective

$$\boxed{\delta_Q^{\mathrm{LO}} = 8.74 \times 10^{-4}.} \tag{30.58}$$

La prédiction peut donc être résumée sous la forme

$$\boxed{Q_{\mathrm{EM},*}^{\mathrm{HSM,LO}} = 1.60078 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}, \qquad \delta_Q^{\mathrm{LO}} = 0.0874\%.} \tag{30.59}$$

Anti-circularité et non-double-comptage. La chaîne

$$\alpha_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{HSM,LO}}, \quad Z_{\mathrm{EM,ref}}^{(\mathrm{LO})}, \quad \Phi_{\mathrm{EM}}^{(\mathrm{two})} \quad \Longrightarrow \quad Q_{\mathrm{EM},*}^{\mathrm{HSM,LO}}$$

ne consomme pas e. La charge élémentaire externe intervient uniquement dans les ratios de comparaison (30.53)–(30.54). La grandeur $Q_{\mathrm{EM},*}^{\mathrm{HSM,LO}}$ demeure donc une prédiction dérivée du canal EM–like HSM. En revanche, le bon accord numérique du rapport $Q_{\mathrm{EM},*}^{\mathrm{HSM,LO}}/e$ ne doit pas être présenté comme une validation phénoménologique indépendante de celle de $\alpha_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{HSM,LO}}$, puisque, après les identifications SI (30.50), il se réduit à (30.56).

30.8 NSL 3DOF : sorties numériques avec constantes HSM séparées

Références (labels). La relation tangentielle $c_t^2 = T/\rho$ est donnée par (1.18). La solution NSL 3DOF est définie par §11, avec l'ansatz conique (11.1), le filtre fondamental $q = 1$ (11.3), la loi d'action (11.8), le dénominateur fermé (11.10), la largeur (11.11), et la masse mécanique projetée par branche (11.12). Le spin géométrique de la branche est donné en §11.8.

La charge EM–like du NSL 3DOF est définie dans §21.1.7, avec le label de phase (21.24), la projection conique (21.25), et les branches effectives (21.26).

Les constantes séparées utilisées dans cette évaluation sont celles de la fermeture micro-locale 1–anneau du composé Z^0-like :

$$\kappa_r^{\mathrm{HSM}}, \qquad R_0^{\mathrm{HSM}}, \qquad \rho^{\mathrm{HSM}}, \qquad T^{\mathrm{HSM}}.$$

Elles sont définies en (29.40), (29.34), (29.38) et (29.39).

Statut de la sortie. Cette section ne compare pas un état identifié du modèle standard. Elle donne les sorties numériques internes du canal NSL 3DOF dans la fermeture LO isolée : motif de charge conique, échelle de cœur λ_*, et masses coniques associées aux deux branches

$$\sigma = \sin^2 \alpha \in \left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right\}.$$

La fermeture NSL 3DOF consomme les grandeurs séparées

$$\rho, \qquad T, \qquad \kappa_r.$$

Dans la chaîne active, ces grandeurs sont celles de la séparation micro-locale 1–anneau. Les masses numériques ci-dessous sont donc des sorties internes calculées avec les constantes HSM séparées.

La fermeture NSL 3DOF ne consomme pas le coefficient local radial

$$\kappa_\mu = \frac{\mu_2}{T}.$$

Ce dernier intervient dans d'autres secteurs, mais pas dans la masse NSL 3DOF mono-lobe écrite ici.

Motif NSL 3DOF et absence de paramètre interne. L'état NSL 3DOF correspond à un cœur *mono-lobe*, sans séparation interne δ et sans recouvrement croisé :

$$k = 1, \qquad w = (1) \qquad \text{(motif primitif, à un signe global près).}$$

Les noyaux quadratiques se réduisent donc à

$$S_0 = J_0, \qquad S_2 = J_2.$$

On utilise les deux combinaisons pures

$$K_{\mathrm{NSL}}^{(3D)} = (J_0 + J_2)J_0, \qquad K_0^{(\mathrm{loc})} = J_0^2.$$

Le terme $K_0^{(\mathrm{loc})}$ est un terme local de cœur. Il ne représente pas une auto-induction de gaine.

Charge EM : orientation de phase et amplitude effective conique

Label de phase. Le NSL 3DOF est une solution élémentaire 3DOF, non composée. Son label de charge EM–like n'est donc pas un motif multi-lobe w, mais l'orientation de phase de la rotation tangentielle dans l'ansatz conique :

$$n_{\mathrm{EM}}^{(\mathrm{NSL3})} = \varsigma \in \{-1, +1\},$$

conformément à (21.24). L'inversion $\varsigma \mapsto -\varsigma$ inverse le signe de la charge effective, sans modifier la largeur de cœur ni les masses.

Amplitude effective et rôle de σ. La projection conique de la composante tangentielle circulaire donne

$$\sigma = \sin^2 \alpha \in \left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right\}.$$

La charge effective relative est alors

$$\boxed{q_{\mathrm{eff}}^{(\mathrm{NSL3})}(\sigma) = \sigma \, n_{\mathrm{EM}}^{(\mathrm{NSL3})}.} \tag{30.60}$$

C'est le rappel observationnel de (21.25).

La charge de champ absolue associée à une branche est donc

$$\boxed{Q_{\mathrm{field}}^{(\mathrm{NSL3})}(\sigma) = q_{\mathrm{eff}}^{(\mathrm{NSL3})}(\sigma) \, Q_{\mathrm{EM},*}^{\mathrm{HSM,LO}}.} \tag{30.61}$$

Cette écriture utilise le quantum de charge EM–like évalué en §30.7.2

Pour la branche d'orientation positive $\varsigma = +1$, on obtient

$$q_{\mathrm{eff}}^{(\mathrm{NSL3})}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}, \qquad q_{\mathrm{eff}}^{(\mathrm{NSL3})}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}.$$

Pour l'orientation opposée $\varsigma = -1$, les mêmes branches portent les charges opposées :

$$q_{\mathrm{eff}}^{(\mathrm{NSL3})} \in \left\{ -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, +\frac{1}{3}, +\frac{2}{3} \right\},$$

conformément à (21.26).

Masse NSL 3DOF avec constantes HSM séparées

Fermeture LO isolée. Dans cette section observationnelle, on identifie

$$h_{\mathrm{eff}} = \hbar, \qquad c_t = c.$$

La relation théorique

$$c_t^2 = \frac{T}{\rho}$$

reste la définition du secteur tangent. Dans la présente évaluation, T est donc la valeur séparée déduite de

$$T^{\mathrm{HSM}} = \rho^{\mathrm{HSM}} c^2,$$

et non une entrée indépendante.

La fermeture théorique HSM du canal NSL 3DOF mono-lobe isolé est

$$\boxed{D_{\mathrm{NSL3}}^{(\mathrm{LO})} = \kappa_r^{\mathrm{HSM}} K_{\mathrm{NSL}}^{(3D)}.} \tag{30.62}$$

C'est le rappel de (11.10), évalué avec les constantes HSM séparées. Aucun terme d'auto-induction de gaine n'est ajouté.

La largeur de cœur associée est

$$\boxed{\lambda_*^4 = \frac{2\,\hbar}{\sqrt{\rho^{\mathrm{HSM}}\,T^{\mathrm{HSM}}}\,D_{\mathrm{NSL3}}^{(\mathrm{LO})}}.} \tag{30.63}$$

C'est le rappel de (11.11) après identification $h_{\mathrm{eff}} = \hbar$.

On définit ensuite la masse de référence non projetée par

$$m_{\mathrm{ref}}c^2 = \frac{\hbar c}{\lambda_*}.$$

Dans les tableaux ci-dessous, m_{ref} est exprimé en MeV/c^2, ou équivalemment en MeV dans la convention usuelle des masses de particules. La masse mécanique projetée par branche conique est celle de (11.12) :

$$\boxed{m(\sigma) = \sigma\, m_{\mathrm{ref}}, \qquad \sigma \in \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}.} \tag{30.64}$$

Constantes théoriques et valeurs numériques

Constantes théoriques. Les constantes pures utilisées dans cette évaluation sont

$$J_0 = \frac{\pi^3}{3} = 10.3354255601, \qquad J_2 = 7.6339320582,$$

$$K_{\mathrm{NSL}}^{(3D)} = (J_0 + J_2)J_0.$$

On utilise également

$$h_{\mathrm{eff}} = \hbar, \qquad c_t = c.$$

Constantes HSM séparées. Les valeurs séparées utilisées dans cette section sont celles de §29.9 :

$$\kappa_r^{\mathrm{HSM}} = 0.204743, \qquad R_0^{\mathrm{HSM}} = 1.50841 \times 10^{29}\ \mathrm{m},$$
$$\rho^{\mathrm{HSM}} = 8.10393 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg\,m^{-3}}, \qquad T^{\mathrm{HSM}} = 7.28345 \times 10^{-10}\ \mathrm{Pa}.$$

Ces valeurs résultent de la fermeture micro-locale 1–anneau du composé Z^0-like, cf. (29.34)–(29.40).

Valeurs numériques. La brique numérique est

$$K_{\mathrm{NSL}}^{(3D)} = 185.7209580.$$

Il vient

$$D_{\mathrm{NSL3}}^{(\mathrm{LO})} = \kappa_r^{\mathrm{HSM}} K_{\mathrm{NSL}}^{(3D)} \simeq 38.02506610.$$

On obtient alors

$$\lambda_* = 3.88714 \times 10^{-5}\ \mathrm{m}, \qquad m_{\mathrm{ref}} = 5.07641 \times 10^{-9}\ \mathrm{MeV}.$$

Donc, pour les deux branches coniques,

$$\boxed{m\left(\frac{1}{3}\right) = 1.69214 \times 10^{-9}\ \mathrm{MeV}, \qquad m\left(\frac{2}{3}\right) = 3.38427 \times 10^{-9}\ \mathrm{MeV}.}$$

État	ς	$n_{\mathrm{EM}}^{(\mathrm{NSL3})}$	$q_{\mathrm{eff}}(\frac{1}{3})$	$q_{\mathrm{eff}}(\frac{2}{3})$	λ_* [m]	m_{ref} [MeV]	$m(\frac{1}{3})$ [MeV]	
NSL 3DOF	$+1$	$+1$	$+0.333333$	$+0.666667$	3.88714×10^{-5}	5.07641×10^{-9}	1.69214×10^{-9}	3
NSL 3DOF	-1	-1	-0.333333	-0.666667	3.88714×10^{-5}	5.07641×10^{-9}	1.69214×10^{-9}	3

Conventions de signe. L'inversion de l'orientation tangentielle

$$\varsigma \mapsto -\varsigma$$

change le signe de $n_{\mathrm{EM}}^{(\mathrm{NSL3})}$, donc celui de l'amplitude effective $q_{\mathrm{eff}}^{(\mathrm{NSL3})}$, sans modifier λ_* ni les masses.

Portée de l'évaluation. Les masses numériques affichées dans cette section sont des sorties internes du canal NSL 3DOF obtenues avec les constantes HSM séparées par la fermeture micro-locale 1–anneau. Elles ne correspondent pas à une identification directe à un état observé du modèle standard.

Dans la stratégie retenue en §29.2.1, aucune incertitude propagée n'est affichée localement pour

$$\lambda_*, \qquad m_{\mathrm{ref}}, \qquad m(\sigma), \qquad q_{\mathrm{eff}}^{(\mathrm{NSL3})}(\sigma) = \sigma\, n_{\mathrm{EM}}^{(\mathrm{NSL3})}.$$

Les amplitudes de charge effectives sont fixées par la projection conique de (21.25) et par le label d'orientation (21.24). Elles ne portent pas d'incertitude locale à ce rang. L'incertitude structurelle dominante n'est pas une erreur numérique locale : elle vient du statut de fermeture micro-locale 1–anneau des valeurs

$$\kappa_r^{\mathrm{HSM}}, \qquad \rho^{\mathrm{HSM}}, \qquad T^{\mathrm{HSM}}.$$

30.9 Breathers 3DOF : diagnostic de fermeture et masses avec constantes HSM séparées

Références (labels). La relation tangentielle $c_t^2 = T/\rho$ est donnée par (1.18). La branche breather 3DOF en recouvrement fort est définie en §28.5. Le spin géométrique de cette branche est donné en §28.5. Les recouvrements translationnels 3D sont définis par (28.33). Les formes quadratiques S_p, la réduction quartique pair–à–pair et le numérateur fort–like sont définis par (28.34), (28.35), (28.36) et (28.37).

Les impédances réduites $\beta^{(\mathsf{P})}$, $\beta^{(\mathsf{F})}$, puis $\beta^{(\mathrm{eff})}$, sont définies par (28.40) et (28.41). Le dénominateur de fermeture breather est (28.42), sa correction de gaine LO+ est (28.43), et le lien entre largeur et fermeture est (28.44). Le principe variationnel est justifié par l'énergie structurale (28.45).

Les spécialisations Br2, Br3 neutre et Br3 chargé-like sont données par (28.47)–(28.58), (28.60)–(28.71) et (28.74)–(28.85). La coupure géométrique commune de fort recouvrement est fixée par (27.10), (27.12), (27.13), (27.15), (27.16) et (27.17). La procédure numérique reproductible est résumée en §28.5.4, avec (28.88), (28.89) et (28.90).

Le diagnostic de charge réduite est défini par le label monopolaire (28.91), le facteur de forme breather (28.92), et la charge réduite (28.93). La constante de Préclusion Γ_{P} est définie en (20.59) et évaluée en (20.60). Le facteur fort–like 3DOF ζ_{3D} est défini en (27.28) et évalué en (27.33). La constante de gaine utilisée au LO+ est celle de (23.51).

Les constantes séparées κ_r, ρ, T utilisées ci-dessous sont celles de la fermeture micro-locale 1–anneau du composé Z^0-like :

$$\kappa_r^{\mathrm{HSM}}, \qquad R_0^{\mathrm{HSM}}, \qquad \rho^{\mathrm{HSM}}, \qquad T^{\mathrm{HSM}}.$$

Elles sont définies en (29.40), (29.34), (29.38) et (29.39).

Statut de la section. Cette section donne le diagnostic numérique des branches breather 3DOF avec les constantes HSM séparées par la fermeture micro-locale 1–anneau. Les valeurs qui dépendent de

$$\kappa_r^{\mathrm{HSM}}, \qquad \rho^{\mathrm{HSM}}, \qquad T^{\mathrm{HSM}}$$

sont donc des sorties internes de la chaîne HSM séparée.

Une branche à fort recouvrement est promue comme solution stationnaire interne au rang LO seulement si la minimisation de son dénominateur de fermeture sélectionne un minimum intérieur :

$$\delta_* \in (\delta_{\min}, \delta_{\max}).$$

Si la minimisation sélectionne un bord du domaine admissible positif, la branche est classée comme branche de bord et n'est pas utilisée comme prédiction fermée de masse au rang LO.

Dans cette partie observationnelle, on identifie

$$h_{\mathrm{eff}} = \hbar, \qquad c_t = c.$$

La relation théorique

$$c_t^2 = \frac{T}{\rho}$$

reste la définition du secteur tangent ; la valeur de T utilisée ci-dessous est donc déduite de ρc^2, et non introduite comme une entrée indépendante.

Cadre massique. On pose

$$\omega_{0,*} = \frac{c_t}{\lambda_*}, \qquad \omega_{\mathrm{br},*} = \sigma\,\omega_{0,*}, \qquad \sigma \in \Big\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\Big\}.$$

La masse 3DOF d'une branche breather unitaire est donc

$$\boxed{m(\sigma) = \frac{E_0}{c_t^2} = \frac{\hbar\,\omega_{\mathrm{br},*}}{c_t^2} = \frac{\hbar\,\sigma}{c_t\,\lambda_*}, \qquad \sigma \in \Big\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\Big\}.} \tag{30.65}$$

Cette équation est le rappel observationnel de (28.90), après identification $h_{\mathrm{eff}} = \hbar$ et $c_t = c$.

Constantes numériques actives. Les constantes pures utilisées dans cette évaluation sont

$$J_0 = \frac{\pi^3}{3} = 10.3354255601, \qquad J_2 = 7.6339320582, \qquad J_4 = 2.70149350195,$$

$$K_0^{(Z)} = J_0^2, \qquad K_2^{(Z)} = J_0 J_2,$$

$$\Gamma_{\mathrm{P}} = 0.1011596206, \qquad \zeta_{3D} = \frac{15}{8} = 1.875, \qquad \Gamma_{\mathrm{shape}}^{(\mathrm{LO})} = 2.04629 \times 10^{-4}.$$

Avec les constantes HSM séparées de §29.9, on utilise

$$\kappa_r^{\mathrm{HSM}} = 0.204743,$$

$$R_0^{\mathrm{HSM}} = 1.50841{\times}10^{29}\ \mathrm{m}, \qquad \rho^{\mathrm{HSM}} = 8.10393{\times}10^{-27}\ \mathrm{kg\,m^{-3}}, \qquad T^{\mathrm{HSM}} = 7.28345{\times}10^{-10}\ \mathrm{Pa}.$$

Bornes géométriques de la fenêtre breather. La coupure forte–recouvrement est imposée par la fenêtre MSE 3DOF :

$$u_*^\star = 1.8782600799\ldots, \qquad \boxed{\delta_{\max} = \frac{u_*^\star}{2} = 0.93913003995\ldots}$$

La borne basse est fixée par la non–dégénérescence quantitative du Gram, avec seuil $\Gamma_{\mathrm{shape}}^{(\mathrm{LO})}$. Avec les recouvrements translationnels 3D, on obtient

$$\boxed{\delta_{\min}^{\mathrm{Br2}} = 0.02883050, \qquad \delta_{\min}^{\mathrm{Br3}} = 2\,\delta_{\min}^{\mathrm{Br2}} = 0.05766101.}$$

Fermetures LO et LO+. On ferme les échelles par

$$\lambda^4_{*,\mathrm{LO}} = \frac{2\,\hbar\,\sqrt{\rho^{\mathrm{HSM}} T^{\mathrm{HSM}}}}{\mathcal{D}_{\mathrm{LO}}(\delta_*)}, \qquad \lambda^4_{*,\mathrm{LO+}} = \frac{2\,\hbar\,\sqrt{\rho^{\mathrm{HSM}} T^{\mathrm{HSM}}}}{\mathcal{D}_{\mathrm{LO+}}(\delta_*)}.$$

La correction de gaine est additive :

$$\mathcal{D}_{\mathrm{LO+}} = \mathcal{D}_{\mathrm{LO}} + \Gamma^{(\mathrm{LO})}_{\mathrm{shape}} K_0^{(Z)}.$$

Le terme additif vaut

$$\Gamma^{(\mathrm{LO})}_{\mathrm{shape}} K_0^{(Z)} = 2.04629 \times 10^{-4}\, J_0^2 \simeq 0.02185867881.$$

Diagnostic numérique des branches

Modes considérés. On distingue trois réductions canoniques :

$$\text{Br2} : \bar{w}_{\mathrm{Br2}} = (1,-1), \qquad \text{Br3 neutre} : \bar{w}_{\mathrm{Br3,n}} = (1,-2,1), \qquad \text{Br3 chargé-like} : \bar{w}_{\mathrm{Br3,c}} = (1,-1,1).$$

Chaque mode spatial fermé donnerait deux masses, pour

$$\sigma = \frac{1}{3} \qquad \text{et} \qquad \sigma = \frac{2}{3}.$$

Résultat du diagnostic de fermeture. L'application du critère de fermeture interne avec les constantes HSM séparées donne :

branche	δ_*	position du minimum	statut LO
Br2	0.38410	bord du domaine positif	bord LO
Br3, n	0.22203	bord du domaine positif	bord LO
Br3, c	0.47403	minimum intérieur	fermée LO

Les deux branches neutres Br2 et Br3,n atteignent l'infimum du dénominateur au bord du domaine admissible positif. Elles ne sont donc pas promues comme solutions stationnaires internes au rang LO. La branche Br3,c présente en revanche un minimum intérieur et passe le critère de fermeture avec les constantes HSM séparées.

Invariants Br3 chargé-like au point optimal. Pour $\bar{w}_{\mathrm{Br3,c}} = (1,-1,1)$ à

$$\delta_*^{\mathrm{Br3,c}} = 0.47403,$$

on obtient

$$S_0^{\mathrm{Br3,c}} \simeq 9.33579, \qquad S_2^{\mathrm{Br3,c}} \simeq 6.11656,$$

$$S_{4,\mathrm{pair}}^{\mathrm{Br3,c}} \simeq 42.09498, \qquad N_{\mathsf{F}}^{\mathrm{Br3,c}} \simeq 7.01584.$$

Les invariants réduits correspondants sont

$$\widehat{s}_2^{\mathrm{Br3,c}} \simeq 0.65518, \qquad \widehat{s}_{4,\mathrm{pair}}^{\mathrm{Br3,c}} \simeq 0.48296, \qquad \widehat{n}_{\mathsf{F}}^{\mathrm{Br3,c}} \simeq 0.75151.$$

Masse de la branche fermée

Branche Br3 chargé-like. Pour la branche Br3,c, le dénominateur au minimum intérieur recalculé avec les constantes HSM séparées vaut

$$\mathcal{D}_{\mathrm{LO}}^{\mathrm{Br3,c}} \simeq 7.86358, \qquad \mathcal{D}_{\mathrm{LO+}}^{\mathrm{Br3,c}} \simeq 7.88544.$$

Il vient

$$\lambda_{*,\mathrm{LO}}^{\mathrm{Br3,c}} \simeq 8.98463 \times 10^{-14}\ \mathrm{m}, \qquad \lambda_{*,\mathrm{LO+}}^{\mathrm{Br3,c}} \simeq 8.97841 \times 10^{-14}\ \mathrm{m}.$$

La masse de référence non projetée en σ vaut

$$m_{\mathrm{ref,LO+}}^{\mathrm{Br3,c}} = \frac{\hbar}{c\,\lambda_{*,\mathrm{LO+}}^{\mathrm{Br3,c}}} \simeq 2.19779\ \mathrm{MeV}.$$

Donc

$$\boxed{m_{\mathrm{LO+}}^{\mathrm{Br3,c}}\left(\frac{1}{3}\right) \simeq 0.73260\ \mathrm{MeV}, \qquad m_{\mathrm{LO+}}^{\mathrm{Br3,c}}\left(\frac{2}{3}\right) \simeq 1.46520\ \mathrm{MeV}.}$$

Tableau principal.

branche	δ_*	statut	$\lambda_{*,\mathrm{LO+}}$ [m]	$m_{\mathrm{LO+}}(\frac{1}{3})$ [MeV]
Br2	0.38410	bord / non fermée LO	$--$	$--$
Br3, n	0.22203	bord / non fermée LO	$--$	$--$
Br3, c	0.47403	fermée LO	8.97841×10^{-14}	0.73260

Pour $\sigma = 2/3$, la masse Br3,c est doublée :

$$m_{\mathrm{LO+}}^{\mathrm{Br3,c}}\left(\frac{2}{3}\right) \simeq 1.46520\ \mathrm{MeV}.$$

Lecture des branches de bord. Les branches Br2 et Br3,n ne sont pas supprimées de la théorie : elles restent des branches admissibles de la construction formelle. Toutefois, avec les constantes HSM séparées, leur minimisation LO sélectionne le bord du domaine positif. Elles ne fournissent donc pas de masse prédictive fermée au rang LO. Les valeurs de masse que l'on pourrait obtenir en forçant l'évaluation de bord ne sont pas affichées comme prédictions.

Diagnostic de charge EM réduite

Label monopolaire. En recouvrement fort, la charge de champ réduite n'est pas obtenue par addition de charges observables de bumps isolés. Elle est reconstruite à partir du motif entier brut $\bar{w}$, avant normalisation par S_0. On utilise le label monopolaire

$$n_{\mathrm{EM}}(\bar{w}) = \sum_i \bar{w}_i,$$

défini en (28.91). Pour les trois motifs canoniques :

$$n_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{Br2}} = 1 - 1 = 0, \qquad n_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{Br3,n}} = 1 - 2 + 1 = 0, \qquad n_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{Br3,c}} = 1 - 1 + 1 = 1.$$

Les deux branches neutres sont donc nulles au rang monopolaire :

$$q_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{Br2}} = 0, \qquad q_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{Br3,n}} = 0.$$

Charge réduite de la branche Br3,c. Pour la réduction Br3,c au minimum intérieur recalculé, le facteur de forme réduit donne

$$\frac{\mathcal{C}_S^{(\mathrm{br})}(\bar{w}_{\mathrm{Br3,c}};\delta_*^{\mathrm{Br3,c}})}{\mathcal{C}_S^{(\mathrm{bump})}} \simeq 1.09675.$$

La charge réduite de branche est alors

$$q_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{Br3,c}}(\sigma) = \sigma\,\frac{\mathcal{C}_S^{(\mathrm{br})}(\bar{w}_{\mathrm{Br3,c}};\delta_*^{\mathrm{Br3,c}})}{\mathcal{C}_S^{(\mathrm{bump})}}.$$

Pour les deux projections coniques,

$$q_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{Br3,c}}\left(\frac{1}{3}\right) \simeq 0.36558, \qquad q_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{Br3,c}}\left(\frac{2}{3}\right) \simeq 0.73117.$$

Ces valeurs sont des amplitudes EM réduites de branche ; elles ne constituent pas une identification directe à une particule établie.

Charge de champ associée. Le quantum élémentaire de charge du champ EM–like est $Q_{\mathrm{EM},*}^{\mathrm{HSM,LO}}$, évalué en §30.7.2. La charge de champ de la branche Br3,c est donc

$$\boxed{Q_{\mathrm{field}}^{\mathrm{Br3,c}}(\sigma) = q_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{Br3,c}}(\sigma)\,Q_{\mathrm{EM},*}^{\mathrm{HSM,LO}}.} \tag{30.66}$$

Ainsi, en unité native du canal EM–like,

$$\boxed{Q_{\mathrm{field}}^{\mathrm{Br3,c}}\left(\frac{1}{3}\right) \simeq 0.36558\,Q_{\mathrm{EM},*}^{\mathrm{HSM,LO}}, \qquad Q_{\mathrm{field}}^{\mathrm{Br3,c}}\left(\frac{2}{3}\right) \simeq 0.73117\,Q_{\mathrm{EM},*}^{\mathrm{HSM,LO}}.} \tag{30.67}$$

Avec la lecture observationnelle de (30.52), ces valeurs correspondent à

$$Q_{\mathrm{field}}^{\mathrm{Br3,c}}\left(\frac{1}{3}\right) \simeq 5.85\times10^{-20}\ \mathrm{C}, \qquad Q_{\mathrm{field}}^{\mathrm{Br3,c}}\left(\frac{2}{3}\right) \simeq 1.17\times10^{-19}\ \mathrm{C}.$$

Les valeurs entre parenthèses en coulombs ne définissent pas la charge de branche ; elles donnent seulement la lecture SI de la charge native HSM.

Tableau des charges réduites.

branche	δ_*	n_{EM}	$q_{\mathrm{eff}}(\frac{1}{3})$	$q_{\mathrm{eff}}(\frac{2}{3})$
Br2	0.38410	0	0	0
Br3, n	0.22203	0	0	0
Br3, c	0.47403	1	0.36558	0.73117

Portée de l'évaluation. Les masses numériques affichées dans cette section sont les sorties de la fermeture breather 3DOF évaluée avec les constantes HSM séparées par la fermeture micro-locale 1–anneau. Elles dépendent donc des constantes

$$\kappa_r^{\mathrm{HSM}}, \qquad \rho^{\mathrm{HSM}}, \qquad T^{\mathrm{HSM}},$$

définies en (29.40), (29.38) et (29.39).

Dans la stratégie retenue en §29.2.1, aucune incertitude propagée n'est affichée localement pour

$$\lambda_*, \qquad m(\sigma), \qquad q_{\mathrm{eff}}^{(\mathrm{br})}(\bar{w};\delta_*,\sigma).$$

Les incertitudes numériques de quadrature et de racine sont négligeables à la précision affichée ; l'incertitude structurale dominante est celle de la fermeture micro-locale 1–anneau et du statut de fermeture interne des branches.

30.10 Z-like 3DOF (Z2, Z3) : diagnostic de fermeture avec constantes HSM séparées

Références (labels). La famille Z-like 3DOF multi-lobes est définie en §28.6. La jauge de normalisation est donnée par (28.94), et le passage du motif entier brut au représentant normalisé par (28.95). Les recouvrements croisés sont ceux définis par convolution translationnelle 3D en (28.33). Les formes multi-lobes S_p, $S_{4,\mathrm{pair}}$, la règle $c_{ij}^{(\mathsf{F})}$ et le numérateur fort-like N_{F} sont donnés par (28.34), (28.35), (28.36) et (28.37). Les invariants réduits Z-like sont définis par (28.97).

Les impédances de canal et le dénominateur commun sont donnés par (28.99) et (28.101). La correction LO+ est donnée par (28.103). La fermeture de largeur est implicite, via (28.98), (28.102) et (28.104). La constante de Préclusion Γ_{P} est définie en (20.59) et évaluée en (20.60). Le facteur fort-like 3DOF ζ_{3D} est défini en (27.28) et évalué en (27.33). La constante de gaine est celle de (23.51).

La règle de charge discrète est (28.105), et la charge réduite est définie par (28.123) et (28.124). Les spécialisations Z2 et Z3 sont données par §28.6.6 et §28.6.7, avec les fermetures (28.110), (28.111), (28.115), (28.118), (28.119) et (28.122). Les domaines admissibles des séparations sont bornés par la coupure géométrique commune définie en (27.10), (27.12), (27.13), (27.15), (27.16) et (27.17). Les séparations δ_* sont ensuite définies par les minimisations sur domaines admissibles positifs, comme en (28.113) pour Z2 et dans la définition correspondante de la branche Z3. Le spin géométrique de la famille est rappelé en §28.6.5.

Les constantes séparées utilisées dans le diagnostic numérique sont celles de la fermeture micro-locale 1–anneau du composé Z^0-like :

$$\kappa_r^{\mathrm{HSM}}, \qquad R_0^{\mathrm{HSM}}, \qquad \rho^{\mathrm{HSM}}, \qquad T^{\mathrm{HSM}}.$$

Elles sont définies en (29.40), (29.34), (29.38) et (29.39). Le coefficient radial local

$$\kappa_\mu = \frac{\mu_2}{T}$$

reste une constante calibrée indépendante de cette séparation globale.

Statut de la section. Cette section applique le critère d'existence dérivé dans la partie théorique. Une branche Z-like 3DOF fournit une solution stationnaire interne au rang LO uniquement si la minimisation de son dénominateur de fermeture sélectionne un minimum intérieur :

$$\delta_* \in (\delta_{\min}, \delta_{\max}).$$

Si la minimisation sélectionne un bord,

$$\delta_* = \delta_{\min} \qquad \text{ou} \qquad \delta_* = \delta_{\max},$$

la branche est identifiée comme branche de bord. Dans ce cas, la fermeture de largeur associée au minimum intérieur ne s'applique pas, et aucune masse de solution stationnaire interne n'est reportée.

Fermeture implicite. Dans cette partie observationnelle, on identifie

$$h_{\mathrm{eff}} = \hbar, \qquad c_t = c.$$

La fermeture Z-like 3DOF utilise le paramètre réduit

$$\eta_\mu^{(Z)}(\lambda_*) = \frac{\kappa_\mu}{\kappa_r^{\mathrm{HSM}}}\lambda_*^2.$$

Avec $c_t^2 = T/\rho$, la fermeture LO+ s'écrit

$$\boxed{\lambda_*^4\, D_{\mathrm{LO+}}^{(Zk)}\Big(\bar{w};\delta_*(\eta_\mu^{(Z)}(\lambda_*));\eta_\mu^{(Z)}(\lambda_*)\Big) = 2\,\hbar\sqrt{\rho^{\mathrm{HSM}}T^{\mathrm{HSM}}}.} \tag{30.68}$$

Cette équation est le rappel observationnel de (28.104), après identification $h_{\mathrm{eff}} = \hbar$. Elle produit une masse de branche uniquement lorsque le diagnostic de δ_* sélectionne un minimum intérieur.

Borne MSE et bornes basses. La borne haute commune du domaine de fort recouvrement est

$$u_*^\star = 1.8782600799\ldots, \qquad \delta_{\max} = \frac{u_*^\star}{2} = 0.93913003995\ldots.$$

Les bornes basses sont celles du problème de Gram correspondant :

$$\delta_{\min}^{\mathrm{Z2}} = \delta_{\min}^{\mathrm{Br2}}, \qquad \delta_{\min}^{\mathrm{Z3}} = \delta_{\min}^{\mathrm{Br3}}.$$

Dans le diagnostic numérique, on utilise

$$\delta_{\min}^{\mathrm{Z2}} = 0.02883050, \qquad \delta_{\min}^{\mathrm{Z3}} = 0.05766101.$$

Motifs testés. Les motifs canoniques testés sont

$$\bar{w}_{\mathrm{Z2}} = (1,-1), \qquad \bar{w}_{\mathrm{Z3,n}} = (1,-2,1), \qquad \bar{w}_{\mathrm{Z3,c}} = (1,-1,1).$$

Les deux premiers motifs sont neutres au rang monopolaire :

$$n_{\mathrm{EM}}(\bar{w}_{\mathrm{Z2}}) = 0, \qquad n_{\mathrm{EM}}(\bar{w}_{\mathrm{Z3,n}}) = 0,$$

tandis que le motif chargé-like vérifie

$$n_{\mathrm{EM}}(\bar{w}_{\mathrm{Z3,c}}) = 1.$$

Constantes numériques actives

Constantes théoriques. Les constantes pures utilisées dans cette évaluation sont

$$J_0 = \frac{\pi^3}{3} = 10.3354255601, \qquad J_2 = 7.6339320582, \qquad J_4 = 2.70149350195,$$

$$K_0^{(Z)} = J_0^2, \qquad K_2^{(Z)} = J_0 J_2.$$

On utilise également

$$\Gamma_{\mathrm{P}} = 0.1011596206, \qquad \zeta_{3D} = \frac{15}{8} = 1.875, \qquad \Gamma_{\mathrm{shape}}^{(\mathrm{LO})} = 2.04629\times10^{-4}.$$

Constantes HSM séparées. Avec les constantes HSM séparées de §29.9, on utilise

$$\kappa_r^{\mathrm{HSM}} = 0.204743,$$

$R_0^{\mathrm{HSM}} = 1.50841\times10^{29}\,\mathrm{m}$, $\rho^{\mathrm{HSM}} = 8.10393\times10^{-27}\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, $T^{\mathrm{HSM}} = 7.28345\times10^{-10}\,\mathrm{Pa}$.

Le coefficient local radial utilisé est Le coefficient local radial utilisé est

$$\kappa_\mu \simeq 6.25\times10^{34}\ \mathrm{m}^{-2}.$$

Le paramètre réduit utilisé dans la fermeture Z-like est donc

$$\eta_\mu^{(Z)}(\lambda_*) = \frac{\kappa_\mu}{\kappa_r^{\mathrm{HSM}}}\lambda_*^2.$$

Diagnostic de fermeture

Résolution du diagnostic. Pour chaque motif, on minimise $D_{\mathrm{LO}}^{(Zk)}$ sur le domaine admissible positif avec les constantes HSM séparées. Le critère de fermeture intérieure est strict : une branche fournit une solution stationnaire interne au rang LO uniquement si le minimum sélectionné est intérieur,

$$\delta_* \in (\delta_{\min}, \delta_{\max}).$$

Lorsque le minimum est atteint sur un bord, l'équation implicite de largeur associée au minimum intérieur n'est pas utilisée pour produire une masse de branche. Le diagnostic classe alors le motif comme branche de bord au rang LO.

Résultat du diagnostic avec constantes HSM séparées. Les trois minimisations sélectionnent un bord du domaine admissible :

branche	δ_*	bord sélectionné	statut LO
Z2	0.93913004	$\delta_{\max}$	bord LO
Z3, n	0.93913004	$\delta_{\max}$	bord LO
Z3, c	0.05766101	$\delta_{\min}$	bord LO

Aucune des trois branches testées ne sélectionne un minimum intérieur. Le diagnostic ne produit donc aucune masse Z-like 3DOF associée à une solution stationnaire interne au rang LO avec les constantes HSM séparées.

Conséquence pour les branches Z-like 3DOF. Comme les trois minimisations sélectionnent un bord du domaine admissible, les branches correspondantes ne satisfont pas le critère de solution stationnaire interne au rang LO. Au rang LO actif, le diagnostic classe donc les motifs Z2, Z3,n et Z3,c comme branches de bord avec les constantes HSM séparées.

Conséquence pour les masses. Aucune masse n'est affichée pour les branches Z-like 3DOF dans cette section, car les trois diagnostics aboutissent à un bord du domaine admissible. Une masse est reportée uniquement lorsque la minimisation sélectionne un minimum intérieur et fournit ainsi une solution stationnaire interne au rang LO.

Conséquence pour la charge EM. La règle de charge reste définie par le label monopolaire

$$n_{\mathrm{EM}}(\bar{w}) = \sum_i \bar{w}_i.$$

Pour les motifs Z-like testés ici, les charges effectives $q_{\mathrm{eff}}^{(Z)}$ sont donc lues comme diagnostics de motifs. Elles ne sont pas associées à des masses de solutions stationnaires internes, puisque le critère de fermeture intérieure sélectionne un bord du domaine admissible.

Portée de l'évaluation. La présente section conclut que les branches Z-like 3DOF testées sont des branches de bord avec les constantes HSM séparées. Elles restent des motifs multi-lobes admissibles dans la construction théorique, mais ne satisfont pas, dans le présent diagnostic, le critère de solution stationnaire interne au rang LO. Le résultat publié par cette section est donc le diagnostic de bord des motifs Z2/Z3 testés, et non une prédiction de masse Z-like 3DOF.

30.11 Canal faible–like : valorisation numérique minimale des interactions monopolaires W–like et Z^0–like avec constantes HSM séparées

Références (labels). La relation tangentielle $c_t^2 = T/\rho$ est donnée par (1.18). La lecture statique minimale du canal faible–like est définie en §20.5.7. La force ponctuelle entre deux sources NSL est donnée par (20.81), la portée locale par (20.82), et la forme simplifiée par (20.83).

Les constantes séparées utilisées dans cette évaluation sont celles de la fermeture micro-locale 1–anneau du composé Z^0-like :

$$R_0^{\mathrm{HSM}}, \qquad \rho^{\mathrm{HSM}}, \qquad T^{\mathrm{HSM}}, \qquad \kappa_r^{\mathrm{HSM}}.$$

Elles sont définies en (29.34), (29.38), (29.39) et (29.40). Le coefficient local radial κ_μ est calibré en §29.5, avec la combinaison réduite (29.9), la largeur (29.10) et la valeur physique (29.11). La valeur structurelle du facteur fréquentiel local NSL

$$\chi_\omega^{(\mathrm{NSL})} = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

est donnée par (6.119).

Cadre. On utilise ici la lecture statique minimale du canal faible–like fixée dans la fermeture théorique : médiateur radial $\Phi_W \equiv r$, constante

$$g_W = \frac{2}{\kappa_r R_0^3},$$

charge de branche NSL

$$\pm\, 8\pi\, \chi_\omega^{(\mathrm{NSL})}\, R_0^2\, \sqrt{\rho T},$$

et longueur caractéristique

$$\ell_W = \sqrt{\frac{T\kappa_r}{\mu_2}} = \sqrt{\frac{\kappa_r}{\kappa_\mu}}.$$

La relation $T/\rho = c^2$ est utilisée dans l'évaluation observationnelle.

Statut des quantités numériques. Dans la chaîne active, les grandeurs séparées

$$R_0, \qquad \rho, \qquad T, \qquad \kappa_r$$

sont celles de la séparation micro-locale 1–anneau :

$$R_0^{\mathrm{HSM}}, \qquad \rho^{\mathrm{HSM}}, \qquad T^{\mathrm{HSM}}, \qquad \kappa_r^{\mathrm{HSM}}.$$

Les valeurs affichées dans cette sous-section sont donc des valorisations numériques du canal faible–like avec les constantes HSM séparées.

Constantes numériques actives. On utilise

$$\kappa_r^{\mathrm{HSM}} = 0.204743,$$

$$R_0^{\mathrm{HSM}} = 1.50841{\times}10^{29}\ \mathrm{m}, \qquad \rho^{\mathrm{HSM}} = 8.10393{\times}10^{-27}\ \mathrm{kg\,m^{-3}}, \qquad T^{\mathrm{HSM}} = 7.28345{\times}10^{-10}\ \mathrm{Pa}.$$

Pour le coefficient local radial, on utilise la valeur issue du calibrage faible–like 2DOF :

$$\kappa_\mu \simeq 6.25 \times 10^{34}\ \mathrm{m}^{-2},$$

voir (29.11). Avec

$$\lambda_{\mathrm{NSL}} = 2.454956896 \times 10^{-18}\ \mathrm{m}.$$

Enfin, pour la branche NSL chargée considérée ici, on utilise la valeur structurelle

$$\chi_\omega^{(\mathrm{NSL})} = \sqrt{\frac{1}{3}} \simeq 0.57735.$$

Valeurs numériques déduites. Il vient

$$\boxed{g_W = \frac{2}{\kappa_r^{\mathrm{HSM}} (R_0^{\mathrm{HSM}})^3} \simeq 2.84618 \times 10^{-87}.} \tag{30.69}$$

La charge de branche vaut

$$\boxed{q_W^{(W)} = 8\pi\, \chi_\omega^{(\mathrm{NSL})} (R_0^{\mathrm{HSM}})^2 \sqrt{\rho^{\mathrm{HSM}} T^{\mathrm{HSM}}} \simeq 8.02111 \times 10^{41}.} \tag{30.70}$$

La portée faible–like minimale est

$$\boxed{\ell_W = \sqrt{\frac{\kappa_r^{\mathrm{HSM}}}{\kappa_\mu}} \simeq 1.81032 \times 10^{-18}\ \mathrm{m}.} \tag{30.71}$$

Le coefficient de force vaut donc

$$\boxed{\frac{g_W^2 [q_W^{(W)}]^2}{4\pi} \simeq 4.14748 \times 10^{-91}.} \tag{30.72}$$

Largeur propre de la source NSL. On utilise la largeur propre de la branche NSL 2DOF chargée au repos, calibrée par m_W,

$$\boxed{\lambda_{\mathrm{NSL}} = 2.454956896 \times 10^{-18}\ \mathrm{m}.} \tag{30.73}$$

On a numériquement

$$\lambda_{\mathrm{NSL}} \simeq 2.45496 \times 10^{-18}\ \mathrm{m}, \qquad \ell_W \simeq 1.81032 \times 10^{-18}\ \mathrm{m},$$

d'où

$$\frac{\lambda_{\mathrm{NSL}}}{\ell_W} \simeq 1.35609.$$

Les deux échelles sont donc du même ordre au rang LO. La forme de Yukawa doit être conservée dans l'évaluation numérique : il n'y a pas de régime de portée faible quasi constante sur plusieurs largeurs de source.

Interaction monopolaire W–like. Pour deux sources NSL 2DOF au repos de même orientation interne, la force statique minimale s'écrit

$$\boxed{F_W^{(\mathrm{NSL,NSL})}(R) = -\,4.14748 \times 10^{-91}\, \frac{e^{-R/(1.81032\times10^{-18})}}{R^2} \left(1 + \frac{R}{1.81032 \times 10^{-18}}\right),} \tag{30.74}$$

où R est exprimé en mètres et F_W en newtons.

Valeurs caractéristiques à l'échelle de la source. On évalue cette force pour des séparations de l'ordre de quelques largeurs propres λ_{NSL}. Comme

$$\frac{\lambda_{\mathrm{NSL}}}{\ell_W} \simeq 1.35609,$$

le facteur de Yukawa est significatif dès $R \simeq 2\lambda_{\mathrm{NSL}}$ et la décroissance est rapide :

$$\boxed{F_W^{(\mathrm{NSL,NSL})}(2\lambda_{\mathrm{NSL}}) \simeq -\,4.24 \times 10^{-57}\ \mathrm{N}.} \tag{30.75}$$

$$\boxed{F_W^{(\mathrm{NSL,NSL})}(5\lambda_{\mathrm{NSL}}) \simeq -\,2.43 \times 10^{-59}\ \mathrm{N}.} \tag{30.76}$$

$$\boxed{F_W^{(\mathrm{NSL,NSL})}(10\lambda_{\mathrm{NSL}}) \simeq -\,1.29 \times 10^{-62}\ \mathrm{N}.} \tag{30.77}$$

Interaction monopolaire Z^0–like. Au niveau monopolaire minimal, le Z^0–like est globalement neutre dans le canal faible–like. On a donc

$$\boxed{q_W^{(\mathsf{Z}^0)} = 0,} \tag{30.78}$$

et par suite

$$\boxed{F_W^{\mathrm{mono}}(\mathsf{Z}^0, \mathsf{Z}^0) = 0.} \tag{30.79}$$

Portée de l'évaluation. Les valeurs numériques affichées dans cette sous-section sont conditionnées par la fermeture micro-locale 1–anneau qui sépare

$$R_0^{\mathrm{HSM}}, \qquad \rho^{\mathrm{HSM}}, \qquad T^{\mathrm{HSM}}, \qquad \kappa_r^{\mathrm{HSM}}.$$

Le coefficient κ_μ est fourni indépendamment par le calibrage faible–like 2DOF via $\kappa_\mu \lambda_{\mathrm{NSL}}^2$ et λ_{NSL}. Une modification ultérieure de la fermeture micro-locale 1–anneau modifierait les valeurs absolues de g_W, q_W, ℓ_W et des forces, sans modifier la structure analytique de la force monopolaire.

Conclusion. Dans la lecture statique minimale actuelle du canal faible–like, la branche NSL 2DOF porte une interaction monopolaire non nulle mais extrêmement faible, même à des séparations de l'ordre de quelques largeurs propres λ_{NSL}. La forme de Yukawa doit être conservée puisque $\lambda_{\mathrm{NSL}}/\ell_W \simeq 1.36$. Le Z^0–like est neutre au niveau monopolaire.

30.12 Synthèse finale : prédictions et sorties théoriques

Cette section rassemble les sorties numériques principales de la partie observationnelle. La synthèse détaillée des calibrages n'est pas répétée ici : elle a été donnée dans les sections de calibrage correspondantes.

On distingue deux statuts :

— les prédictions directement comparables à des observables établies, qui ne dépendent pas de la séparation globale (R_0, ρ, T, κ_r) ;

— les sorties théoriques qui consomment explicitement les constantes HSM séparées par la fermeture micro-locale 1–anneau du composé Z^0-like.

La chaîne active sépare

$$R_0, \qquad \rho, \qquad T, \qquad \kappa_r$$

par la fermeture micro-locale 1–anneau de §29.9. Les valeurs séparées utilisées dans les sections numériques aval sont

$$R_0^{\mathrm{HSM}} = 1.50841 \times 10^{29}\ \mathrm{m}, \qquad \rho^{\mathrm{HSM}} = 8.10393 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg\,m^{-3}},$$

$$T^{\mathrm{HSM}} = 7.28345 \times 10^{-10}\ \mathrm{Pa}, \qquad \kappa_r^{\mathrm{HSM}} = 0.204743.$$

Ces constantes sont les sorties séparées de la fermeture micro-locale ; elles ne constituent pas des hypothèses auxiliaires indépendantes.

30.12.1 Prédictions comparables aux observables

Quantité	Valeur HSM / valeur comparée	Statut	Référence / observable
m_Z depuis m_W	90.3 GeV	prédiction LO sans échelle ; écart de schéma $\simeq 1\%$	91.1876 GeV
m_e (bump 2DOF EM 1–corps)	0.512 MeV	prédiction LO centrale ; écart relatif $\simeq 0.23\%$; dépendance corrélée en $b_0^{(2)}$ annulée au LO, cf. (30.5)	0.51099895 MeV
$\Delta m^2_{\mathrm{sol}}$ (breather 2DOF, LO)	$(7.5 \pm 0.8) \times 10^{-5}$ eV^2	$\mathcal{S}(1;207) = 1$, préfacteur absolu avec incertitude de fermeture (30.15)	7.41×10^{-5} eV^2
$\Delta m^2_{\mathrm{atm}}$ (breather 2DOF, LO)	$(2.77 \pm 0.30) \times 10^{-3}$ eV^2	$\mathcal{S}(207;207) = 36.84$, donc valeur centrale $36.84 \times 7.5117 \times 10^{-5}$ eV^2	2.507×10^{-3} eV^2
$\Delta m^2_{\mathrm{atm}}/\Delta m^2_{\mathrm{sol}}$	36.84	ratio spectral régénéré $\mathcal{S}(207;207)/\mathcal{S}(1;207)$	33.83
$\mathcal{S}(1;207)$	1	normalisation spectrale breather 2DOF	–
$\mathcal{S}(207;207)$	36.84	valeur régénérée par la fermeture spectrale saturée	–
$\mathcal{S}(3477;207)$	207.78	niveau spectral supérieur régénéré ; $\mathcal{S}(3477;207)/\mathcal{S}(207;207) \simeq 5.64$	–
m_1 (breather 2DOF, LO minimal)	0	fermeture minimale $m_0^2 = 0$	–
m_2 (breather 2DOF, LO minimal)	$(8.67 \pm 0.48) \times 10^{-3}$ eV	$\sqrt{7.5117 \times 10^{-5}}$ eV, incertitude de fermeture (30.16)	8.608×10^{-3} eV reconstruit depuis Δm^2_{21}
m_3 (breather 2DOF, LO minimal)	$(5.26 \pm 0.29) \times 10^{-2}$ eV	$\sqrt{2.7673 \times 10^{-3}}$ eV, incertitude de fermeture (30.16)	5.007×10^{-2} eV reconstruit depuis $\Delta m^2_{3\ell}$
m_3/m_2 (breather 2DOF, LO minimal)	6.070	$\sqrt{36.84}$	5.817
$\sum m_\nu$ (breather 2DOF, LO minimal)	$(6.13 \pm 0.34) \times 10^{-2}$ eV	$0 + (8.67 \pm 0.48) \times 10^{-3} + (5.26 \pm 0.29) \times 10^{-2}$	borne cosmologique Planck/BAO $\Sigma m_\nu < 0.12\,\mathrm{eV}$
ϑ_{12} (réduction projective 3×2)	$33.4^\circ \pm 0.8^\circ$	angle interne du composé six-bump, plage de fermeture LO issue de (30.37)	$\theta_{12}^{\mathrm{obs}} \simeq 33.4^\circ$
ϑ_{13} (réduction projective 3×2)	$8.6^\circ \pm 0.4^\circ$	angle interne du composé six-bump, plage de fermeture LO issue de (30.37)	$\theta_{13}^{\mathrm{obs}} \simeq 8.6^\circ$
ϑ_{23} (réduction projective 3×2)	49.3°–49.5°	angle interne du composé six-bump, issu de (30.37)	$\theta_{23}^{\mathrm{obs}} \simeq 49^\circ$
m_H (Higgs-like radial)	125.0 GeV	prédiction de schéma NLO local minimal ; relation HSM à $m^{(\mathrm{HSM})}_{\mathrm{NSL,ch}}$, puis identification observationnelle $m^{(\mathrm{HSM})}_{\mathrm{NSL,ch}} \mapsto m_W$	125.20 ± 0.11 GeV
m_H/m_W (Higgs-like radial)	1.555	ratio sans échelle issu de $\sqrt{1+\delta_H^*}$	$125.20/80.379 \simeq 1.55762$
m_γ (photon, LO)	0	mode transverse abélien sans terme Proca au LO	borne supérieure expérimentale
N_{pol} (photon)	2	polarisations physiques transverses	2
$\{\lvert Q_{\mathrm{field}}\rvert/Q_{\mathrm{EM},*}\}$ (branches élémentaires)	$\{1,\ 2/3,\ 1/3\}$	motif relatif conique transmis par (21.3)	$\{1,\ 2/3,\ 1/3\}$
$Q_{\mathrm{EM},*}$ (quantum de charge EM–like)	1.601×10^{-19} C	prédiction dérivée par $\alpha_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{HSM,LO}}$ et $Z^{(\mathrm{LO})}_{\mathrm{EM,ref}}$; comparaison à e non indépendante de α_{EM} après lecture SI	$e = 1.602176634 \times 10^{-19}$ C
$\alpha_{\mathrm{EM}}^{-1}$ (couplage EM–like, LO)	137.3	fermeture LO centrale (20.34)	137.036

Précision affichée. Les valeurs de cette synthèse sont des valeurs centrales de comparaison. Elles sont affichées au rang phénoménologique pertinent pour leur statut de fermeture : lorsqu'une incertitude de fermeture ou de schéma domine, elle est indiquée explicitement ou l'affichage est arrondi en conséquence. Les chiffres supplémentaires utilisés dans les sections détaillées servent à la reproductibilité des chaînes numériques ; ils ne doivent pas être lus comme une précision phénoménologique supplémentaire.

Lecture. Les masses m_μ et m_τ relèvent du calibrage discret du triplet de seuils admissibles

$$(q_1, q_2, q_3)_{\mathrm{cal}} = (1, 207, 3477).$$

Elles ne sont donc pas listées comme prédictions indépendantes dans la synthèse finale. Les comparaisons observationnelles du secteur Bump 3DOF sont portées par les composés couleur–blancs CB3, et non par des masses de quarks libres.

30.12.2 Composés couleur–blancs CB3 : prédictions baryon–like

Les sorties CB3 sont des prédictions LO de composés couleur–blancs baryon–like, évaluées dans la fermeture de raccord saturé/non saturé $\delta^{\mathrm{LO}}_{\mathrm{CB3}} = 1$. Elles ne consomment pas la séparation globale

$$\kappa_r^{\mathrm{HSM}}, \qquad R_0^{\mathrm{HSM}}, \qquad \rho^{\mathrm{HSM}}, \qquad T^{\mathrm{HSM}}.$$

CB3	Référence	Masse HSM LO [MeV]	Obs. [MeV]	Écart
uud	p	937.46 (±1.1%)	938.2721	−0.087%
udd	n	937.29 (±1.1%)	939.5654	−0.242%
uds	Λ^0	1105.66	1115.683	−0.898%
udc_{gen}	$\Sigma_c(2455)^+$	2498.93	2452.65	+1.887%
udc_{bas}	Λ_c^+	2280.51	2286.46	−0.260%
udb	Λ_b^0	5599.33	5619.57	−0.360%
uss	Ξ^0	1332.00	1314.86	+1.304%
dss	Ξ^-	1331.80	1321.71	+0.763%
sss	Ω^-	1668.30	1672.45	−0.248%
ssb	Ω_b^-	6108.70	6045.8	+1.040%

La bande (±1.1%) indiquée pour le doublet nucléon–like correspond à la bande de fermeture CB3 dominante associée aux constantes de forme τ_3 et q_c, après annulation corrélée de $b_0^{(2)}$ dans l'échelle E_*, cf. (30.5). Elle ne doit pas être confondue avec une incertitude indépendante propagée depuis E_*. Les masses reportées dans ce tableau sont identiques, à l'arrondi affiché, à celles obtenues par recalcul direct de la fermeture (28.23), avec la correction de mode bas (28.31) pour udc_{bas}.

Correction fine du doublet léger. Les deux premières lignes du tableau donnent les masses CB3 génériques avant la correction fine compacte du doublet uud/udd. La sortie physique du splitting nucléon–like est donnée par (30.38). Elle consomme le terme EM–like compact (21.18) et le couplage élémentaire fermé $\alpha_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{HSM,LO}}$, défini par (20.34). Numériquement,

$$\boxed{m_n - m_p \simeq +1.31 \text{ MeV},}$$

à comparer à

$$(m_n - m_p)_{\mathrm{obs}} \simeq +1.293 \text{ MeV}.$$

Cette correction restaure le bon signe du doublet léger et doit être lue comme la sortie pertinente pour le splitting neutron–proton.

Lecture. Ces lignes comparent des composés CB3 couleur–blancs à des états baryon–like. Elles ne doivent pas être confondues avec des masses de quarks libres ni avec les masses spectrales isolées du Bump 3DOF. Pour le doublet léger, les lignes *uud* et *udd* donnent les masses génériques ; le splitting physique est donné par la correction fine $m_n - m_p$ ci-dessus.

30.12.3 Sorties théoriques avec constantes HSM séparées

Les sorties suivantes consomment au moins une des constantes séparées

$$\kappa_r^{\mathrm{HSM}}, \qquad R_0^{\mathrm{HSM}}, \qquad \rho^{\mathrm{HSM}}, \qquad T^{\mathrm{HSM}}.$$

Elles sont donc évaluées après la fermeture micro-locale 1–anneau du composé Z^0-like.

Branche / quantité	Valeur HSM	Charge / paramètre	Statut
NSL 3DOF mono-lobe	$m(1/3) = 1.69214\times10^{-9}$ MeV,	$m(2/3) = 3.38427\times10^{-9}$ MeV, $\frac{Q_{\mathrm{field}}}{Q_{\mathrm{EM},*}^{\mathrm{HSM,LO}}} = \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}$	sortie théorique LO isolée
Breather 3DOF Br3 charged-like	$m_{\mathrm{LO}+}(1/3) \simeq 0.73260$ MeV,	$m_{\mathrm{LO}+}(2/3) \simeq 1.46520$ MeV, $\frac{Q_{\mathrm{field}}}{Q_{\mathrm{EM},*}^{\mathrm{HSM,LO}}} = 0.36558$, 0.73117	branche fermée LO
Canal faible–like statique minimal	$F_W(2\lambda_{\mathrm{NSL}}) \simeq -4.24\times10^{-57}$ N,	$q_W^{(W)} \simeq 8.02111\times10^{41}$, $q_W^{(Z^0)} = 0$,	Yukawa statique minimal
	$F_W(5\lambda_{\mathrm{NSL}}) \simeq -2.43\times10^{-59}$ N,	$F_W(10\lambda_{\mathrm{NSL}}) \simeq -1.20\times10^{-62}$ N, $c_W \simeq 1.81032\times10^{-18}$ m	

Lecture. Les sorties de cette sous-section sont des sorties théoriques calculées après séparation des constantes HSM globales. Elles ne sont pas toutes directement comparables à des observables établies, mais elles sont entièrement déterminées dans les fermetures actives utilisées dans les sections précédentes.

Conclusion de statut. Le premier tableau rassemble les prédictions directement comparables aux observables. Le tableau CB3 rassemble les prédictions couleur–blanches baryon–like. Le dernier tableau rassemble les sorties théoriques qui consomment

$$\kappa_r^{\mathrm{HSM}}, \qquad R_0^{\mathrm{HSM}}, \qquad \rho^{\mathrm{HSM}}, \qquad T^{\mathrm{HSM}}.$$

Chapitre 31

Réalisation constructive de la maille dodécaédrique

Objet. Ce chapitre établit une réalisation discrète compatible avec les constantes effectives séparées de HSM. Les coefficients mécaniques consommés sont

$$\kappa_\mu^{\mathrm{HSM}}, \qquad \kappa_r^{\mathrm{HSM}}, \qquad R_0^{\mathrm{HSM}}, \qquad \rho^{\mathrm{HSM}}, \qquad T^{\mathrm{HSM}}, \qquad \ell_0,$$

définis respectivement par (29.11), (29.40), (29.34), (29.38), (29.39) et (29.14). Le problème traité ici est inverse : il s'agit d'exhiber une classe non vide de mailles dont le passage au continu reproduit les coefficients effectifs déjà séparés, sans introduire de constante fondamentale supplémentaire.

Réalisation globale retenue. La réalisation constructive est portée par une cellulation régulière de $\mathbb{S}^3$ de type 120-cell,

$$\{5, 3, 3\}.$$

Ses cellules tridimensionnelles sont des dodécaèdres. Chaque cellule dodécaédrique possède douze faces pentagonales. Cette structure fournit le support combinatoire global suivant :

$$\text{120-cell global} \;+\; \text{cellule locale } (1 + 12) \;+\; \text{transmission faciale à cinq sous-canaux.}$$

Le nombre 12 provient du nombre de faces d'un dodécaèdre. Le nombre 5 provient du nombre de sommets, ou de directions sommet–sommet élémentaires, sur une face pentagonale. Ces deux entiers sont donc des facteurs combinatoires de la géométrie dodécaédrique, et non des paramètres ajustables.

Statut de la construction. La construction démontre l'existence d'une classe de réalisations compatibles. Elle ne revendique pas l'unicité de la maille. Les grandeurs locales qui dépendent du choix d'une réalisation particulière, par exemple une énergie attribuée à un croisement de sous-canaux, ne sont pas des invariants de cette classe et ne sont pas introduites comme sorties numériques.

31.1 Constantes effectives à reproduire

Coefficients radiaux. Les deux coefficients radiaux à reproduire sont

$$\boxed{\kappa_\mu^{\mathrm{HSM}} \simeq 6.25 \times 10^{34}\ \mathrm{m}^{-2}, \qquad \kappa_r^{\mathrm{HSM}} \simeq 0.205.} \tag{31.1}$$

Le premier coefficient est local et dimensionné. Le second coefficient est adimensionné et pondère le transfert radial. Ils ne peuvent donc pas être comparés directement comme deux nombres purs.

Échelles séparées. Les échelles nécessaires à la réalisation locale sont

$$\boxed{R_0^{\mathrm{HSM}} \simeq 1.51 \times 10^{29}\ \mathrm{m}, \qquad \rho^{\mathrm{HSM}} \simeq 8.10 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg\,m^{-3}},} \tag{31.2}$$

$$\boxed{T^{\mathrm{HSM}} \simeq 7.28 \times 10^{-10}\ \mathrm{Pa}, \qquad \ell_0 \simeq 2.08 \times 10^{-22}\ \mathrm{m}.} \tag{31.3}$$

Les valeurs (31.1)–(31.3) sont des valeurs centrales de synthèse, arrondies au rang utile pour le diagnostic de maille. Le chapitre ne les recalcule pas ; il construit une maille compatible avec elles. Les chiffres supplémentaires utilisés dans les les sections de calcul d'ancrage observationnel relèvent de la reproductibilité numérique et ne constituent pas une précision phénoménologique supplémentaire.

Contrainte spectrale de seuil. La contrainte spectrale associée au second seuil admissible est représentée par un rapport de renvoi

$$\chi_{207} := \frac{\Xi_{\tan}}{\Xi_r},$$

où Ξ_r et $\Xi_{\tan}$ désignent respectivement les renvois géométriques radial et tangent du passage au continu. La valeur numérique de χ_{207} n'est pas nécessaire pour démontrer la non-vacuité de la classe de mailles : pour tout $\chi_{207} > 0$, le choix

$$\Xi_{\tan} = \chi_{207}\, \Xi_r$$

réalise le rapport imposé par le seuil $q_2 = 207$.

31.2 Cellule dodécaédrique enrichie

Degrés de liberté locaux. Une cellule locale est représentée par un degré de liberté central

$$u_i$$

et par douze degrés de liberté faciaux

$$f_{iF}, \qquad F = 1, \dots, 12.$$

Le mode facial isotrope est

$$\boxed{v_i := \frac{1}{12} \sum_{F=1}^{12} f_{iF}.} \tag{31.4}$$

La réduction locale pertinente pour le secteur radial est donc une cellule enrichie de type

$$1 + 12.$$

Énergie locale quadratique. Le bloc local radial est

$$\boxed{E_{\mathrm{loc}}(u_i, v_i) = 6a_f\, v_i^2 + \frac{a_c}{2}\, u_i^2 + \frac{12 c_{cf}}{2}\, (v_i - u_i)^2.} \tag{31.5}$$

Les coefficients a_f, a_c, c_{cf} sont positifs. Le facteur 12 est le nombre de faces du dodécaèdre. L'énergie (31.5) est positive définie pour

$$a_f > 0, \qquad a_c > 0, \qquad c_{cf} > 0.$$

Élimination du centre. Pour un mode facial v_i fixé, l'équation d'Euler locale donne

$$a_c u_i + 12 c_{cf}(u_i - v_i) = 0,$$

d'où

$$\boxed{u_i = \frac{12 c_{cf}}{a_c + 12 c_{cf}}\, v_i.} \tag{31.6}$$

Après élimination de u_i, le bloc local se réduit à

$$\boxed{E_{\mathrm{loc}}^{\mathrm{eff}}(v_i) = \frac{A_{\mathrm{eff}}}{2}\, v_i^2, \qquad A_{\mathrm{eff}} = 12 a_f + \frac{a_c (12 c_{cf})}{a_c + 12 c_{cf}}.} \tag{31.7}$$

Coefficient local continu. Soit $\mathcal{V}_{\ell_0}$ le volume élémentaire associé à l'échelle ℓ_0. Le coefficient local issu du passage au continu est

$$\boxed{\kappa_\mu^{\mathrm{mesh}} = \frac{A_{\mathrm{eff}}}{T^{\mathrm{HSM}} \mathcal{V}_{\ell_0}}.} \tag{31.8}$$

Le coefficient cible est donc réalisé lorsque

$$\boxed{A_{\mathrm{eff}} = A_\mu^\star, \qquad A_\mu^\star := T^{\mathrm{HSM}} \mathcal{V}_{\ell_0} \kappa_\mu^{\mathrm{HSM}}.} \tag{31.9}$$

La dimension de $A_\mu^\star$ est celle d'une raideur locale. En effet,

$$[T\, \mathcal{V}_{\ell_0}\, \kappa_\mu] = \mathrm{Pa\,m^3\,m^{-2}} = \mathrm{N\,m^{-1}}.$$

31.3 Transmission faciale à cinq sous-canaux

Origine du facteur cinq. Chaque face du dodécaèdre est un pentagone. Une transmission élémentaire entre deux cellules voisines peut être décomposée en cinq sous-canaux associés aux cinq directions sommet–sommet de la face. Ce facteur est purement combinatoire :

$$\boxed{N_F^{\mathrm{geom}} = 5.} \tag{31.10}$$

Rigidité faciale effective. Si les cinq sous-canaux portent la même raideur k_F, avec une projection isotrope moyenne

$$\langle \cos^2 \theta \rangle_{\mathrm{iso}} = \frac{1}{3},$$

alors la rigidité radiale faciale vaut

$$\boxed{\gamma_F = 5\, k_F\, \frac{1}{3} = \frac{5}{3} k_F.} \tag{31.11}$$

La positivité de k_F équivaut à la positivité de γ_F.

Coefficient radial continu. Le passage au continu associe à γ_F le coefficient

$$\boxed{\kappa_r^{\mathrm{mesh}} = \frac{\gamma_F\, \ell_0^2\, \Xi_r}{T^{\mathrm{HSM}} \mathcal{V}_{\ell_0}}.} \tag{31.12}$$

La cible κ_r^{HSM} est donc réalisée lorsque

$$\boxed{\gamma_F = \gamma_r^\star, \qquad \gamma_r^\star := \frac{T^{\mathrm{HSM}}\mathcal{V}_{\ell_0}}{\ell_0^2\,\Xi_r}\,\kappa_r^{\mathrm{HSM}}.} \tag{31.13}$$

La dimension est correcte :

$$\left[\frac{T\,\mathcal{V}_{\ell_0}}{\ell_0^2}\right] = \frac{\mathrm{Pa\,m^3}}{\mathrm{m^2}} = \mathrm{N\,m^{-1}}.$$

Un choix explicite des sous-canaux est alors

$$\boxed{k_F = \frac{3}{5}\,\gamma_r^\star.} \tag{31.14}$$

31.4 Existence constructive

Proposition 31.1 (Réalisation dodécaédrique compatible au rang LO)**.** *Pour tout $\Xi_r > 0$ et tout $\chi_{207} > 0$, il existe une classe non vide de mailles de type*

$$120\text{-}\textit{cell global} \;+\; (1+12)\;\textit{local} \;+\; 5\;\textit{sous-canaux faciaux}$$

telle que

$$\kappa_\mu^{\mathrm{mesh}} = \kappa_\mu^{\mathrm{HSM}}, \qquad \kappa_r^{\mathrm{mesh}} = \kappa_r^{\mathrm{HSM}}, \qquad \frac{\Xi_{\tan}}{\Xi_r} = \chi_{207}.$$

Démonstration. Soit

$$A_\mu^\star = T^{\mathrm{HSM}}\mathcal{V}_{\ell_0}\kappa_\mu^{\mathrm{HSM}}.$$

Le choix local

$$\boxed{a_f = \frac{A_\mu^\star}{24}, \qquad a_c = A_\mu^\star, \qquad c_{cf} = \frac{A_\mu^\star}{12}} \tag{31.15}$$

est strictement positif. En l'injectant dans (31.7), on obtient

$$12a_f = \frac{A_\mu^\star}{2},$$

et

$$\frac{a_c(12c_{cf})}{a_c + 12c_{cf}} = \frac{A_\mu^\star A_\mu^\star}{A_\mu^\star + A_\mu^\star} = \frac{A_\mu^\star}{2}.$$

Donc

$$A_{\mathrm{eff}} = A_\mu^\star,$$

et (31.8) donne

$$\kappa_\mu^{\mathrm{mesh}} = \kappa_\mu^{\mathrm{HSM}}.$$

Pour le transfert radial, soit

$$\gamma_r^\star = \frac{T^{\mathrm{HSM}}\mathcal{V}_{\ell_0}}{\ell_0^2\,\Xi_r}\,\kappa_r^{\mathrm{HSM}}.$$

Le choix

$$k_F = \frac{3}{5}\gamma_r^\star$$

est strictement positif, et (31.11) donne

$$\gamma_F = \gamma_r^\star.$$

L'équation (31.12) donne alors

$$\kappa_r^{\mathrm{mesh}} = \kappa_r^{\mathrm{HSM}}.$$

Enfin, le choix

$$\Xi_{\tan} = \chi_{207}\,\Xi_r$$

réalise

$$\frac{\Xi_{\tan}}{\Xi_r} = \chi_{207}.$$

Les trois contraintes sont donc satisfaites simultanément par des paramètres positifs. La classe est non vide. □

31.5 Rôle du 120-cell

Support global. Le 120-cell fournit une réalisation compacte et régulière de la structure cellulaire sur $\mathbb{S}^3$. La cellule tridimensionnelle étant un dodécaèdre, la réduction locale héritée de cette structure possède naturellement un centre et douze faces. Le bloc 1+12 de (31.4)–(31.7) est donc la réduction isotrope minimale de cette géométrie.

Support des transmissions. Les faces pentagonales du dodécaèdre fournissent les cinq sous-canaux de (31.10). La transmission faciale (31.11) est ainsi compatible avec le support global 120-cell tout en restant formulée localement. Le passage au continu dépend des coefficients effectifs κ_μ, κ_r et des renvois $\Xi_r, \Xi_{\tan}$, non du nombre total de cellules globales.

Non-unicité. La proposition 31.1 est une preuve d'existence. Elle n'exclut pas d'autres cellulations de $\mathbb{S}^3$ capables de produire les mêmes coefficients effectifs. Le 120-cell est retenu parce qu'il donne une réalisation dodécaédrique explicite et compatible avec les facteurs combinatoires 12 et 5 utilisés dans la construction locale.

31.6 Grandeurs locales dépendantes de la réalisation

Énergies de noeud et de croisement. Une grandeur attribuée à un noeud, une liaison ou un croisement dépend de la répartition locale des raideurs a_f, a_c, c_{cf}, k_F, du volume affecté au degré de liberté, et du choix des renvois $\Xi_r, \Xi_{\tan}$. Deux réalisations de la classe de la proposition 31.1 peuvent donc reproduire les mêmes coefficients effectifs

$$\kappa_\mu^{\mathrm{HSM}}, \qquad \kappa_r^{\mathrm{HSM}}, \qquad \chi_{207},$$

tout en attribuant des énergies locales différentes aux croisements.

Condition de promotion d'une grandeur locale. Une grandeur locale de croisement ne peut être promue comme sortie numérique que si la construction sélectionne une maille unique, ou une sous-classe dont cette grandeur est invariante. En l'absence d'une telle invariance, elle ne constitue pas une constante fondamentale et n'intervient pas dans la chaîne des prédictions.

31.7 Conclusion

Proposition 31.2 (Compatibilité constructive)**.** *Les constantes séparées*

$$\kappa_\mu^{\mathrm{HSM}}, \qquad \kappa_r^{\mathrm{HSM}}, \qquad R_0^{\mathrm{HSM}}, \qquad \rho^{\mathrm{HSM}}, \qquad T^{\mathrm{HSM}}, \qquad \ell_0$$

admettent une réalisation discrète compatible sur un support global de type 120*-cell, avec cellule locale dodécaédrique enrichie* $1+12$ *et transmission faciale à cinq sous-canaux. La construction reproduit simultanément*

$$\kappa_\mu^{\mathrm{mesh}} = \kappa_\mu^{\mathrm{HSM}}, \qquad \kappa_r^{\mathrm{mesh}} = \kappa_r^{\mathrm{HSM}}, \qquad \Xi_{\tan}/\Xi_r = \chi_{207}.$$

Portée. Le résultat est une compatibilité constructive : la structure continue séparée par les fermetures précédentes peut être soutenue par au moins une classe de réalisations discrètes dodécaédriques. Les constantes effectives consommées par les secteurs de prédiction restent celles des fermetures continues ; la maille établit la réalisabilité discrète de ces constantes.

Troisième partie

Lien avec les théories physiques effectives

Chapitre 32

Introduction : objet, méthode et portée

Objet de cette partie. L'objet de cette partie est d'établir, à partir des résultats déjà construits dans HSM, que la théorie admet, dans des régimes bien identifiés, des réductions effectives qui reproduisent certaines structures centrales de la physique théorique usuelle. L'ambition n'est donc pas d'introduire ici une nouvelle couche axiomatique, ni de redévelopper les constructions internes déjà établies dans les chapitres théoriques, mais de montrer comment celles-ci se lisent, dans leurs fenêtres de validité propres, comme des réalisations effectives de structures reconnues de la mécanique quantique, de la théorie quantique des champs, des théories effectives de basse énergie, ainsi que du versant relativiste et gravitationnel.

Principe d'organisation. Le fil directeur est le suivant :

$$\text{HSM} \longrightarrow \text{régimes effectifs} \longrightarrow \text{lecture dans les langages usuels de la physique théorique.}$$

On distinguera en particulier deux grands volets. Le premier regroupe le *domaine quantique effectif* : mécanique quantique, théorie quantique des champs effective locale, secteurs d'interaction, structures de saveur et de mélange, puis lecture en théorie effective à basse énergie. Le second regroupe le *domaine relativiste et gravitationnel* : cinématique relativiste effective, secteur gravitationnel-like, limite newtonienne et portée du lien vers une lecture de type relativité générale.

Méthode. La méthode suivie dans toute cette partie est strictement descendante. On part d'objets déjà établis dans les chapitres théoriques : équations fondamentales, solutions unitaires, champs effectifs, solutions composées, couplages solution–champ et fermetures déjà obtenues. À partir de ces ingrédients, on identifie ensuite les régimes où une réduction effective est légitime, on écrit la forme réduite correspondante, puis on montre en quel sens cette forme recouvre un domaine théorique connu. Ainsi, cette partie ne constitue pas un substitut aux chapitres théoriques ; elle en est la lecture externe et structurée.

Règle de lecture. Une distinction sera maintenue tout au long du texte entre trois niveaux :

1. les *résultats internes à HSM*, qui doivent être établis dans les chapitres théoriques et auxquels on renvoie ici ;
2. les *réductions effectives*, obtenues à partir de ces résultats dans un régime donné ;
3. les *correspondances avec les théories usuelles*, qui constituent l'objet propre de ce chapitre.

Autrement dit, lorsqu'un ingrédient relève de la construction interne du cadre HSM, il n'a pas vocation à être démontré ici une seconde fois ; en revanche, c'est bien dans cette partie que doit

être explicitée la chaîne logique par laquelle cet ingrédient permet de recouvrir un langage ou un domaine standard.

Références externes de contexte. Les notions de mécanique quantique effective, théorie des champs effective, électromagnétisme classique, relativité générale, limite newtonienne et mélange PMNS sont utilisées ici comme langages de comparaison avec les domaines usuels de la physique. Les résultats propres à HSM sont renvoyés aux sections internes du manuscrit ; les notions standards auxquelles elles sont comparées peuvent être lues dans les références classiques [10, 16, 17, 11, 12, 2, 3].

Portée des résultats. Les résultats présentés dans cette partie doivent être lus comme des résultats *de réduction effective*. Selon les cas, la portée obtenue pourra être de trois types :

1. une *dérivation effective explicite* d'un régime ou d'une équation usuelle ;
2. une *couverture structurelle* d'un formalisme connu, lorsque HSM en reconstruit les objets organisateurs sans prétendre encore en épuiser toute la complétude ;
3. une *correspondance contrôlée dans une fenêtre de validité*, lorsque la lecture ne vaut qu'au rang meneur, à basse énergie, ou sous hypothèses de réduction clairement énoncées.

Cette hiérarchie de portée sera toujours indiquée explicitement, afin de ne pas confondre ce qui est démontré de bout en bout avec ce qui n'est établi qu'au niveau effectif ou dans une limite asymptotique précise.

Ce que cette partie ne fait pas. Cette partie ne prétend pas reconstruire en bloc, par simple analogie de vocabulaire, l'intégralité des théories physiques existantes. Il ne s'agit ni d'une juxtaposition de dictionnaires formels, ni d'une collection d'identifications plaquées a posteriori. Le critère retenu est plus strict : chaque lien invoqué doit reposer sur une chaîne de réduction explicite partant d'un résultat HSM déjà établi, et menant à une structure effective identifiable dans le langage usuel correspondant.

Programme. La partie s'ouvre sur le domaine quantique effectif. On montre d'abord comment émergent les structures de la mécanique quantique effective, puis comment cette réduction se prolonge en une lecture de type théorie quantique des champs locale, incluant les secteurs d'interaction pertinents et les structures de saveur et de mélange. On examine ensuite la lecture en théorie effective à basse énergie et sa fenêtre de validité. Dans un second temps, on traite le versant relativiste et gravitationnel : cinématique effective, secteur gravitationnel-like, limite newtonienne et portée du lien vers une lecture relativiste plus large. La partie se conclut enfin par un bilan précis des résultats démontrés et des régimes de validité associés.

Chapitre 33

HSM et domaine quantique effectif

33.1 Vue d'ensemble

Objet de cette partie. Cette partie a pour objet de montrer que HSM reproduit, dans des régimes effectifs bien identifiés, plusieurs structures du domaine quantique usuel. Plus précisément, on établit ici une chaîne de réduction continue allant de la mécanique quantique effective à une lecture de type théorie quantique des champs locale, puis à une formulation en théorie effective de basse énergie. Le point important est que ces trois niveaux ne sont pas traités comme trois théories étrangères juxtaposées, mais comme trois lectures d'un même contenu HSM, valables à des échelles et sous des hypothèses de réduction différentes.

Chaîne de réduction. Le schéma général étudié dans cette partie est

HSM $\longrightarrow$ réduction quantique effective $\longrightarrow$ champs effectifs locaux $\longrightarrow$ théorie effective basse énergie.

La première étape fait apparaître les structures de type mécanique quantique : espace d'états effectif, évolution de type Schrödinger, lecture probabiliste, régime semiclassique et quantification EBK. La deuxième étape montre comment, lorsque les hypothèses de linéarisation, de localité effective et de séparation d'échelles sont satisfaites, une description locale en termes de champs effectifs, de lagrangiens quadratiques, de propagateurs et d'amplitudes peut être obtenue. La troisième étape organise ces mêmes objets dans le langage des opérateurs locaux, du coarse-graining, du matching et des fenêtres de validité de type EFT.

Secteurs couverts. Dans cette partie, les secteurs d'interaction pertinents ne sont pas introduits comme des blocs indépendants du reste, mais comme des spécialisations de cette réduction quantique générale. On examinera ainsi les lectures effectives disponibles des secteurs électromagnétique-like, faible-like, fort-like et, lorsque cela est pertinent au niveau quantique local, du secteur gravitationnel-like. De même, les structures de saveur et de mélange seront traitées comme des organisations internes du domaine quantique effectif, et non comme des ajouts extérieurs.

Règle de portée. Les résultats de cette partie devront toujours être lus à leur niveau exact. Selon les cas, on obtiendra :

- une dérivation effective explicite d'une équation ou d'un formalisme usuel ;
- une couverture structurelle d'un secteur connu ;
- ou une lecture contrôlée dans une fenêtre de validité restreinte (basse énergie, rang meneur, réduction locale, approximation d'enveloppe, etc.).

Cette règle est particulièrement importante dans le passage de la mécanique quantique à la QFT, puis de la QFT à l'EFT : le texte indiquera explicitement ce qui est démontré comme réduction, ce qui est seulement identifié comme structure effective, et ce qui n'est valable que dans une limite contrôlée.

Organisation. On procédera en cinq temps. On établira d'abord la réduction vers la mécanique quantique effective. On montrera ensuite comment cette réduction se prolonge en une lecture de type théorie quantique des champs effective locale. On traitera alors les secteurs d'interaction pertinents dans ce domaine quantique. On examinera ensuite les structures internes de saveur et de mélange lorsque la théorie fournit déjà les ingrédients nécessaires. Enfin, on formulera le tout dans le langage d'une théorie effective de basse énergie, avec son matching et sa fenêtre de validité propres.

Principe méthodologique. Aucun des résultats de cette partie ne doit être compris comme une simple analogie formelle. Chaque fois qu'un lien avec la mécanique quantique, la QFT ou l'EFT sera invoqué, il devra reposer sur une chaîne explicite :

résultat HSM déjà établi $\longrightarrow$ réduction effective $\longrightarrow$ identification du formalisme usuel correspondant.

C'est cette chaîne, et elle seule, qui fonde la valeur démonstrative de cette partie.

33.2 Mécanique quantique effective

Objet de la réduction. On montre dans cette section que HSM admet, dans un régime d'enveloppe lente et de localisation spectrale convenable, une réduction effective qui reproduit plusieurs structures centrales de la mécanique quantique usuelle. Le résultat visé n'est pas l'introduction d'une théorie supplémentaire au-dessus de HSM, mais l'identification d'un régime dans lequel les degrés de liberté pertinents se réorganisent sous la forme d'un espace d'états complexe, d'une évolution linéaire de type Schrödinger, d'une lecture probabiliste de type Born et d'un régime semiclassique compatible avec la quantification EBK.

33.2.1 Réduction d'enveloppe et équation de Schrödinger

Chaîne logique. Le point de départ est la présence, dans HSM, de solutions unitaires et de modes localisés admettant une description effective en enveloppe lente. Dans ce régime, la dynamique rapide portée par la phase fixe l'échelle interne du mode, tandis que l'évolution de l'enveloppe sélectionne une dynamique réduite gouvernant la propagation, les interférences et la réponse aux couplages lents. La chaîne de réduction s'écrit alors schématiquement

solution unitaire HSM $\longrightarrow$ ansatz d'enveloppe lente $\longrightarrow$ équation réduite de type Schrödinger $\longrightarrow$ interpr

Cette chaîne doit être lue comme une réduction asymptotique : elle vaut dans la fenêtre où le mode porteur est bien isolé, où l'enveloppe est lente, et où les couplages extérieurs ne détruisent pas la séparation d'échelles.

Ansatz d'enveloppe lente. Le point technique central de la réduction quantique est l'existence d'un régime de séparation d'échelles dans lequel une solution unitaire HSM peut s'écrire comme une oscillation rapide modulée par une enveloppe lente. On introduit ainsi un ansatz de la forme

$$\Psi(t, \mathbf{x}) = A(t, \mathbf{x})\, e^{-i\omega_0 t},$$

ou, plus généralement, une superposition de modes voisins d'une fréquence porteuse ω_0, avec une amplitude A variant lentement à l'échelle du cycle rapide. En réinjectant cet ansatz dans

les équations fondamentales de HSM, puis en développant dans le régime où les dérivées de l'enveloppe sont petites devant $\omega_0 A$, la partie oscillante rapide se moyenne et l'on obtient, au rang dominant de cette expansion multi-échelles, une équation réduite pour l'enveloppe lente.

Forme réduite de type Schrödinger. Dans cette fenêtre multi-échelles, la partie rapide fixe l'échelle interne du mode, tandis que la partie lente gouverne la propagation effective. Après moyennisation sur le cycle rapide et identification du terme dominant d'oscillation, l'équation d'évolution prend la forme

$$i\,h_{\text{eff}}\,\partial_t\psi = \Big(-\frac{h_{\text{eff}}^2}{2m_{\text{eff}}}\Delta + V_{\text{eff}}\Big)\psi, \qquad m_{\text{eff}} = \frac{h_{\text{eff}}\,\Omega_0}{c_t^2}, \tag{33.1}$$

où ψ désigne l'enveloppe complexe effectivement normalisée, Ω_0 la fréquence interne du mode porteur et V_{eff} le potentiel lent induit par le fond, la géométrie effective et les couplages faiblement variables. Cette écriture a la forme de l'équation de Schrödinger effective attendue dans le régime non relativiste, local et de basse énergie.

Sens du théorème de réduction. L'équation (33.1) n'est pas postulée ; elle est la forme asymptotique prise par la dynamique HSM lorsque trois conditions sont réunies :

1. une *fréquence porteuse* Ω_0 bien définie pour le mode considéré ;
2. une *enveloppe lente*, au sens où les dérivées de ψ restent petites devant $\Omega_0\psi$;
3. une *séparation d'échelles* suffisante entre la dynamique interne du mode et les variations spatiales ou temporelles du fond effectif.

Dans cette fenêtre, les structures de mécanique quantique utilisées à ce rang apparaissent donc comme une réduction contrôlée des équations fondamentales de HSM.

Lecture Madelung–Hamilton–Jacobi. En écrivant l'enveloppe sous la forme polaire

$$\psi = \sqrt{n}\,e^{\,iS/h_{\text{eff}}},$$

l'équation (33.1) se décompose en une équation de continuité pour n et en une équation de phase de type Hamilton–Jacobi corrigée par un terme quantique effectif. Cette réécriture montre que la réduction Schrödinger n'est pas disjointe du versant semiclassique : elle l'organise au contraire de manière cohérente, avec un passage explicite entre dynamique d'enveloppe, courant conservé et régime de phase rapide.

Portée de la réduction. Le lien entre HSM et la mécanique quantique effective ne repose donc pas seulement sur une analogie de structure, mais sur une réduction explicite des équations fondamentales vers une équation de Schrödinger pour l'enveloppe lente. C'est sur cette base que peuvent ensuite être lus l'espace d'états effectif, la lecture opérationnelle de type Born, le théorème d'Ehrenfest et la quantification semiclassique.

33.2.2 Lecture probabiliste, Ehrenfest et régime semiclassique

Espace d'états effectif. Dans cette réduction, les configurations pertinentes se décrivent par des amplitudes complexes vivant dans un espace d'états effectif, muni du produit scalaire hérité de la structure énergétique et de la normalisation des modes. Ce cadre permet d'identifier une densité de probabilité, un courant associé, et donc une lecture opérationnelle de type mécanique quantique. Il ne s'agit pas ici d'un postulat indépendant : la structure hilbertienne apparaît comme la forme naturelle prise par la dynamique réduite des enveloppes dans le régime considéré.

Lecture probabiliste. Une fois l'équation réduite obtenue, la conservation du courant associé et la stabilité de la norme permettent une lecture probabiliste du régime réduit. La densité $|\psi|^2$ de l'enveloppe effective joue alors le rôle d'une densité de présence transportée par le courant conservé.

Cette construction rend disponible une lecture opérationnelle de type Born dans la fenêtre d'enveloppe considérée. Elle ne constitue toutefois pas, à elle seule, une dérivation complète de la théorie de la mesure ni du passage général entre densité de présence effective et probabilité de détection. Le point établi ici est plus précis : dans le régime réduit, la norme conservée fournit la grandeur naturelle sur laquelle s'appuie la lecture probabiliste.

Diffraction, interférences et phase interne. La réduction quantique effective ne se limite pas à reproduire une équation de type Schrödinger ; elle éclaire aussi l'origine de phénomènes emblématiques de la mécanique quantique ondulatoire, en particulier la diffraction et les interférences. Dans la lecture HSM, ces phénomènes ne sont pas seulement l'effet formel d'une fonction d'onde abstraite, mais la manifestation de solutions dotées d'une structure interne de phase et de rotation. En particulier, pour les solutions de type bump 2DOF, la géométrie de propagation et la phase de rotation interne déterminent conjointement la réponse interférentielle et la loi de diffraction effective.

Superposition et franges d'interférence. Lorsque deux contributions cohérentes d'un même mode ou de deux voies effectives se recombinent, la dynamique d'enveloppe conduit naturellement à une superposition d'amplitudes complexes. Les franges d'interférence ne résultent alors pas d'un hasard de détection posé a posteriori, mais de la combinaison de phases portées par les solutions elles-mêmes. Dans cette lecture, les figures d'interférence et les schémas de recombinaison cohérente de type deux-voies relèvent du même régime d'enveloppe complexe : ils peuvent donc être décrits dans la réduction quantique effective, sans postuler une règle d'interférence extérieure à la dynamique de phase.

Angle de diffraction et phase de rotation interne. La théorie montre en outre que l'angle de diffraction ne se réduit pas à une simple donnée cinématique extérieure : il est lié à la structure de phase de la solution et, pour le secteur bump 2DOF, à la rotation interne qui accompagne sa propagation. Ainsi, HSM ne se limite pas à reformuler la diffraction dans le langage usuel : la réduction permet d'associer la phase d'onde effective à la phase interne de rotation du mode, lorsque cette structure interne est présente. La portée de cette lecture reste celle du régime d'enveloppe et des solutions considérées.

Paquets d'onde et théorème d'Ehrenfest. Dans le régime des paquets d'onde suffisamment localisés, la dynamique de l'enveloppe permet de retrouver une évolution des observables moyennes de type Ehrenfest. Les centres de paquets suivent alors, à l'ordre dominant, la dynamique classique effective gouvernée par le potentiel lent V_{eff}. La réduction HSM $\to$ mécanique quantique effective recouvre ainsi non seulement l'équation de Schrödinger, mais aussi le pont standard entre évolution quantique et dynamique classique moyenne.

Régime semiclassique et quantification EBK. Lorsque la phase varie rapidement relativement à l'enveloppe, on retrouve un régime semiclassique dans lequel l'évolution est gouvernée par une dynamique de type Hamilton–Jacobi corrigée, et où la quantification des familles stables peut être formulée dans le langage EBK. Ce point est essentiel : il montre que HSM recouvre non seulement la mécanique quantique linéaire effective, mais aussi le pont standard entre dynamique classique réduite et quantification semiclassique.

Systèmes composés et états non factorisables. Une fois établis l'espace d'états effectif, la dynamique de type Schrödinger et la lecture probabiliste, la composition de sous-systèmes conduit naturellement à une structure tensorielle effective

$$\mathcal{H}_{12}^{\text{eff}} = \mathcal{H}_1^{\text{eff}} \otimes \mathcal{H}_2^{\text{eff}}.$$

Les états factorisables n'en constituent alors qu'un sous-ensemble ; des états non factorisables apparaissent de droit dans le cadre quantique ainsi obtenu. Dans ce cadre effectif, l'existence d'états non factorisables est donc une conséquence de la structure tensorielle de l'espace d'états réduit. L'intrication est alors disponible dans le langage effectif obtenu, sans qu'il soit nécessaire d'ajouter une règle séparée au niveau de cette réduction. L'existence, dans la théorie, de solutions globales corrélées dont la composante modale réduite non factorisable est explicitée en (25.8) renforce cette lecture, sans que leur construction détaillée relève du présent chapitre.

Portée explicative de la réduction quantique. La présente réduction ne se limite pas à reproduire une forme d'équation de Schrödinger. Elle permet aussi, dans les secteurs où les solutions correspondantes ont été construites, d'associer certains phénomènes quantiques à des structures internes de phase, de corrélation ou de composition. C'est en particulier le cas des corrélations globales et de la non-séparabilité : dans ces régimes, elles ne sont pas seulement représentées par des vecteurs abstraits de l'espace d'états, mais peuvent être reliées à des solutions globales corrélées. Certaines pertes de cohérence de phase peuvent également recevoir une lecture interne lorsqu'elles proviennent d'un désalignement ou d'une moyennisation de phases. Cette portée reste toutefois celle des régimes explicitement construits ; elle ne constitue pas une dérivation générale de toute la phénoménologie quantique.

Conclusion de la section. HSM reproduit donc plusieurs structures centrales de la mécanique quantique effective dès lors que l'on se place dans un régime d'enveloppe lente, de séparation d'échelles et de localisation modale approprié. Cette couverture inclut la réduction explicite vers une équation de Schrödinger, l'espace d'états effectif, la lecture probabiliste, les systèmes composés, le théorème d'Ehrenfest et le versant semiclassique/EBK. Elle ne se réduit pas à une simple analogie de structure : dans plusieurs cas, la théorie fournit aussi une lecture interne complémentaire de phénomènes que la formulation usuelle décrit au niveau probabiliste ou formel, notamment du côté des corrélations globales, de la non-séparabilité, et des phénomènes d'interférence ou de diffraction dans les régimes où les solutions correspondantes sont explicitement construites.

33.3 Théorie quantique des champs effective locale

33.3.1 Champs effectifs, lagrangiens locaux et quantification

Objet de la réduction. On montre dans cette section que la réduction quantique issue de HSM ne se limite pas à une dynamique de type fonction d'onde, mais qu'elle admet aussi, dans une fenêtre locale de basse énergie, de petites fluctuations et de séparation d'échelles, une lecture en termes de champs effectifs quantifiés. Le point visé n'est donc pas de postuler une théorie des champs extérieure au cadre HSM, mais d'identifier les régimes dans lesquels certains degrés de liberté collectifs de la théorie se réorganisent sous la forme de champs locaux, gouvernés par des lagrangiens effectifs, des algèbres modales, des propagateurs et des amplitudes.

Chaîne logique. La chaîne de réduction étudiée ici prolonge celle de la mécanique quantique effective :

modes et solutions HSM $\longrightarrow$ variables collectives locales $\longrightarrow$ action effective quadratique puis faiblement n

Le passage décisif est l'identification d'un régime où les fluctuations pertinentes peuvent être décrites localement, après coarse-graining et linéarisation contrôlée, par un nombre fini de champs effectifs porteurs des degrés de liberté utiles. La portée de cette construction est donc celle d'une description locale effective, et non celle d'une théorie des champs fondamentale indépendante posée comme nouvel axiome.

Champs effectifs et lagrangien local. Dans cette fenêtre locale, les objets fondamentaux de HSM ne sont pas lus comme des particules ponctuelles élémentaires au sens usuel, mais comme des configurations sous-jacentes dont les fluctuations organisées définissent des champs effectifs. Au rang quadratique, ces champs obéissent à des équations locales du second ordre, et l'on peut les coder dans un lagrangien effectif contenant :

termes cinétiques + termes de masse effectifs lorsque le secteur en possède + interactions faibles ou résiduelle

Cette forme est celle attendue d'une théorie quantique des champs locale effective, dans la limite où les non-localités globales, les effets de maille et les corrections de raccord sont négligeables à l'échelle considérée.

Quantification effective des modes. Une fois le secteur quadratique identifié, la décomposition en modes propres permet une lecture en termes d'oscillateurs effectifs. Dans le langage standard de la QFT réduite, ces amplitudes modales peuvent être représentées par des opérateurs de création et d'annihilation effectifs, avec les relations algébriques adaptées au secteur considéré.

Le statut de cette étape doit être précisé. HSM fournit en amont le comptage des degrés de liberté, les familles de solutions et les classes géométriques de spin. En revanche, le seul fait qu'une solution porte un spin géométrique demi-entier ne constitue pas, par lui-même, une démonstration complète du théorème spin–statistique effectif. Les relations canoniques utilisées ici doivent donc être lues comme la représentation QFT effective du secteur réduit, une fois la lecture bosonique ou fermionique du secteur identifiée.

Cette étape ne constitue pas l'introduction d'une dynamique étrangère à HSM : elle formalise, dans le langage standard de la QFT effective, la structure des fluctuations élémentaires déjà sélectionnées par la réduction locale. Les modes propres jouent alors le rôle de quanta effectifs dans la fenêtre considérée, sans que le présent chapitre prétende dériver à lui seul toute l'algèbre canonique fondamentale.

33.3.2 Propagateurs, amplitudes et domaine de validité

Propagateurs et causalité locale effective. Le lagrangien quadratique quantifié détermine des propagateurs effectifs qui organisent la réponse linéaire, la propagation des excitations et les noyaux de corrélation à deux points. Dans la fenêtre locale où la réduction est valide, ces propagateurs portent la structure habituelle des champs libres ou faiblement couplés : pôles effectifs, masses de secteur lorsque présentes, propagation à vitesse caractéristique, et corrélateurs locaux.

La causalité ainsi obtenue doit être lue comme une causalité locale effective : elle vaut dans la limite où la description par champs locaux est légitime, sans préjuger de la structure globale complète du cadre HSM hors de cette fenêtre.

Interactions et amplitudes. Au-delà du rang quadratique, les couplages résiduels entre champs effectifs engendrent des vertex locaux dans les régimes où l'approximation de localité est contrôlée. On peut alors organiser les amplitudes de diffusion dans le langage perturbatif adapté à la fenêtre considérée. Le sens de cette lecture est important : le présent chapitre n'affirme pas qu'une QFT fondamentale indépendante est postulée d'emblée, mais que HSM

reproduit, dans certains régimes locaux, la forme effective de champs, de propagateurs, de vertex et d'amplitudes utilisés dans le langage QFT.

Les sections suivantes préciseront cette réduction secteur par secteur : électromagnétique-like, faible-like, fort-like et, lorsque le régime local le permet, gravitationnel-like.

Domaine de validité. La lecture QFT locale suppose simultanément :

1. une séparation d'échelles suffisante entre la taille interne des modes, l'échelle de variation du fond et l'échelle d'observation ;
2. une linéarisation ou quasi-linéarisation autour d'un fond ou d'une solution de référence ;
3. une fenêtre de basse énergie relativement aux échelles microscopiques où les détails de maille, de raccord ou de fermeture ne peuvent plus être négligés ;
4. une localité effective, c'est-à-dire une description par opérateurs locaux valable après coarse-graining.

Hors de cette fenêtre, le langage QFT peut rester utile comme approximation, mais il ne doit plus être confondu avec la dynamique complète de HSM.

Portée du résultat. Le résultat de cette section est donc une réduction effective vers le langage de la théorie quantique des champs locale. HSM fournit, dans les régimes où les conditions précédentes sont satisfaites :

— des champs effectifs issus des fluctuations organisées de la théorie ;
— un lagrangien local quadratique, prolongé par des interactions faibles ou résiduelles ;
— une quantification effective des modes ;
— des propagateurs, corrélateurs et amplitudes de type QFT.

La portée du lien est celle d'une réduction locale contrôlée, valable dans un régime de basse énergie, de petites fluctuations et de séparation d'échelles suffisante. Ce qui est établi ici est donc une lecture QFT effective locale de certains secteurs, et non l'introduction d'une théorie indépendante extérieure à HSM.

Suite. Cette réduction générale doit maintenant être spécialisée aux différents secteurs d'interaction. On examinera ainsi comment les canaux électromagnétique-like, faible-like, fort-like et, lorsque cela est pertinent dans cette fenêtre, gravitationnel-like, se lisent dans le domaine quantique effectif comme des secteurs d'interaction locaux ou quasi-locaux.

33.4 Secteurs d'interaction du domaine quantique

Objet de la section. La réduction en théorie quantique des champs effective locale n'a de portée physique que si elle permet d'identifier, dans le régime quantique effectif issu de HSM, des secteurs d'interaction lisibles dans le langage usuel. L'objet de cette section est donc de montrer que les grands canaux d'interaction déjà mis en évidence dans les chapitres théoriques de HSM se laissent interpréter, dans leur fenêtre de validité propre, comme des secteurs effectifs reconnus du domaine quantique : canal électromagnétique-like, canal faible-like, canal fort-like, et, lorsque la lecture locale est pertinente, canal gravitationnel-like.

Principe général. Le point central est que le présent chapitre n'introduit pas ici de nouveaux champs par simple analogie. Les secteurs considérés ont déjà été construits, au niveau qui leur est propre, dans les parties théoriques du document : existence des canaux, formes des équations effectives, sources, fermetures minimales ou complètes suivant les cas, et, lorsqu'elles existent, lectures statiques ou dynamiques associées. Le rôle de cette section est seulement de montrer

en quel sens ces objets recouvrent les secteurs d'interaction familiers du domaine quantique effectif.

Chaîne logique commune. Pour chacun de ces secteurs, la chaîne de lecture est la même :

canal HSM déjà établi $\longrightarrow$ équation effective locale ou quasi-locale $\longrightarrow$ médiation d'une interaction $\longrightarrow$ le

Selon la structure du canal considéré, cette lecture prendra la forme d'un échange à longue portée, d'un échange massif à portée finie, d'une interaction de confinement ou d'une lecture géométrique effective. La diversité des secteurs ne rompt donc pas l'unité de méthode : tous sont lus comme des réalisations effectives, sous contrôle, d'interactions déjà contenues dans HSM.

33.4.1 Secteur électromagnétique-like

Lecture abélienne effective. Lorsque la fermeture abélienne effective est établie, le canal électromagnétique-like se lit localement comme un secteur de type Maxwell, porté par un champ vectoriel effectif, des sources conservées et une propagation à grande portée. Dans la fenêtre quantique locale, ce secteur fournit donc la lecture QFT d'un échange vectoriel abélien, avec ses quanta effectifs, son propagateur et ses amplitudes d'interaction. Le point important ici est que cette lecture n'est pas ajoutée depuis l'extérieur : elle prolonge la fermeture déjà obtenue du secteur électromagnétique-like dans les parties théoriques.

33.4.2 Secteur faible-like

Médiation massive et portée finie. Le canal faible-like, dans son état actuel de fermeture, apparaît comme un secteur médié à portée finie. Sur la branche source pertinente, la théorie établit un canal de type faible-like, doté d'un médiateur effectif massif et d'une lecture locale de type Yukawa, dont la limite à basse impulsion conduit à une interaction locale de type Fermi. Le rôle du présent chapitre est ici précis : il ne s'agit pas de reconstruire en ce point toute une théorie électrofaible fondamentale indépendante, mais d'établir que HSM recouvre effectivement le *domaine faible basse énergie* connu en MQ/QFT, c'est-à-dire un échange massif de courte portée et sa réduction locale contrôlée.

33.4.3 Secteur forte-like

Canal de liaison et portée courte. Le secteur fort-like, tel qu'il est construit dans la théorie HSM, se lit dans le domaine quantique effectif comme un canal de médiation à courte portée structurant les états composés. La fermeture du médiateur, de la portée, de la charge de canal, de la normalisation effective, du potentiel attractif et de la self-énergie locale permet de l'identifier ici comme un secteur d'interaction forte effective. La lecture pertinente, dans la fenêtre considérée, est celle d'un mécanisme de liaison et de confinement à courte portée pour les états composés. Ainsi, sans introduire de structure extérieure au cadre HSM, le domaine quantique effectif recouvre un secteur fort-like de portée finie, susceptible d'être lu dans le langage usuel comme un canal d'interaction forte effective. Lorsqu'une reformulation locale plus riche est disponible, elle peut affiner cette lecture ; mais, pour le présent chapitre, le point essentiel est déjà acquis : HSM contient un secteur fort-like identifiable dans le domaine quantique effectif.

Confinement de jauge : lecture effective par tube de flux

Objet de la lecture. La réduction tubulaire du canal fort-like établie en §21.2.2 montre que, dans les configurations composées où le flux est guidé entre deux sous-structures internes,

la minimisation transverse définit une tension effective positive

$$\sigma_{\text{eff}} > 0,$$

et une énergie longitudinale

$$E_{\text{tube}}(R) = \sigma_{\text{eff}} R + E_{\text{cap}} + o(R).$$

Le présent chapitre n'en redonne pas la dérivation. Il en explicite seulement la lecture dans le langage QFT effectif.

Auto-confinement et confinement de jauge. Il convient de distinguer deux niveaux. L'*auto-confinement* désigne le fait qu'une solution HSM possède une structure interne localisée et stable sans se dissocier librement ; cette propriété concerne les solutions unitaires et relève de leur dynamique propre. Le *confinement de jauge*, au sens utilisé ici, désigne une propriété différente : l'existence, dans un état composé, d'un flux de canal dont l'énergie minimale croît avec la séparation des pôles ou sous-structures qui le portent.

Potentiel linéaire effectif. D'après (21.38), la réduction tubulaire donne

$$\boxed{V_{\text{conf}}(R) \geq \sigma_{\text{eff}} R - C.} \tag{33.2}$$

Cette croissance linéaire interdit la séparation libre des constituants porteurs du flux sans coût énergétique croissant. Elle constitue la signature statique effective du confinement dans la fenêtre tubulaire du canal fort-like.

Lecture QFT du tube de flux. Dans le langage usuel de la QFT, une configuration de ce type se lit comme un tube de flux reliant les pôles internes pertinents du système. Le potentiel (33.2) fournit alors la lecture IR d'un confinement de jauge : les degrés de liberté porteurs du flux ne se séparent pas librement en asymptotique, parce que l'énergie stockée dans le tube croît avec leur éloignement. Le confinement n'est donc pas introduit ici comme une propriété postulée de l'extérieur ; il est la lecture effective du résultat tubulaire établi pour le canal fort-like.

Lien avec le critère de Wilson. Dans une formulation effective en temps euclidien ou en énergie statique, une croissance linéaire du potentiel se traduit, dans le langage standard, par une loi d'aire pour la boucle de Wilson effective associée :

$$\langle W(\mathcal{C}) \rangle \sim e^{-\sigma_{\text{eff}} \operatorname{Area}(\mathcal{C})} \qquad \text{pour les grandes boucles rectangulaires.}$$

Le présent chapitre ne redémontre pas le formalisme de Wilson. Il utilise seulement le lien standard suivant : dès qu'une tension de tube positive et une borne linéaire de potentiel sont établies dans la réduction, la lecture de type loi d'aire devient disponible dans le langage QFT effectif.

Rôle des solutions unitaires et des composés. Pour les solutions unitaires 3DOF, on parle d'abord de structure interne localisée et, le cas échéant, d'auto-confinement. Pour les états composés 3DOF, en revanche, une configuration de flux reliant plusieurs pôles ou sous-structures fournit la lecture de type tube de flux et donc la lecture QFT du confinement. Le présent bloc ne confond pas ces deux niveaux : il montre qu'ils relèvent d'un même canal fort-like, mais avec deux lectures effectives distinctes selon la nature unitaire ou composée de l'état.

Portée du résultat. Le résultat établi est une lecture effective du confinement dans la fenêtre tubulaire :

1. HSM contient un canal fort-like déjà construit au niveau théorique ;
2. ce canal admet, dans certaines configurations composées, une organisation tubulaire du flux ;
3. la réduction transverse fournit une tension positive $\sigma_{\text{eff}} > 0$;
4. l'énergie minimale croît linéairement avec la longueur ;
5. cette croissance fournit la signature effective d'un confinement de jauge dans le langage QFT.

Il ne s'agit donc ni d'un simple mot plaqué sur le fort-like, ni d'une reconstruction extérieure de la QCD standard, mais d'une passerelle effective explicitant en quel sens le canal fort-like reproduit la signature IR du confinement.

Conclusion du bloc. Dans le domaine quantique effectif, HSM contient un canal fort-like de liaison. Lorsque ce canal s'organise en tube de flux, le résultat théorique §21.2.2 fournit une tension positive, un potentiel linéaire et donc la lecture QFT effective du confinement. Cette pièce complète la lecture du secteur fort-like : au-delà de la liaison locale, la fenêtre tubulaire donne la signature IR attendue d'un mécanisme de confinement.

33.4.4 Secteur gravitationnel-like dans le domaine quantique

Lecture quantique locale du canal gravitationnel-like. Dans la mesure où un canal gravitationnel-like a été fermé au niveau effectif, on peut aussi en proposer une lecture dans le domaine quantique local. Cette lecture n'a pas pour objet premier la reconstruction complète d'une gravitation quantique fondamentale, mais l'identification, dans la fenêtre locale appropriée, d'un couplage effectif universel ou quasi-universel compatible avec la lecture gravitationnelle du canal. En pratique, ce secteur sera repris plus largement dans la partie relativiste et gravitationnelle ; ici, il n'est mentionné que pour souligner que la chaîne de réduction quantique ne s'arrête pas aux seuls canaux électromagnétique, faible et fort.

Unité et différence de portée. Ces différents secteurs ne doivent pas être lus comme des blocs homogènes au même degré d'achèvement. Dans certains cas, HSM fournit déjà une fermeture suffisamment explicite pour une lecture locale quasi canonique ; dans d'autres, la théorie établit surtout l'existence d'un canal et sa structure effective dominante, sans qu'une réécriture complète dans tous les langages usuels soit encore justifiée. Le présent chapitre doit donc maintenir une discipline de portée : ce qui est affirmé pour chaque interaction est exactement ce qui est permis par la chaîne de réduction effectivement démontrée ailleurs dans le document.

Conclusion de la section. Le résultat général est que HSM ne donne pas seulement un cadre quantique effectif abstrait, mais qu'il y organise aussi des *secteurs d'interaction* lisibles dans le langage du domaine quantique usuel. Les canaux électromagnétique-like, faible-like, fort-like et gravitationnel-like ne sont pas des analogies extérieures surajoutées ; ils correspondent, dans le régime quantique effectif, à des structures d'interaction déjà construites dans la théorie, avec le niveau de fermeture propre à chaque secteur. Ce point prépare naturellement la section suivante, consacrée non plus aux secteurs d'interaction eux-mêmes, mais aux structures internes du domaine quantique, notamment les bases de masse, les bases de saveur et les matrices de mélange.

33.5 Structures internes du domaine quantique

Objet de la section. Après avoir identifié les secteurs d'interaction du domaine quantique effectif, il reste à montrer que HSM reproduit aussi, dans certains sous-espaces réduits, plusieurs structures internes caractéristiques de la physique quantique des particules : distinction entre base de couplage et base propre de propagation, diagonalisation unitaire, matrices de mélange, et, lorsque la structure d'orientation est disponible, lecture chirale effective. L'enjeu de cette section n'est donc pas d'ajouter une structure phénoménologique extérieure à HSM, mais de préciser en quel sens la théorie contient déjà les ingrédients permettant une lecture de type saveur, mélange et chiralité dans le langage usuel.

33.5.1 Raccord masse–saveur de la réduction projective 3×2

Objet du raccord. Le raccord effectué ici part de la solution composée $\mathcal{C}_{3\times2}(q_1, q_2, q_3)$, définie au chapitre 24. Dans la formulation retenue, cette solution est construite comme un composé de six constituants bump 2DOF en fort recouvrement. La structure 3×2 apparaît ensuite comme une réduction effective : les six sous-lobes se regroupent en trois paires cohérentes, puis la projection interne sélectionne trois témoins collectifs breather-like.

La construction mécanique de cette réduction est donnée par (24.20). L'évaluation numérique du triplet sélectionné est donnée en §30.3. Elle fournit la matrice interne réduite (30.36)

et les angles internes (30.37). Ces grandeurs restent des sorties internes de la solution composée.

Lecture mécanique HSM. Dans HSM, les trois directions

$$T_{q_1}, \qquad T_{q_2}, \qquad T_{q_3}$$

sont des témoins collectifs projetés du composé six-bump. Elles ne sont pas trois breathers 2DOF posés comme constituants indépendants au départ. Les couplages internes de préclusion, de raideur fine et de canal EM–like projeté rendent ces témoins non diagonaux dans la matrice réduite

$$\mathcal{M}_{\mathrm{red}}^{D_\eta}.$$

Les modes propres

$$M_1, \qquad M_2, \qquad M_3$$

sont donc les organisations cohérentes du composé, c'est-à-dire les manières propres dont les six sous-lobes peuvent se regrouper et s'équilibrer dans la branche considérée.

La diagonalisation

$$\mathcal{M}_{\mathrm{red}}^{D_\eta} U_{\mathcal{C}} = U_{\mathcal{C}} \Lambda_{\mathcal{C}}$$

ne définit pas une masse absolue des modes propres. Elle définit la matrice de passage interne entre la base des témoins collectifs projetés et la base des modes propres du composé.

Raccord au langage masse–saveur. Dans le langage standard des oscillations neutrino, la matrice PMNS relie une base d'états couplés aux interactions faibles, appelée base de saveur, à une base propre de propagation, appelée base de masse [2, 3]. Le raccord HSM consiste à lire la base des témoins collectifs projetés

$$\{T_{q_1}, T_{q_2}, T_{q_3}\}$$

comme le support mécanique projeté de la base de couplage faible, et les modes propres

$$\{M_1, M_2, M_3\}$$

comme le support mécanique projeté de la base de propagation.

Dans cette lecture, la matrice interne $U_{\mathcal{C}}$ joue le rôle de la matrice de passage entre ces deux bases. Au rang réel LO, le raccord s'écrit

$$U_{\mathrm{mix}}^{\mathrm{eff}} = P_{\mathrm{L}}\, U_{\mathcal{C}}\, P_{\mathrm{R}}, \tag{33.3}$$

où P_{L} et P_{R} sont des matrices diagonales de phases associées aux conventions de phase des bases externes. Dans la réduction réelle LO, ces phases ne modifient pas les trois angles de mélange.

On obtient alors la correspondance angulaire

$$\boxed{(\theta_{12}^{\mathrm{eff}}, \theta_{13}^{\mathrm{eff}}, \theta_{23}^{\mathrm{eff}})_{\mathrm{LO}} = (\vartheta_{12}, \vartheta_{13}, \vartheta_{23}).} \tag{33.4}$$

Valeurs internes raccordées. Pour le triplet évalué en §30.3, les angles internes de la réduction projective 3×2 sont

$$\boxed{(\vartheta_{12}, \vartheta_{13}, \vartheta_{23}) \simeq (33.4^\circ,\ 8.6^\circ,\ 49.3^\circ\text{–}49.5^\circ).} \tag{33.5}$$

Ces valeurs ne sont pas introduites comme paramètres phénoménologiques extérieurs : elles proviennent de la diagonalisation interne (30.37) du composé $\mathcal{C}_{3\times 2}$.

Portée du raccord. La correspondance (33.4) ne transforme pas la matrice réduite $\mathcal{M}_{\mathrm{red}}^{D_\eta}$ en matrice de masse absolue. Elle établit seulement que la matrice interne des modes propres du composé possède, dans la projection masse–saveur du langage standard, la structure réelle à trois angles d'une matrice de mélange leptonique.

La présente réduction porte uniquement sur le sous-secteur réel LO des trois angles. Elle ne déduit pas de masse absolue des modes propres du composé et ne fixe pas de phase de Dirac. Les effets de phase ou les corrections au-delà du rang réel LO relèvent d'une extension de la correspondance.

33.5.2 Structure chirale effective

Objet de la réduction chirale. La théorie HSM ne se contente pas d'admettre des modes internes multiples : elle distingue aussi certaines solutions unitaires par leur sens de rotation interne. L'objet de cette sous-section est de montrer que cette orientation peut induire, dans les secteurs où les couplages correspondants sont établis, une séparation effective de l'espace des états en deux classes couplées différemment. C'est en ce sens précis que HSM admet une lecture chirale effective dans le domaine quantique.

Invariant d'orientation. À toute solution unitaire fermion-like du secteur considéré, on associe un signe d'orientation interne

$$\chi \in \{+1, -1\},$$

défini par le sens de rotation de la solution sur son cycle interne. Ce signe est intrinsèque à la solution et reste invariant tant que l'on demeure dans le même secteur réduit et dans la même classe de stabilité.

Propagation de χ dans les couplages effectifs. Le point décisif est que ce signe d'orientation ne reste pas seulement un marqueur cinématique interne. Dans les canaux où la fermeture est établie, il peut contrôler le signe ou la classe de certains couplages effectifs. On peut résumer cette dépendance sous la forme schématique

$$Q_{\mathrm{EM}} \propto \chi, \qquad I_{\mathsf{s}} \propto \chi,$$

ou par l'analogue sectoriel correspondant lorsque le canal considéré porte le même quantum d'orientation. Cette écriture doit être lue comme une relation de structure : le signe de rotation distingue deux classes de solutions qui répondent différemment aux canaux de couplage concernés.

Décomposition de l'espace des états. Cette distinction induit une décomposition naturelle de l'espace effectif des états fermion-like :

$$\mathcal{H}_{\mathrm{fermion}} = \mathcal{H}_{+} \oplus \mathcal{H}_{-},$$

où $\mathcal{H}_{+}$ regroupe les états de signe d'orientation $\chi = +1$ et $\mathcal{H}_{-}$ ceux de signe $\chi = -1$. Il ne s'agit pas d'une décomposition arbitraire : elle est imposée par la réponse différente des deux classes d'orientation aux canaux effectifs qui héritent du signe χ.

Lecture chirale effective. Dans la lecture QFT effective, cette décomposition peut être mise en correspondance avec une décomposition chirale :

$$\mathcal{H}_{\mathrm{fermion}} = \mathcal{H}_{L} \oplus \mathcal{H}_{R},$$

où les sous-espaces $\mathcal{H}_L$ et $\mathcal{H}_R$ correspondent aux deux classes d'états distinguées par leur orientation interne et par leurs couplages effectifs. Cette identification est une lecture effective : elle ne postule pas une structure chirale extérieure, mais traduit dans le langage usuel une dissymétrie déjà présente dans les solutions unitaires.

Sens physique de la chiralité. La chiralité n'est donc pas introduite ici comme un concept extérieur plaqué sur HSM. Elle apparaît comme la lecture, dans le langage quantique effectif, d'une dissymétrie interne de rotation. Le passage HSM $\to$ QFT se fait ainsi par trois étapes :

$$\text{orientation interne } \chi \longrightarrow \text{couplages effectifs distingués} \longrightarrow \text{décomposition chirale effective.}$$

La portée de cette lecture est celle des secteurs où la dépendance en χ des couplages a été établie.

Projections de spin et lecture effective QFT. Le cadre HSM ne fixe pas seulement la classe géométrique du spin (entière ou demi-entière), mais fournit aussi, selon les familles, une structure de projection effective. Pour les branches demi-entières, la projection le long de l'axe de propagation ou de l'axe interne sélectionné prend la forme

$$S_{\parallel} = \pm\frac{1}{2}\, h_{\mathrm{eff}}.$$

Pour les branches entières purement transverses, le rang meneur porte deux hélicités

$$S_{\parallel} = \pm h_{\mathrm{eff}},$$

sans que cela implique en général l'existence d'un triplet complet de projections. La branche scalaire radialement pure vérifie enfin

$$S = 0.$$

Ces résultats relèvent de la structure interne de HSM ; la QFT fournit ici leur lecture effective usuelle, et non leur fondement.

Portée du résultat. Le résultat établi ici est une *chiralité effective* au sens suivant :

1. les solutions fermion-like se répartissent en deux classes orientées ;
2. cette orientation peut commander le signe ou la classe de certains couplages effectifs ;
3. l'espace des états se décompose alors en deux sous-espaces physiquement distinguables ;
4. cette décomposition fournit la passerelle vers une lecture chirale dans le langage QFT.

Ce que l'on établit n'est donc pas une analogie de vocabulaire, mais une structure de passage effective entre HSM et la distinction chirale usuelle des états quantiques.

Conclusion de la sous-section. HSM admet ainsi une structure chirale effective dans le domaine quantique : le sens de rotation interne des solutions unitaires induit, dans les secteurs où les couplages correspondants sont établis, une séparation de l'espace des états en deux classes couplées différemment. La distinction gauche/droite n'est alors pas ajoutée extérieurement au formalisme ; elle est la lecture QFT effective d'une structure d'orientation déjà contenue dans les solutions HSM.

Le résultat doit néanmoins être limité à ce qui est effectivement établi ici : la sous-section fournit une passerelle vers une lecture chirale des secteurs réduits, mais ne dérive pas encore la forme complète des couplages faibles maximalement chiraux de type $V-A$. Une telle identification demanderait une fermeture sectorielle supplémentaire reliant explicitement les projecteurs d'orientation HSM aux couplages faibles effectifs.

33.6 Lecture EFT à basse énergie

33.6.1 Coarse-graining, opérateurs et matching

Objet de la section. Les réductions précédentes ont montré que HSM admet, dans des fenêtres appropriées, une lecture de type mécanique quantique effective, puis une lecture locale en termes de champs quantiques effectifs. Il reste à organiser ces mêmes résultats dans le langage plus synthétique d'une théorie effective à basse énergie. L'objet de cette section est donc de montrer qu'à l'échelle des grandes longueurs d'onde et des faibles impulsions, HSM se laisse organiser comme une EFT au sens usuel : degrés de liberté pertinents, action locale tronquée, hiérarchie d'opérateurs, matching des coefficients et domaine contrôlé de validité.

Chaîne de réduction. La logique suivie est la suivante :

HSM $\longrightarrow$ coarse-graining / séparation d'échelles $\longrightarrow$ action locale effective $\longrightarrow$ organisation par opérateur

L'idée centrale est qu'une fois intégrés ou gelés les degrés de liberté rapides, les excitations lentes restantes se décrivent par un nombre fini de champs effectifs et par une action locale développée en puissances des champs et de leurs dérivées. Ce passage ne constitue pas une hypothèse externe : il correspond à la forme naturelle prise par la théorie dès lors qu'une séparation d'échelles est effectivement disponible.

Action locale et hiérarchie d'opérateurs. Dans ce régime, l'action effective peut être organisée comme une somme d'opérateurs locaux classés par dimension effective ou par nombre de dérivées. Au premier rang apparaissent les termes quadratiques et les couplages locaux dominants déjà identifiés dans la lecture QFT. Les contributions d'ordre supérieur apparaissent ensuite comme corrections suppressées par une échelle de coupure effective Λ_{EFT}. Cette échelle n'est pas universelle par principe : elle dépend du secteur réduit, des modes intégrés et de la fenêtre de validité retenue. Elle est toutefois bornée par les échelles internes de HSM et ne doit pas être traitée comme un paramètre phénoménologique indépendant. Ainsi, la lecture EFT ne rajoute pas un nouveau contenu dynamique : elle réorganise, dans un langage de basse énergie, les structures locales déjà obtenues par réduction.

Matching. Le point propre à une EFT n'est pas seulement l'écriture d'opérateurs locaux, mais l'identification contrôlée de leurs coefficients. Dans le cas présent, le matching consiste à exprimer ces coefficients en fonction des constantes fondamentales de HSM, des structures de canal déjà fermées et des nombres purs de géométrie interne. Autrement dit, les paramètres effectifs de l'EFT ne sont pas laissés flottants par principe : ils héritent, au moins au rang meneur et dans les secteurs effectivement fermés, d'une origine déterminée dans la théorie sous-jacente. La lecture EFT de HSM est donc une EFT avec ancrage interne, et non un simple paramétrage phénoménologique indépendant.

Secteurs couverts. Cette organisation EFT s'applique en premier lieu aux secteurs déjà lisibles dans la réduction quantique locale. Le secteur abélien électromagnétique-like en fournit l'exemple le plus directement fermé. Le secteur faible-like admet une lecture EFT contrôlée dans sa portée basse énergie, où un échange massif de portée finie se réduit à une interaction locale effective. Le secteur fort-like peut être intégré à cette lecture dans les fenêtres où la fermeture de son canal est établie au niveau théorique, notamment pour les configurations de liaison ou de tube de flux déjà construites. Le secteur gravitationnel-like, enfin, n'entre dans cette organisation que dans la mesure où une écriture locale contrôlée est légitime dans la fenêtre considérée. Dans chacun de ces cas, la lecture EFT consiste à retenir les degrés de liberté pertinents, à intégrer les structures plus rapides ou plus massives, puis à coder leurs effets dans des opérateurs locaux et quasi-locaux ordonnés par importance.

Portée et cohérence. La portée de cette lecture doit être énoncée avec soin. Une EFT n'est pas une théorie fondamentale concurrente de HSM ; c'est une réécriture basse énergie d'un contenu déjà présent dans HSM. Sa validité exige une séparation d'échelles, une fenêtre impulsionnelle contrôlée et une troncature cohérente de l'action effective. Lorsque ces hypothèses sont satisfaites, les outils usuels de l'EFT deviennent disponibles : expansion en dérivées, matching sectoriel, amplitudes à basse énergie, lecture non abélienne effective lorsque la structure interne s'y prête, et, lorsque les hypothèses d'analyticité, d'unitarité effective et de séparation d'échelles sont satisfaites, contraintes de positivité et relations de dispersion. Les deux sections suivantes précisent justement ces deux derniers points, qui renforcent la portée démonstrative de la lecture EFT sans l'étendre au-delà de sa fenêtre de validité.

Fenêtre de validité. Le domaine couvert par cette lecture est celui où les longueurs d'onde considérées sont grandes devant les micro-échelles de la théorie, où les modes lourds ne sont pas excités explicitement, et où les corrections non locales ou fortement non perturbatives restent subdominantes. Dans cette fenêtre, la description par opérateurs locaux organisés hiérarchiquement est légitime ; en dehors d'elle, il faut revenir soit à la réduction QFT plus complète, soit directement aux structures HSM dont l'EFT n'était qu'une approximation contrôlée.

Conclusion de la section. HSM admet donc aussi, dans le domaine de basse énergie, une lecture en termes de théorie effective locale. La structure essentielle est la suivante : séparation d'échelles, coarse-graining, action locale ordonnée, coefficients ancrés dans la théorie, puis domaine de validité explicitement contrôlé. Ainsi, la lecture EFT n'est pas un ajout méthodologique extérieur ; elle constitue une forme réduite et organisée du contenu de HSM dans la fenêtre où les degrés de liberté lents dominent. Les sections suivantes en précisent deux conséquences importantes : l'apparition, dans certains sous-espaces réduits, d'une algèbre interne effective compatible avec une lecture non abélienne, puis les contraintes de positivité et de dispersion qui encadrent les opérateurs de basse énergie.

33.6.2 Algèbre interne effective et lecture non abélienne

Objet de la section. La lecture EFT à basse énergie ne se limite pas, dans HSM, à des secteurs abéliens ou à des interactions simplement paramétrées par des opérateurs locaux isolés. Lorsque les degrés de liberté internes pertinents se réorganisent en multiplets stables sous l'action d'opérateurs effectifs fermés, la théorie admet aussi une lecture non abélienne effective. L'objet de cette section est de montrer qu'une telle lecture n'est pas ajoutée de l'extérieur, mais qu'elle peut être fondée sur une structure interne déjà présente dans HSM.

Sous-espace interne effectif. On considère un sous-espace effectif $\mathcal{V}_{\text{int}}$ engendré par les modes internes pertinents d'un secteur réduit, en particulier dans les configurations 3DOF où apparaissent des composantes structurées non équivalentes. Sur cet espace, les opérations internes induites par les noyaux de couplage et par les projecteurs de canal définissent des endomorphismes effectifs agissant sur les multiplets retenus. Le point décisif est que, dans la fenêtre de réduction où cette action est bien définie, ces endomorphismes peuvent être organisés comme une famille finie de générateurs effectifs.

Commutateurs et fermeture. Soit $\{T^a\}$ une famille de générateurs effectifs agissant sur $\mathcal{V}_{\text{int}}$. Comme ces objets sont des opérateurs sur un sous-espace invariant, leur commutateur

$$[T^a, T^b] := T^a T^b - T^b T^a$$

définit encore un endomorphisme du même espace. Lorsque la famille choisie est fermée par commutation, on peut écrire

$$[T^a, T^b] = i\, f^{abc}\, T^c, \tag{33.6}$$

où les f^{abc} sont des constantes de structure effectives. L'antisymétrie du commutateur implique immédiatement

$$f^{abc} = -f^{bac}.$$

Ainsi, la fermeture non abélienne n'est pas postulée : elle apparaît comme la forme algébrique prise par l'action interne effective sur le sous-espace retenu.

Identité de Jacobi. Dès lors que les T^a sont lus comme opérateurs sur $\mathcal{V}_{\text{int}}$, l'identité de Jacobi

$$[T^a, [T^b, T^c]] + [T^b, [T^c, T^a]] + [T^c, [T^a, T^b]] = 0$$

est automatiquement satisfaite en tant qu'identité générale de l'algèbre des endomorphismes. Reportée sur les constantes de structure, elle donne la condition usuelle

$$f^{ade} f^{bce} + f^{bde} f^{cae} + f^{cde} f^{abe} = 0. \tag{33.7}$$

Autrement dit, dès qu'une famille fermée de générateurs effectifs est extraite de la dynamique interne de HSM, la structure de Lie correspondante est acquise au niveau de la réduction.

Lecture hermitienne et compacité effective. Dans la fenêtre où les générateurs effectifs se représentent par des opérateurs hermitiens sur l'espace interne muni de son produit scalaire effectif, la convention

$$[T^a, T^b] = i\, f^{abc} T^c$$

est la convention usuelle des algèbres compactes en représentation unitaire. Dans un sous-secteur simple effectivement isolé, la forme quadratique

$$\mathcal{K}^{ab} = f^{acd} f^{bcd} \tag{33.8}$$

se lit alors comme la métrique naturelle sur les générateurs effectifs. Il convient de formuler ce point avec discipline : ce qui est établi ici est une *lecture compacte effective* de l'algèbre interne dans la représentation réduite considérée ; il ne s'agit pas d'affirmer sans qualification une classification globale complète de toutes les structures internes possibles de HSM.

Portée non abélienne. Cette fermeture interne suffit néanmoins pour le rôle propre du présent chapitre. Elle montre que, lorsque HSM fournit un sous-espace invariant et une famille fermée de générateurs effectifs, la lecture non abélienne des secteurs réduits est fondée sur une structure interne réelle : générateurs, commutateurs, constantes de structure, identité de Jacobi et lecture compacte effective. Ainsi, les formes Yang–Mills locales invoquées dans la réduction EFT/QFT ne sont pas introduites ici comme un habillage extérieur ; elles correspondent à la réécriture, dans le langage usuel, d'une organisation interne déjà contenue dans la théorie.

Niveau de généralité. Le résultat ne doit toutefois pas être surinterprété. HSM fournit ici le prototype d'une lecture non abélienne effective sur les sous-espaces où la fermeture des générateurs est effectivement réalisée. Selon les secteurs et les multiplets considérés, cette lecture pourra rester minimale ou au contraire se déployer davantage. Le point établi dans le présent chapitre est donc la *disponibilité interne* d'une structure de Lie effective compatible avec une lecture compacte, et non l'énoncé prématuré d'une classification complète de toutes les algèbres réalisables.

En particulier, cette section n'identifie pas encore les algèbres spécifiques du Modèle Standard, telles que $SU(2)_L$, $SU(3)_c$ ou $U(1)_Y$. Elle établit seulement le mécanisme général par lequel une algèbre de Lie effective peut émerger d'un sous-espace interne invariant muni de générateurs fermés par commutation.

Conclusion de la section. Dans le domaine EFT à basse énergie, HSM admet donc une lecture non abélienne effective dans les sous-espaces où les degrés de liberté internes se ferment en une famille de générateurs agissant sur un sous-espace invariant. La structure de Lie correspondante — commutateur, constantes de structure, identité de Jacobi et lecture compacte effective — fournit le support conceptuel nécessaire à la réécriture Yang–Mills des secteurs concernés. Cette pièce complète le versant non abélien de la lecture EFT et prépare naturellement l'examen des contraintes de positivité et de dispersion.

33.6.3 Positivité, dispersion et contraintes EFT

Objet de la section. La lecture EFT à basse énergie n'est complète que si les opérateurs locaux retenus satisfont aussi les contraintes usuelles de cohérence : unitarité, causalité effective et positivité de certaines combinaisons de coefficients. L'objet de cette section est de montrer que, dans la fenêtre où l'EFT dérivée de HSM est légitime, ces contraintes ne sont pas simplement rappelées comme des conditions externes, mais qu'elles peuvent être reliées à la structure même de la réduction.

Amplitude avant et relation de dispersion. Considérons une amplitude de diffusion $2 \to 2$, $\mathcal{M}(s,t)$, dans le régime de basse énergie et à diffusion avant ($t = 0$). Sous les hypothèses usuelles d'analyticité locale et d'unitarité effective dans la bande considérée, la dérivée seconde de l'amplitude au point d'expansion satisfait une relation de dispersion de la forme

$$\mathcal{M}''(0) = \frac{2}{\pi} \int_{s_{\rm th}}^{\infty} ds \, \frac{\Im \mathcal{M}(s,0)}{s^3}, \tag{33.9}$$

où $s_{\rm th}$ désigne le seuil pertinent. Par l'optical theorem, on a

$$\Im \mathcal{M}(s,0) \propto s \, \sigma_{\rm tot}(s) \geq 0,$$

de sorte que le membre de droite est non négatif dans la fenêtre de validité de la description effective.

Conséquence pour l'EFT. À basse énergie, l'amplitude avant se développe en puissances de s. Les premières contributions directement contraintes par la dérivée seconde en limite avant sont celles qui portent le comportement quadratique en énergie, typiquement les opérateurs de dimension huit dans une organisation EFT usuelle. On écrit donc schématiquement

$$\mathcal{M}(s,0) = \mathcal{M}_{\text{canon}}(s) + \frac{s^2}{\Lambda_{\text{EFT}}^4} \sum_i \alpha_i \, c_i^{(8)} + \cdots ,$$

où les $c_i^{(8)}$ sont les coefficients effectifs des opérateurs de dimension huit retenus, et où les α_i sont des facteurs cinématiques dépendant du choix de canal, de polarisation et, le cas échéant, de structure interne. L'équation (33.9) impose alors la non-négativité des combinaisons effectivement sondées :

$$\sum_i \alpha_i \, c_i^{(8)} \geq 0. \tag{33.10}$$

Dans des canaux particuliers, cette contrainte peut se spécialiser en bornes plus simples sur certains coefficients pris séparément ; ce point dépend toutefois du choix de base EFT, des états d'entrée retenus et des hypothèses d'analyticité utilisées.

Ancrage dans HSM. Le point spécifique à HSM est que cette positivité dispersive n'est pas lue dans le vide. Dans la réduction de basse énergie, l'énergie quadratique effective provient d'un opérateur de noyau positif sur $\mathbb{S}^3$, avec mesure et fenêtres de projection déjà fixées par la théorie. Cette positivité du secteur quadratique implique, dans la fenêtre où l'intégration des modes rapides reste cohérente, l'absence de fantômes, la non-négativité des densités spectrales pertinentes et la convexité des contributions dominantes à l'amplitude réduite. Ainsi, les contraintes (33.10) sont compatibles avec l'ancrage HSM des coefficients EFT.

Portée du résultat. La portée du résultat doit être énoncée avec précision. Ce qui est établi ici est une *contrainte de positivité effective* sur les combinaisons de coefficients EFT accessibles dans la limite avant et dans la fenêtre où l'analyticité locale, l'unitarité effective et la séparation d'échelles sont valides. Il ne s'agit donc ni d'une affirmation hors domaine, ni d'une classification exhaustive de toutes les déformations possibles de l'EFT ; il s'agit d'un critère de cohérence supplémentaire imposé aux opérateurs dérivés de HSM dans le régime de basse énergie.

Conclusion de la section. HSM admet donc non seulement une lecture EFT locale à basse énergie, mais aussi, dans les fenêtres où les hypothèses de dispersion sont satisfaites, une partie des contraintes de cohérence associées. Dans la limite avant et sous les hypothèses de validité de la réduction, la combinaison de l'unitarité effective, de l'analyticité locale et de la positivité du secteur quadratique hérité de HSM impose des bornes de positivité sur les combinaisons de coefficients des opérateurs de dimension huit sondées en limite avant. Cette pièce renforce la portée démonstrative de la lecture EFT : celle-ci n'est pas seulement une réécriture commode, mais une réduction soumise à des contraintes de cohérence internes et testables.

Chapitre 34

HSM et domaine relativiste et gravitationnel

34.1 Cinématique relativiste effective

Objet de la section. Après avoir montré que HSM admet, dans les régimes appropriés, une lecture du domaine quantique effectif, il faut établir qu'elle admet aussi une lecture du domaine relativiste au sens cinématique. L'enjeu n'est pas ici de réintroduire la relativité comme postulat extérieur, mais de montrer que certaines structures déjà contenues dans la théorie conduisent, dans la fenêtre convenable, aux relations usuelles entre énergie, impulsion, vitesse limite et dynamique effective des états propagatifs.

Principe général. La passerelle recherchée est la suivante :

$$\text{solution propagative HSM} \longrightarrow \text{relation de dispersion effective} \longrightarrow \text{cinématique relativiste.}$$

Dans cette lecture, la relativité n'apparaît pas comme une surcouche axiomatique indépendante, mais comme la forme effective prise par la dynamique des excitations lorsqu'elles sont décrites à une échelle où la vitesse limite de propagation, l'organisation spectrale des modes et l'expression de l'énergie peuvent être lues dans un langage relativiste usuel.

Vitesse limite et structure de propagation. La théorie fixe une vitesse caractéristique de propagation

$$c_t = \sqrt{T/\rho},$$

qui joue le rôle de vitesse limite interne des excitations dans le régime considéré. Dès lors que la lecture observée identifie ce secteur propagatif au régime physique pertinent, cette vitesse limite fournit le support cinématique de la réduction relativiste. Le point décisif est que cette vitesse ne résulte pas d'une convention externe : elle est déjà contenue dans la structure fondamentale de HSM.

Énergie, impulsion et modes propagatifs. Lorsque les solutions ou quasi-solutions propagatives sont décrites par des modes de fréquence ω et de vecteur d'onde k, la théorie fournit une relation de dispersion dont la forme, dans le régime effectif adéquat, se lit comme une relation relativiste entre énergie et impulsion. C'est cette lecture qui permet d'identifier, selon les secteurs et les réductions considérées, les analogues effectifs des relations

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4, \qquad E = pc \quad \text{ou} \quad E \approx mc^2 + \frac{p^2}{2m},$$

non comme des postulats rapportés de l'extérieur, mais comme des formes limites ou réduites déjà contenues dans la théorie.

Réalisation explicite sur les branches mobiles. La cinématique relativiste effective évoquée ci-dessus n'est pas seulement un cadre abstrait de lecture. Elle est déjà réalisée explicitement, dans la théorie, par les branches mobiles des solutions localisées et propagatives. En particulier, dans le cadre quadratique sur $\mathbb{S}^3$, les lois de boost établies dans le chapitre correspondant donnent

$$E(u) = \Gamma\, E_0, \qquad P(u) = \Gamma\, \frac{u}{c_*^2}\, E_0, \qquad \Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c_*^2}}, \tag{34.1}$$

où c_* désigne la vitesse limite effective du secteur considéré. Dans la lecture propagative standard on prend $c_* = c_t$. Dans le cadre quadratique radial, lorsque ce dernier est le secteur cinématique pertinent, on peut avoir $c_* = c_r$. La notation c_* est donc seulement une notation locale de cette section pour éviter de confondre les différents secteurs cinématiques.

Conséquence inertielle. Le développement basse vitesse de (34.1) donne

$$E(u) = E_0 + \frac{1}{2}\, \frac{E_0}{c_*^2}\, u^2 + \mathcal{O}(u^4),$$

de sorte que la masse inertielle effective de la branche mobile vaut

$$M_{\mathrm{inert}} = \frac{E_0}{c_*^2}. \tag{34.2}$$

Autrement dit, les solutions localisées de HSM n'héritent pas seulement d'une lecture relativiste générale au niveau de la dispersion : leurs branches mobiles réalisent déjà explicitement la correspondance entre énergie de repos et masse inertielle dans la fenêtre cinématique appropriée.

Lecture pour les solutions HSM. Ce point sera utilisé implicitement dans toute la suite dès lors qu'une solution localisée ou quasi-localisée est traitée comme une entité mobile effective : la relation entre énergie de repos, impulsion et inertie n'est pas ajoutée de l'extérieur, mais héritée de la loi de boost propre à la branche considérée.

Portée de la réduction relativiste. Le résultat visé dans cette section est donc une *cinématique relativiste effective*. Cela signifie que HSM recouvre, dans la fenêtre considérée, les structures cinématiques essentielles de la relativité : vitesse limite, relation énergie–impulsion, distinction entre secteurs massifs et non massifs, et régimes limites usuels. Cette section ne traite pas encore de la gravitation proprement dite ; elle prépare seulement le terrain en établissant que le langage relativiste de propagation et de dispersion est déjà disponible dans HSM avant même l'introduction du secteur gravitationnel-like.

Organisation. On commencera par expliciter la structure de dispersion et son interprétation cinématique. On examinera ensuite la lecture des secteurs massifs et non massifs, puis la cohérence des limites non relativiste et ultrarelativiste. Cette base permettra ensuite d'aborder, dans les sections suivantes, le secteur gravitationnel-like, la limite newtonienne et la portée du lien avec une lecture de type relativité générale.

Conclusion d'ouverture. La question posée dans cette partie n'est donc plus celle de l'existence d'un cadre quantique effectif, mais celle de la lecture du domaine relativiste et gravitationnel. Le premier pas consiste à montrer que les excitations de HSM admettent déjà, dans leur régime de propagation effectif, une lecture cinématique relativiste cohérente.

34.2 Gravitation effective et limite newtonienne

Objet de la section. Une fois établie la lecture cinématique relativiste des excitations de HSM, il reste à montrer que la théorie admet aussi une lecture gravitationnelle effective. L'enjeu n'est pas d'introduire ici une interaction supplémentaire ajoutée de l'extérieur, mais de montrer qu'un canal gravitationnel-like déjà construit dans la théorie se lit, dans le régime approprié, comme une interaction attractive universalisante, et qu'il admet une limite newtonienne au sens usuel.

Chaîne de réduction. La passerelle visée est la suivante :

canal gravitationnel-like déjà établi $\longrightarrow$ potentiel effectif de longue portée $\longrightarrow$ accélération newtonienne —

Autrement dit, la gravitation n'est pas postulée séparément : elle apparaît comme la lecture, dans le langage usuel, d'une structure de médiation déjà contenue dans HSM et fermée sur ses constantes fondamentales.

Canal gravitationnel-like et universalité effective. Dans la théorie, le secteur gravitationnel-like se distingue des autres canaux par sa portée étendue et par le fait que sa source effective est liée à l'énergie ou à la densité d'énergie des structures considérées. Cette propriété est décisive pour la lecture gravitationnelle : l'interaction ne sélectionne pas seulement une charge sectorielle particulière, mais se couple effectivement, à l'ordre pertinent, à ce qui joue le rôle de contenu inertiel ou énergétique du système. C'est ce caractère universalisant qui fonde la passerelle vers le langage gravitationnel.

Potentiel de longue portée. Dans le régime statique ou quasi-statique, le canal gravitationnel-like induit un potentiel effectif de grande portée, dont la forme locale se lit, dans la fenêtre adéquate, comme un potentiel central attractif. À grande distance devant les micro-échelles internes, la structure obtenue se réduit à une loi de type

$$\Phi_{\mathrm{grav}}(r) \sim -\frac{G_{\mathrm{eff}} M}{r},$$

où G_{eff} désigne la constante gravitationnelle effective issue de la fermeture du canal gravitationnel-like, et M la masse ou l'énergie inertielle effective de la source. Le point important pour la présente section est que cette forme ne constitue pas une hypothèse extérieure : elle résulte de la réduction de longue portée du canal gravitationnel-like déjà construit.

Limite newtonienne. Dès lors qu'un potentiel effectif de type $1/r$ est établi, la dynamique des corps lents se lit, au premier ordre, dans le langage de la mécanique newtonienne. Si Φ_{grav} est lu comme potentiel gravitationnel par unité de masse, l'accélération d'une sonde prend la forme

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla \Phi_{\mathrm{grav}},$$

ou, de manière équivalente,

$$m\,\ddot{\mathbf{x}} = -m\,\nabla \Phi_{\mathrm{grav}}.$$

On retrouve ainsi une loi d'attraction inversement quadratique entre sources ponctuellement réduites. La gravitation newtonienne apparaît alors comme la limite basse vitesse, faible champ et grande distance de la médiation gravitationnelle effective de HSM.

Équivalence inertielle et gravitationnelle. Dans cette lecture, la coïncidence entre masse inertielle et masse gravitationnelle ne constitue pas un axiome indépendant, mais l'expression du fait que le canal gravitationnel-like se couple au même contenu effectif qui détermine déjà la réponse inertielle du système. Ainsi, la structure du potentiel et la dynamique de la sonde se lisent dans un schéma où la source du canal et le contenu inertiel proviennent d'un même fond théorique. Cette propriété est essentielle pour la cohérence de la limite newtonienne.

Portée du résultat. Le résultat établi ici est donc le suivant : HSM admet une gravitation effective dans le régime de longue portée, et cette gravitation possède une limite newtonienne bien définie. Ce qui est démontré à ce stade n'est pas encore l'intégralité du formalisme géométrique de la relativité générale, mais la disponibilité, dans HSM, d'un canal attractif universalisant dont la réduction statique et faible champ reproduit le domaine usuel de la gravitation newtonienne.

Articulation avec la suite. Cette section fournit donc le socle minimal du lien gravitationnel : existence d'un canal gravitationnel-like, potentiel de longue portée, limite newtonienne et cohérence inertielle. Sur cette base, la section suivante pourra examiner si, et en quel sens, cette lecture se prolonge vers une formulation plus générale de type relativité générale.

34.3 Lecture de type relativité générale

Objet de la section. Après avoir établi l'existence d'une cinématique relativiste effective et d'un secteur gravitationnel-like admettant une limite newtonienne, il reste à examiner si HSM admet aussi, dans une fenêtre appropriée, une lecture de type relativité générale. L'enjeu n'est pas de plaquer sur la théorie un formalisme géométrique extérieur, mais de montrer qu'à l'échelle où la gravitation se lit comme une déformation effective de la propagation, les structures déjà construites dans HSM peuvent être réorganisées dans le langage d'une géométrie dynamique.

Principe général. La passerelle recherchée est la suivante :

canal gravitationnel-like et dynamique effective $\longrightarrow$ déformation de la propagation $\longrightarrow$ lecture métrique eff

Autrement dit, la géométrisation n'est pas postulée a priori : elle apparaît lorsque la propagation des excitations et la dynamique des sondes peuvent être réécrites comme se déroulant dans une structure métrique effective dépendant du contenu énergétique du système.

Métrique effective et propagation. Dans le régime où le secteur gravitationnel-like agit comme une déformation lente du fond de propagation, l'effet du canal sur les trajectoires, les temps propres effectifs et les relations de dispersion peut être codé dans une métrique effective $g^{\mathrm{eff}}_{\mu\nu}$. Cette métrique n'est pas un objet fondamental ajouté à HSM ; elle est la réécriture, dans le langage relativiste usuel, d'une dynamique déjà contenue dans la théorie. La gravitation cesse alors d'être lue comme une simple force externe dans un espace fixe, et devient la manifestation effective d'une géométrie de propagation déformée.

Régime faible champ. Dans la limite de faible champ et de faibles vitesses, la lecture métrique effective doit se raccorder à la lecture newtonienne de la section précédente. La forme faible champ minimale compatible avec ce raccordement s'écrit

$$g^{\mathrm{eff}}_{00} \simeq -\Big(1+\frac{2\Phi}{c^2}\Big), \qquad g^{\mathrm{eff}}_{ij} \simeq \delta_{ij}\Big(1-\frac{2\Phi}{c^2}\Big),$$

ou une forme équivalente selon les conventions retenues, où Φ est le potentiel gravitationnel effectif dérivé du canal de longue portée.

Le statut de cette écriture est celui d'un raccordement effectif de faible champ : elle impose la compatibilité avec la limite newtonienne et avec la propagation relativiste effective, mais ne constitue pas à elle seule une dérivation complète des équations d'Einstein depuis HSM. Elle montre que la lecture géométrique peut prolonger la réduction précédente sans en rompre la cohérence.

34.3.1 Régime fort : surfaces piégeantes effectives et régularité

Objet du bloc. La lecture de type relativité générale ne doit pas être limitée au seul régime faible champ. Il est utile d'identifier ce que HSM permet déjà d'affirmer lorsqu'une forte concentration d'énergie déforme le canal gravitationnel-like. Le résultat disponible en amont n'est pas une solution globale complète de type trou noir, mais une brique plus précise : les sources HSM localisées d'énergie finie produisent une réponse régulière du canal gravitationnel-like, et la notion de surface piégeante peut être définie cinématiquement par la fermeture des canaux sortants,

$$c_{\mathrm{eff}}^{(+)}|_{\Sigma} = 0.$$

Le présent bloc donne donc la lecture relativiste effective de cette brique, sans sur-affirmer une théorie complète des trous noirs HSM.

Surface piégeante effective. Dans cette lecture, une surface est dite piégeante lorsque la composante sortante de la propagation effective s'annule. La région intérieure est dite piégée lorsque cette composante devient dirigée vers l'intérieur, dans la convention où le signe positif désigne la propagation sortante. Une telle surface joue le rôle d'un analogue cinématique d'horizon apparent : elle marque la fermeture effective des canaux de propagation sortants, mais elle ne constitue pas, par elle-même, une singularité de la théorie.

Régime fort et statut de l'horizon effectif. Lorsque la concentration énergétique devient suffisante pour modifier fortement la propagation, la lecture métrique effective peut décrire une frontière entre une région extérieure propagative et une région piégée. Cette frontière peut être lue comme un horizon effectif. Toutefois, dans l'état actuel de la fermeture, il faut distinguer trois niveaux :

réponse gravitationnel-like régulière, surface piégeante effective, solution globale complète de type tro

Le premier niveau est établi par la régularité du canal gravitationnel-like pour les sources finies ; le second est une définition cinématique naturelle ; le troisième reste un développement ultérieur, qui demanderait la fermeture non linéaire complète du régime fort.

Régularité et absence de singularité fondamentale. Le point robuste est le suivant : dans HSM, les variables mécaniques sous-jacentes du canal gravitationnel-like ne sont pas remplacées par une singularité métrique fondamentale. Une divergence éventuelle de la description métrique effective, si elle apparaissait par prolongement hors de son domaine de validité, ne devrait donc pas être interprétée comme une divergence des variables HSM elles-mêmes. L'horizon effectif est une surface de propagation ; la régularité pertinente est celle des sources HSM finies et de la réponse du canal gravitationnel-like.

Lecture physique. Dans le langage usuel, cette structure autorise une lecture de type zone piégeante régulière : la propagation sortante peut être fermée par la configuration gravitationnel-like, sans que cela impose une singularité centrale fondamentale. Cette lecture constitue une

passerelle vers les objets compacts de type trou noir, mais elle ne doit pas être confondue avec une solution globale complète de trou noir. Les questions de rayon effectif fermé, de loi d'aire, de dynamique d'accrétion et de raccord intérieur–extérieur relèvent d'un développement spécifique ultérieur.

Portée du résultat. Le résultat établi à ce stade est donc le suivant :

1. les sources HSM localisées d'énergie finie produisent une réponse gravitationnel-like régulière ;
2. une surface piégeante effective peut être définie par la fermeture de la composante sortante de propagation ;
3. cette surface admet une lecture relativiste de type horizon effectif ;
4. aucune singularité métrique fondamentale n'est imposée par cette lecture, puisque la métrique effective n'est pas une variable fondamentale indépendante de HSM.

Ce résultat fonde une lecture régularisée du régime fort, mais ne constitue pas encore une solution complète de type trou noir.

Conclusion du bloc. HSM fournit donc une première brique régulière pour la lecture du régime gravitationnel fort : les sources finies du canal gravitationnel-like ne produisent pas de singularité fondamentale, et la fermeture des canaux sortants définit la notion de surface piégeante effective. Dans le présent chapitre, cette structure se lit naturellement comme un horizon effectif régulier. La construction d'une solution globale complète de type trou noir HSM reste toutefois un chantier distinct, nécessitant une fermeture non linéaire dédiée du régime fort.

Contenu énergétique et équations effectives. Dans cette lecture, le contenu énergétique et inertiel des configurations HSM joue le rôle de source de la géométrie effective. Le point essentiel n'est pas de recopier formellement l'équation d'Einstein, mais de montrer que la théorie admet une organisation où :

1. la géométrie effective dépend du contenu énergétique ;
2. la propagation des sondes se lit géodésiquement à l'ordre pertinent ;
3. les identités de conservation et de cohérence imposent une structure tensorielle compatible avec une dynamique de type relativité générale.

Ainsi, la relativité générale n'est pas lue ici comme un axiome indépendant, mais comme une forme effective de fermeture entre énergie, propagation et géométrie.

Portée de la lecture. La portée du résultat doit être formulée avec précision. Ce qui est visé ici est une *lecture de type relativité générale* : HSM recouvre, dans le régime approprié, les éléments structuraux essentiels d'une gravitation géométrique relativiste, à savoir une métrique effective, un couplage au contenu énergétique, une propagation géodésique à l'ordre pertinent et un raccordement correct à la limite newtonienne. Il ne s'agit pas d'affirmer à ce stade que tout le formalisme de la relativité générale est reconstruit sans reste dans tous les régimes, mais bien que son noyau géométrique effectif appartient au domaine recouvert par HSM.

Cohérence avec les observations usuelles. Dans la mesure où la lecture métrique effective est disponible, les phénomènes classiquement associés à la relativité générale — déviation de trajectoires, retards de propagation, décalages gravitationnels et corrections post-newtoniennes — deviennent lisibles comme manifestations de cette géométrie effective. Le présent chapitre n'a pas à recalculer ici tous ces effets un par un ; son rôle est de montrer que le cadre nécessaire

à leur lecture existe déjà dans HSM, dès lors que l'on adopte la bonne réduction relativiste et gravitationnelle.

Conclusion de la section. HSM recouvre donc, au-delà de la seule gravitation newtonienne, une lecture de type relativité générale dès lors que le secteur gravitationnel-like est relu comme une déformation effective de la géométrie de propagation. La métrique effective, le couplage au contenu énergétique, la lecture géodésique et le raccordement à la limite faible champ fournissent la structure minimale nécessaire à une interprétation relativiste géométrique. En régime fort, la théorie fournit déjà une brique régularisée : les sources HSM finies ne correspondent pas à des singularités fondamentales du canal gravitationnel-like, et la fermeture des canaux sortants permet de définir des surfaces piégeantes effectives. Cette lecture ouvre la voie à une description d'objets compacts de type horizon effectif, sans constituer encore une solution globale complète de trou noir. La section suivante précise la portée exacte de ce lien, ainsi que ses limites.

34.4 Portée du lien gravitationnel

Objet de la section. Les sections précédentes ont établi que HSM admet une cinématique relativiste effective, un secteur gravitationnel-like admettant une limite newtonienne, puis une lecture de type relativité générale dans une fenêtre appropriée. Il reste à préciser la portée exacte de ce lien. L'objet de la présente section est donc de distinguer ce qui est effectivement démontré, ce qui est établi sous forme de réduction contrôlée, et ce qui ne doit pas être surinterprété au-delà du domaine de validité atteint.

Trois niveaux de résultat. Le lien gravitationnel obtenu dans HSM doit être lu selon trois niveaux distincts.

1. Au premier niveau, la théorie fournit une *gravitation effective* de longue portée, avec potentiel attractif et limite newtonienne.
2. Au deuxième niveau, elle admet une *lecture géométrique effective*, dans laquelle la propagation des sondes et des excitations se réorganise sous la forme d'une métrique effective dépendant du contenu énergétique.
3. Au troisième niveau, elle recouvre, dans une fenêtre contrôlée, le *noyau structurel* d'une gravitation relativiste de type géométrique.

Ces trois niveaux ne doivent pas être confondus : ils ne correspondent pas au même degré de généralité ni au même degré de démonstration.

Ce qui est établi. Ce qui est effectivement établi par la chaîne de réduction précédente est le fait suivant : HSM contient un canal gravitationnel-like dont la réduction de grande portée produit une interaction attractive universalisante, puis une limite newtonienne, et enfin une lecture métrique effective cohérente avec ce premier niveau. En ce sens, le domaine gravitationnel usuel n'est pas seulement approché qualitativement : il est effectivement recouvert dans ses structures fondamentales de basse énergie, de faible champ et de propagation relativiste effective. En régime fort, le résultat actuellement disponible est plus limité : HSM fournit une régularité des sources finies et une définition cinématique des surfaces piégeantes effectives, mais pas encore une solution globale complète de type trou noir.

Ce qui est établi sous hypothèses de réduction. La lecture de type relativité générale obtenue ici reste toutefois une *lecture effective*. Elle repose sur des hypothèses précises : séparation d'échelles, fermeture effective du canal gravitationnel-like, régime de champ modéré

ou contrôlé, et possibilité de réécrire la propagation dans le langage d'une métrique effective. Pour le régime fort, une hypothèse supplémentaire serait nécessaire pour aller au-delà de la brique actuelle : il faudrait fermer explicitement la relation entre la concentration d'énergie, la vitesse sortante effective $c_{\mathrm{eff}}^{(+)}$, et l'existence d'une surface piégeante globale. Autrement dit, ce qui est démontré n'est pas l'énoncé brut d'une théorie géométrique posée indépendamment de HSM, mais la possibilité, dans un domaine bien défini, de retrouver le langage et les structures pertinentes de la gravitation relativiste.

Ce qui ne doit pas être sur-affirmé. Il ne faut donc pas formuler ici une revendication plus forte que le résultat obtenu. La présente partie n'a pas pour objet de déclarer sans reste que toute la relativité générale, dans tous ses régimes et toutes ses reformulations, est déjà reconstruite point par point à partir de HSM sans travail complémentaire. Elle établit plutôt que HSM recouvre le *domaine gravitationnel relativiste pertinent*, avec sa limite newtonienne, sa lecture métrique effective et ses structures de cohérence, dès lors que l'on demeure dans la fenêtre de validité de la réduction. Elle autorise aussi une lecture prudente des surfaces piégeantes effectives en régime fort, mais elle ne doit pas être présentée comme une reconstruction complète de la physique des trous noirs tant que la fermeture non linéaire correspondante n'a pas été établie.

Conséquence pour le rôle de HSM. Le sens du lien est alors clair. HSM ne se contente pas d'être compatible avec la gravitation relativiste ; la théorie en fournit un support effectif interne, à partir de ses propres objets fondamentaux. La gravitation usuelle apparaît comme une lecture dérivée, et non comme un bloc indépendant juxtaposé au cadre HSM. C'est en ce sens que l'on peut dire que le domaine gravitationnel relativiste appartient à la famille des lectures effectives dérivées de HSM.

Bilan du domaine relativiste et gravitationnel. La partie présente a donc établi une chaîne de portée croissante :

propagation HSM $\longrightarrow$ cinématique relativiste effective $\longrightarrow$ gravitation de longue portée $\longrightarrow$ limite newtor

À cette chaîne s'ajoute, pour le régime fort, une brique plus limitée mais importante :

source HSM finie $\longrightarrow$ réponse gravitationnel-like régulière $\longrightarrow$ surface piégeante effective.

Cette chaîne suffit à fonder la passerelle gravitationnelle au niveau exigé par le présent chapitre : montrer que le domaine relativiste et gravitationnel usuel n'est pas extérieur à HSM, mais qu'il en constitue une lecture effective dans le bon régime, sans sur-affirmer une fermeture complète des objets de type trou noir.

Transition vers la conclusion générale. Il devient alors possible de conclure le chapitre dans son ensemble. La partie quantique et la partie relativiste-gravitationnelle convergent vers un même résultat : HSM admet, dans des régimes bien identifiés, des lectures effectives des grands langages de la physique théorique usuelle. La conclusion générale rassemblera ces résultats, distinguera ce qui est établi de ce qui reste conditionnel ou ouvert, et fixera la portée exacte du lien construit dans ce chapitre.

Chapitre 35

Conclusion : portée et limites du lien

Objet du chapitre. Le présent chapitre avait pour objet de montrer que HSM ne doit pas être lue comme une théorie isolée, extérieure aux grands langages de la physique théorique usuelle, mais qu'elle admet au contraire, dans des régimes bien identifiés, des lectures effectives qui reproduisent leurs structures essentielles. La question n'était donc pas celle d'une simple compatibilité formelle, mais celle d'une *passerelle démonstrative* : en quel sens la mécanique quantique, la théorie quantique des champs, les théories effectives de basse énergie, ainsi que le domaine relativiste et gravitationnel, appartiennent-ils déjà au contenu lisible de HSM ?

Résultat d'ensemble. La réponse obtenue est positive. Dans la fenêtre quantique effective, HSM admet une lecture de type mécanique quantique de Schrödinger, munie d'un espace d'états effectif, d'une lecture probabiliste, d'un régime semiclassique et d'une structure de systèmes composés autorisant des états non factorisables. Cette réduction ne se limite pas à reproduire le formalisme usuel : elle montre aussi que certains phénomènes que la mécanique quantique standard traite surtout au niveau probabiliste ou statistique — notamment du côté des corrélations globales, de la non-séparabilité et de certaines formes de décohérence de phase — admettent, dans la théorie, un support dynamique et géométrique plus explicite. La même théorie admet ensuite, dans une réduction locale convenable, une lecture de type théorie quantique des champs : champs effectifs, lagrangiens locaux, quantification canonique effective, propagateurs, amplitudes, secteurs d'interaction, structures de saveur, matrices de mélange et chiralité effective. Cette quantification canonique doit être comprise comme la procédure effective associée à la réduction quadratique et à la structure modale des secteurs considérés ; elle ne constitue pas, à elle seule, une dérivation complète de la théorie de la mesure ni du statut ontologique général des opérateurs quantiques. Enfin, dans le régime de basse énergie, ces mêmes structures s'organisent en une EFT dotée d'un matching interne, d'une lecture non abélienne effective et de contraintes de positivité et de dispersion dans les fenêtres où leurs hypothèses sont satisfaites.

Versant relativiste et gravitationnel. Dans la fenêtre relativiste et gravitationnelle, HSM admet également une cinématique de type relativiste fondée sur sa vitesse limite interne, un canal gravitationnel-like de longue portée, une limite newtonienne, puis une lecture géométrique effective de type relativité générale. Cette lecture ne se limite pas nécessairement au faible champ : elle possède aussi une première extension prudente vers le régime fort, où les sources HSM finies donnent une réponse régulière du canal gravitationnel-like et où la fermeture des canaux sortants permet de définir des surfaces piégeantes effectives. Cette structure autorise une lecture de type horizon effectif régularisé, sans constituer encore une solution globale complète de trou noir. Là encore, le lien obtenu n'est pas celui d'un simple parallélisme de vocabulaire, mais celui d'une réduction effective : les structures usuelles de la gravitation relativiste apparaissent comme une réorganisation contrôlée du contenu déjà construit dans la théorie.

Portée exacte du lien. La portée du présent chapitre doit toutefois être formulée avec précision. Ce qui est établi ici n'est pas, dans tous les cas, une reconstruction axiomatique intégrale de chacune des théories visées prise isolément dans toute sa généralité. Le résultat est plus rigoureux et plus pertinent à la fois : HSM recouvre effectivement, dans les bonnes fenêtres de validité, les *structures organisatrices* de ces théories. Selon les cas, ce lien prend la forme :

1. d'une *réduction explicite* vers une équation ou un formalisme usuel ;
2. d'une *couverture structurelle* d'un langage théorique connu ;
3. d'une *lecture effective contrôlée* dans un régime d'échelles précis.

Cette distinction interdit de confondre ce qui est démontré comme passage effectif avec ce qui ne serait qu'une analogie extérieure.

Ce qui est établi dans la fenêtre du chapitre. Au terme du chapitre, on peut considérer comme établis, chacun à son niveau de portée propre :

— la réduction vers la mécanique quantique effective de type Schrödinger ;

— la lecture probabiliste, les paquets d'onde et le théorème d'Ehrenfest ;

— la structure des systèmes composés et l'appartenance de l'intrication au domaine quantique ainsi obtenu ;

— la lecture QFT locale au niveau des champs effectifs, de la quantification, des propagateurs et des amplitudes ;

— la disponibilité de secteurs d'interaction effectifs lisibles comme secteurs électromagnétique-like, faible-like, forte-like et gravitationnel-like ;

— la structure de saveur, de mélange et de chiralité effective ;

— la lecture EFT à basse énergie, avec matching, algèbre interne effective, positivité et dispersion lorsque les hypothèses correspondantes sont satisfaites ;

— la gravitation effective, la limite newtonienne et la lecture métrique de type relativité générale dans la fenêtre de validité appropriée ;

— la régularité gravitationnel-like des sources HSM finies et la définition cinématique de surfaces piégeantes effectives en régime fort.

Ce qui demeure de nature effective. Plusieurs résultats du chapitre doivent toutefois rester lus à leur niveau exact de réduction. C'est le cas en particulier :

— de certaines lectures non abéliennes, qui valent au niveau effectif des générateurs internes effectivement fermés ;

— de la lecture de type confinement, qui repose sur la formation effective de tubes de flux et sur une lecture IR du secteur forte-like ;

— de la lecture gravitationnelle géométrique, qui vaut comme réduction effective contrôlée et non comme affirmation sans régime de toutes les formes possibles de la relativité générale ;

— de la lecture des surfaces piégeantes comme horizons effectifs, qui ne doit pas encore être confondue avec une solution globale complète de trou noir HSM.

Cette précision n'affaiblit pas le résultat : elle en fixe au contraire la portée véritable.

Limites du chapitre. Le présent chapitre n'avait pas pour vocation de réécrire en détail toutes les constructions internes de la théorie ni d'épuiser chaque secteur dans toutes ses variantes possibles. Sa limite assumée est celle d'un chapitre de *liaison* : il organise les passages, établit les chaînes de réduction, précise les domaines recouverts et distingue les niveaux de portée. Les démonstrations internes de fermeture, les constructions détaillées des solutions et les calculs propres à chaque canal relèvent de la théorie elle-même ; le présent chapitre montre seulement en quel sens ces résultats s'inscrivent dans les grands cadres déjà reconnus de la physique théorique.

Conclusion générale. Le résultat final du chapitre peut donc être formulé simplement : *les grands langages effectifs de la physique théorique usuelle ne sont pas extérieurs à HSM.* Mécanique quantique, théorie quantique des champs, EFT de basse énergie, relativité effective et gravitation géométrique appartiennent, dans leurs domaines propres, aux lectures effectives dérivées de la théorie. Ainsi, HSM ne s'ajoute pas aux théories existantes comme une proposition concurrente juxtaposée ; elle les recouvre comme lectures effectives dérivées de sa structure fondamentale.

Conclusion générale

Ce qui est établi. Le manuscrit a développé une construction mécanique autonome sur $\mathbb{S}^3$. Son point de départ n'est pas la juxtaposition de la mécanique quantique, de la relativité, de la gravitation et des interactions usuelles, mais l'étude d'un support hypersphérique maillé, porteur de degrés tangentiels, de réponses radiales, de rotations internes, de raccords globaux et de solutions localisées.

À partir de cette mécanique, HSM construit des familles de solutions à deux et trois degrés de liberté, des solutions massiques et non massiques, des états liés, des structures composées, des canaux d'interaction effectifs et des lectures vers les domaines physiques usuels. La cohérence du cadre repose sur une chaîne continue :

géométrie → dynamique → solutions → champs effectifs → fermetures → comparaisons.

Résultats structurels. L'analyse des solutions fait apparaître une architecture discrète qui n'est pas posée comme donnée initiale. Le modèle sélectionne des familles de solutions, des degrés de liberté internes, des projections coniques, des motifs de charge réduite, des solutions neutres et chargées, ainsi que des branches composées. Les motifs 1, 2/3 et 1/3 ne sont pas introduits comme charges externes : ils apparaissent comme coefficients réduits de charge de champ, normalisés par le quantum élémentaire du canal EM–like et transmis par l'appariement source–champ (21.3).

Le manuscrit fait également apparaître quatre canaux d'interaction identifiables, dans les régimes appropriés, aux secteurs gravitationnel, électromagnétique, faible et fort. Ces canaux ne sont pas ajoutés comme forces extérieures : ils sont construits comme des réponses effectives de la même mécanique, avec leurs sources, leurs charges de champ, leurs portées, leurs constantes et leurs domaines de validité.

Le secteur électromagnétique joue un rôle particulier. Il ferme d'abord une constante de structure fine adimensionnée,

$$\alpha_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{HSM,LO}} \simeq 7.285 \times 10^{-3}, \qquad (\alpha_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{HSM,LO}})^{-1} \simeq 137.3,$$

cf. (30.44), puis un quantum élémentaire de charge de champ. Dans la normalisation mécanique HSM, cette charge possède la dimension

$$[Q_{\mathrm{EM},*}]_{\mathrm{HSM}} = L^{1/2}T^{1/2},$$

ce qui conduit, dans l'atterrissage observationnel, à la lecture dimensionnelle

$$[\mathrm{C}]_{\mathrm{HSM}} = L^{1/2}T^{1/2},$$

cf. (30.48). Après lecture observationnelle, le quantum élémentaire de charge de champ vaut

$$Q_{\mathrm{EM},*}^{\mathrm{HSM,LO}} \simeq 1.601 \times 10^{-19}\ \mathrm{C},$$

à comparer à la charge élémentaire e, avec un rapport

$$Q_{\mathrm{EM},*}^{\mathrm{HSM,LO}}/e \simeq 0.999,$$

cf. (30.52) et (30.53). Cette comparaison ne consomme pas e dans la fermeture du quantum de charge : $Q_{\mathrm{EM},*}^{\mathrm{HSM,LO}}$ reste une prédiction dérivée du canal EM–like HSM. En revanche, après les identifications SI, l'accord numérique avec e n'est pas indépendant de l'accord sur $\alpha_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{HSM,LO}}$, car

$$\frac{Q_{\mathrm{EM},*}^{\mathrm{HSM,LO}}}{e} = \left(\frac{\alpha_{\mathrm{EM}}^{\mathrm{HSM,LO}}}{\alpha_{\mathrm{fs}}}\right)^{1/2}.$$

Il doit donc être lu comme un contrôle de cohérence de la chaîne EM–like complète, et non comme une seconde validation indépendante de la constante de structure fine.

Le secteur faible-like fournit une autre structure propre : le manuscrit construit une expression de canal, une charge associée aux branches concernées, une portée et une force effective entre sources. Ce secteur n'est donc pas seulement nommé par analogie ; il possède une écriture mécanique interne issue des solutions HSM et de leurs couplages.

Le secteur photon-like fournit un résultat structurel complémentaire. Il apparaît comme un mode transverse non massif, à deux polarisations physiques, compatible à l'ordre dominant avec une lecture de type Maxwell. Dans le même secteur, la compacité de $\mathbb{S}^3$ permet des solutions globales à deux centres. Le manuscrit formule ainsi une expérience théorique de type CHSH, fondée sur une même solution composée globale plutôt que sur deux objets indépendants.

Jeu de constantes fondamentales et fermeture globale. La fermeture HSM ramène la description du cadre à un nombre restreint de constantes mécaniques fondamentales :

$$\ell_0, \quad T, \quad \rho, \quad R_0, \quad \kappa_r, \quad \kappa_\mu, \quad \chi.$$

À partir de ce jeu de constantes, le manuscrit reconstruit les échelles locales et globales du modèle : vitesse limite, constante d'action effective, familles de solutions, masses, charges de champ, couplages, modes non massiques et structures composées.

Le point important est que h_{eff} n'est pas introduit comme constante fondamentale indépendante du support. Il apparaît comme une constante d'action effective calculée dans la théorie, puis identifiée à la constante d'action observée dans la partie de calibrage.

Un résultat central de cette fermeture est la détermination d'une échelle globale de l'hypersphère. Dans la fermeture micro-locale 1-anneau, cette échelle est évaluée par

$$R_0^{\mathrm{HSM}} \simeq 1.50841 \times 10^{29}\ \mathrm{m},$$

cf. (29.34). HSM ne fournit donc pas seulement une description locale des solutions associées aux particules ; elle relie ces solutions à une échelle globale du support, depuis la maille microscopique jusqu'au rayon de l'hypersphère.

Dans la lecture où HSM décrit l'univers physique, cette grandeur doit être lue comme le rayon global du support hypersphérique HSM. Elle ne constitue pas, à elle seule, une mesure observationnelle directe de la taille de l'univers visible, ni une identification au rayon de Hubble. Les solutions locales, les constantes effectives et les canaux d'interaction sont alors inscrits dans une même hypersphère de rayon R_0^{HSM}, sous réserve de la chaîne de calibrage et de correspondance cosmologique explicitée dans les sections concernées.

Résultats quantitatifs. La confrontation numérique repose sur un nombre limité d'entrées de calibrage, déclarées dans les chaînes concernées : l'identification de h_{eff} à la constante d'action observée, l'identification de c_t à la vitesse limite observée, la masse du boson W, l'impédance du vide, la constante de gravitation et les ratios de hiérarchie utilisés pour la sélection des niveaux leptoniques.

Une fois ces entrées déclarées, les chaînes fermées produisent des sorties comparables aux valeurs de référence observées. Elles incluent notamment la masse de la solution associée à

l'électron, la masse de la solution neutre associée au Z^0, la masse du secteur radial associé au boson de Higgs, les masses de composés HSM identifiables aux baryons observés, les écarts de masse du secteur associé aux neutrinos, les angles internes du composé tri–breather, le raccord de ces angles à la structure PMNS dans la partie de correspondance, la constante de structure fine EM–like, le quantum élémentaire de charge EM–like et les propriétés de la solution associée au photon.

Dans plusieurs chaînes principales, les valeurs centrales obtenues sont proches des valeurs de référence observées. Certaines sorties sont au niveau du pourcent, tandis que d'autres héritent d'incertitudes de fermeture explicites, notamment lorsque des fermetures LO régularisées interviennent. Le résultat important n'est pas seulement la proximité numérique obtenue, mais le fait que les masses, rapports, charges réduites, angles internes, raccords de correspondance et structures comparées soient produits par des chaînes de calcul déclarées, dans lesquelles les entrées de calibrage, les sorties théoriques, les fermetures utilisées et les comparaisons sont distinguées.

Charges de solutions et quantum électromagnétique. La théorie distingue trois niveaux de charge. Le premier est le courant interne de Noether porté par une solution. Le deuxième est la charge de champ Q_{field}, obtenue par le dictionnaire source–champ du canal électromagnétique, cf. (21.3). Le troisième est le quantum élémentaire $Q_{\text{EM},*}^{\text{HSM,LO}}$, fermé par le canal électromagnétique lui-même.

Les charges de solutions sont exprimées sous forme native par

$$Q_{\text{field}}(\mathcal{S}) = q_{\text{eff}}(\mathcal{S})\, Q_{\text{EM},*}^{\text{HSM,LO}}.$$

Pour les branches élémentaires, les coefficients réduits donnent les motifs

$$q_{\text{eff}} = \pm 1, \qquad q_{\text{eff}} = \pm\frac{2}{3}, \qquad q_{\text{eff}} = \pm\frac{1}{3}.$$

Les branches composées portent en outre des corrections de forme propres à leur fermeture. Les valeurs numériques associées à chaque famille sont données dans les sections de prédiction correspondantes.

Au-delà de l'inventaire du Modèle Standard. Le catalogue mécanique de HSM est plus large que l'inventaire actuellement identifié du Modèle Standard. Certaines familles de solutions trouvent une correspondance naturelle avec des particules ou des secteurs observés. D'autres constituent des branches théoriques fermées du catalogue HSM : elles possèdent des masses, charges réduites et couplages déterminés par le modèle, sans être pour autant associées à une particule observée identifiée.

Ce point est important : HSM ne se limite pas à associer un nom connu à chaque solution. La théorie produit un espace de solutions admissibles, avec des familles autorisées, des familles exclues, des niveaux spectraux et des contraintes de couplage. Les correspondances avec le Modèle Standard apparaissent alors comme une partie du catalogue mécanique, non comme son point de départ unique.

Lectures quantique, relativiste et gravitationnelle. La dernière partie du manuscrit montre que HSM ne se contente pas de produire des solutions et des masses. Dans les fenêtres appropriées, la théorie admet une lecture de type mécanique quantique effective : espace d'états, réduction d'enveloppe, équation de Schrödinger, lecture probabiliste, régime semiclassique, systèmes composés et états non factorisables.

Elle admet également une lecture locale de type théorie de champs effective : champs effectifs, lagrangiens locaux, propagateurs, amplitudes, secteurs d'interaction, raccords masse–saveur, matrices de mélange effectives et chiralité effective. Ces éléments ne sont pas posés

comme axiomes indépendants ; ils apparaissent comme des descriptions réduites de la dynamique mécanique sous-jacente.

Sur le versant relativiste et gravitationnel, HSM reconstruit une cinématique à vitesse limite interne, un canal gravitationnel-like de longue portée, une limite newtonienne et une lecture géométrique effective de type relativité générale. La métrique effective, le couplage au contenu énergétique et la propagation géodésique apparaissent alors comme une organisation effective du contenu mécanique, et non comme des postulats séparés.

Ce que HSM apporte. Dans les formulations usuelles du Modèle Standard, de nombreuses masses et constantes de couplage apparaissent comme des paramètres déterminés expérimentalement. HSM propose une autre organisation : un petit nombre d'entrées fixe les échelles d'atterrissage observationnel et certains seuils structuraux, puis les masses, charges de champ réduites, couplages et propriétés des solutions identifiables sont calculés à partir de la dynamique interne du modèle.

L'apport de HSM n'est donc pas seulement de reproduire certains nombres. Il est de proposer un cadre mécanique unique dans lequel apparaissent simultanément : l'inertie effective de type relativiste, une constante d'action commune, le spin géométrique, les charges de champ orientées, les modes non massiques, les états liés, les structures composées, les canaux d'interaction, les lectures effectives quantique, relativiste et gravitationnelle, ainsi qu'une échelle globale de l'hypersphère.

Cette unité de construction est le résultat central du manuscrit. HSM ne part pas d'une loi probabiliste première ni d'une géométrie relativiste postulée : dans les régimes étudiés, ces structures apparaissent comme des lectures effectives d'une dynamique mécanique déterministe sous-jacente.

Falsifiabilité et limites. Le modèle est falsifiable parce qu'il ne se limite pas à un vocabulaire qualitatif. Il produit des masses, des rapports, des niveaux admissibles, des familles autorisées ou exclues, des structures de couplage, des constantes effectives, des charges de champ réduites et des contraintes de spectre. Une observation incompatible avec ces sorties, ou la mise en évidence d'une branche exclue par les fermetures du modèle, contredirait directement les chaînes correspondantes.

Cette falsifiabilité repose sur la traçabilité. Chaque résultat revendiqué doit pouvoir être relié à ses hypothèses, à ses équations, à ses constantes internes, à son rang d'approximation et aux entrées de calibrage éventuellement utilisées. C'est pourquoi le manuscrit distingue systématiquement les entrées de calibrage, les sorties théoriques, les prédictions comparables aux observables, les lectures observationnelles et les diagnostics de sélection de branches.

Les familles qui satisfont les critères de fermeture établis dans le texte sont présentées avec leurs sorties correspondantes. Les branches placées sur le bord d'un domaine admissible sont identifiées comme diagnostics de bord et ne sont pas confondues avec les prédictions associées à des solutions stationnaires internes.

Conclusion. Le résultat principal du manuscrit est d'établir qu'une mécanique classique sur $\mathbb{S}^3$, munie d'une structure interne maillée et de couplages radial–tangent, peut engendrer un catalogue de solutions dont plusieurs propriétés recouvrent des structures majeures de la physique connue.

Le point décisif est que ces structures ne sont pas introduites séparément. Elles apparaissent dans une même construction : solutions localisées, masses effectives, charges de champ, quantum élémentaire EM–like, spin, modes photon-like, canaux d'interaction, composés, composé tri–breather du secteur neutre léger, corrélations de type CHSH, limites quantiques effectives, cinématique relativiste, réponse gravitationnelle et échelle globale de l'hypersphère.

HSM constitue ainsi une proposition théorique autonome, contrôlable ligne par ligne et exposée à la falsification. Sa force ne dépend pas d'une analogie de vocabulaire avec les cadres existants, mais de la stabilité de ses chaînes de fermeture, de la traçabilité de ses sorties quantitatives et de sa capacité à relier, dans un même cadre déterministe, les structures locales de la matière et la géométrie globale du support.

Dans une lecture HSM, Dieu ne jouerait pas aux dés ; il jouerait avec une hypersphère maillée.

Bibliographie

[1] P. J. Mohr, D. B. Newell, B. N. Taylor, and E. Tiesinga, *CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants : 2022*, Rev. Mod. Phys. **97**, 025002 (2025) ; NIST constants database, 2022 recommended values.

[2] S. Navas et al. (Particle Data Group), *Review of Particle Physics*, Phys. Rev. D **110**, 030001 (2024).

[3] I. Esteban et al., *NuFIT 5.3 : Three-neutrino fit based on data available in March 2024*, NuFIT collaboration, 2024.

[4] N. Aghanim et al. (Planck Collaboration), *Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters*, Astron. Astrophys. **641**, A6 (2020).

[5] The KATRIN Collaboration, *Direct neutrino-mass measurement based on 259 days of KATRIN data*, Science **388**, 180–185 (2025).

[6] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, and R. A. Holt, *Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories*, Phys. Rev. Lett. **23**, 880–884 (1969).

[7] B. S. Cirel'son, *Quantum Generalizations of Bell's Inequality*, Lett. Math. Phys. **4**, 93–100 (1980).

[8] G. Pöschl and E. Teller, *Bemerkungen zur Quantenmechanik des anharmonischen Oszillators*, Z. Phys. **83**, 143–151 (1933).

[9] H. Kielhöfer, *Bifurcation Theory : An Introduction with Applications to Partial Differential Equations*, 2nd ed., Springer (2012).

[10] J. J. Sakurai and J. Napolitano, *Modern Quantum Mechanics*, 2nd ed., Cambridge University Press (2017).

[11] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd ed., Wiley (1999).

[12] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman (1973).

[13] C. Müller, *Spherical Harmonics*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 17, Springer (1966).

[14] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Vols. I–II, Wiley (1989).

[15] G. B. Arfken, H. J. Weber, and F. E. Harris, *Mathematical Methods for Physicists*, 7th ed., Academic Press (2013).

[16] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Westview Press (1995).

[17] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, Vol. I*, Cambridge University Press (1995).

[18] P. G. Drazin and R. S. Johnson, *Solitons : An Introduction*, Cambridge University Press, 1989.

[19] R. Rajaraman, *Solitons and Instantons*, North-Holland, 1982.

[20] M. Peyrard and T. Dauxois, *Physique des solitons*, Savoirs Actuels, EDP Sciences/CNRS Éditions, 2004.

[21] P. A. Zyla et al. (Particle Data Group), *Review of Particle Physics*, Prog. Theor. Exp. Phys. **2020**, 083C01 (2020).